

L'EXACTITUD POTENCIAL DEL MÈTODE MODERN D'AJUST DE BLOCS PER FEIXOS EN LA FOTOGRAMETRIA AÈRIA

Introducció

L'ús de tècniques fotogramètriques per assignar coordenades a estacions situades sobre el terreny (densificació de xarxes geodèsiques, aixecaments per a cadastre i enginyeria civil, problemes territorials, etc.) ha estat objecte de discussions contínues durant, almenys, els darrers vint anys. Els resultats de la fotogrametria no han estat sovint prou acurats i, malauradament, s'han establert els estàndards d'exactitud per als treballs fotogramètrics basant-se en aquests resultats. Si mirem enrera, però, observarem que el motiu principal de la pobresa d'aquests resultats ha estat: un tractament fotogramètric analític poc adequat, especialment en l'aplicació dels mètodes aproximats d'ajustos de blocs, i també, en part, una planificació i una execució poc adequades del vol fotogramètric. El fet de poder disposar, actualment, de programes d'ajust per feixos, amb paràmetres d'autocalibració, així com el coneixement recent dels problemes de fiabilitat, i com a conseqüència el coneixement més aprofundit de les necessitats estructurals d'una xarxa, han establert la base per poder emprar exhaustivament les potencialitats d'exactitud que ofereixen les fotografies aèries actuals. La conseqüència principal d'explotar aquest potencial és que es posen a l'abast, i es poden obtenir en situacions diverses, nivells repetibles d'exactitud fotogramètrica que ultrapassen els estàndards convencionals i que obliguen a revisar actituds no justificades referents a les aplicacions pràctiques de la fotogrametria com a eina per assignar coordenades a punts topogràfics.

Comparada amb els mètodes topogràfics convencionals, la fotogrametria té dos avantatges essencials:

En primer lloc, les fotografies aèries contenen una enorme quantitat d'informació del terreny, la qual pot ésser utilitzada per a múltiples propòsits d'avaluació. Aquesta característica no ha de ser negligida atès que cal considerar els esforços actuals i futurs en planificació urbana i territorial.

En segon lloc, la fotogrametria permet dissenys repetitius d'una xarxa i, per tant, permet fer una predicció senzilla i barata de la precisió mitjana dels resultats finals, utilitzant, per exemple, models sintètics de

precisió dels ajustos de feixos com els obtinguts per EBNER ET AL. (1977).

En un projecte, suposant que es poden aconseguir les exactituds demanades, hom tria un procediment tècnic de realització en funció, sobretot, de consideracions econòmiques. La millora recent i l'estabilització de l'exactitud fotogramètrica en la determinació de punts, permeten reduir l'esforç a esmerçar, ja que l'exactitud necessària en l'espai de coordenades objecte es pot obtenir utilitzant una escala d'imatge més petita i, per tant, menys fotografies, la qual cosa significa menys temps de mesura i conjunts més reduïts de dades per tractar i analitzar.

L'objectiu d'aquest article és fer avinent quines són les actuals potencialitats d'exactitud de la fotografia aèria convencional amb l'ajut d'un tractament empíric de dades. En articles anteriors (GRÜN, 1978, 1980a), a partir de consideracions de precisió i de fiabilitat, es va demostrar empíricament que l'autocalibració sofisticada és millor que la calibració basada en zones de prova (els avantatges econòmics de l'autocalibració no han estat posats mai en dubte).

Tots els resultats que es presenten, s'han obtingut sota condicions de pressió econòmica simulada. No s'ha fet cap esforç (no és necessari fer-ho, segons demostren els resultats) per aplicar refinaments sofisticats *a priori* a les coordenades de les imatges, ans al contrari: només s'han utilitzat les quatre marques fiducials, la distorsió radial de l'òptica s'ha corregit d'acord amb el certificat de calibració i la refracció s'ha corregit utilitzant la fórmula de Bertram modificada¹.

Aspectes de les consideracions d'exactitud

Les teories actuals més sofisticades sobre l'exactitud de xarxes geodèsiques han estat desenvolupades per BAARDA (1967, 1968), el qual considera que l'exac-

Nota

1. (N. del T.): A causa del fet que alguna terminologia pot no ésser familiar per al lector, malgrat que els termes precisió i exactitud són clarament definits més endavant, avancem que precisió i exactitud tenen significats diferents en aquest article i que corresponen als termes anglesos *precision* i *accuracy*, de l'article original, respectivament.

titud dels resultats d'ajustos de xarxes (coordenades i funcions de les coordenades, tals com angles, distàncies i raons entre distàncies) es pot dividir en dos components: precisió i fiabilitat. Els dos conceptes involucren molta matemàtica i estadística, tal com es veu en la teoria de les transformacions S i en la d'estimació estadística d'interval. Una descripció breu de les tècniques de Baarda i una exposició dels problemes, juntament amb la seva definició de precisió, exactitud i fiabilitat es poden trobar a BAARDA (1977) i ALBERDA (1980). Recentment, els fotogrametristes han utilitzat parts d'aquestes teories per aplicar-les a les xarxes fotogramètriques. Per investigar la fiabilitat dels sistemes de feixos, cal llegir FÖRSTNER (1979, 1980) i GRÜN (1979, 1980b, 1980c). El primer intent d'usar el concepte de les transformacions S en fotogrametria es deu a MOLENAAR (1980).

No és l'objecte d'aquest article presentar o elaborar temes de la teoria d'exactitud de Baarda. Malgrat tot, cal fer alguns comentaris bàsics sobre els conceptes d'exactitud, precisió i fiabilitat, tal com s'apliquen en aquest treball, per entendre el significat dels estimadors de precisió i exactitud que s'utilitzen més tard, en la secció que tracta dels Estudis Empírics d'Exactitud.

Precisió

Signa el model estadístic lineal de l'ajust per feixos:

$$\begin{aligned} l - e &= Ax; P \\ E(l) &= Ax; E(e) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

on:

x és el vector dels paràmetres convencionals dels feixos (coordenades del punt objecte, elements d'orientació exterior)

e és el vector dels veritables errors d'observació

P és la matriu de pesos del vector d'observacions l .

Fent servir la terminologia de la teoria moderna d'estimació lineal per a estimacions d'interval, aquest model pot ser formulat com la hipòtesi nul·la H_0 (compareu GRAYBILL, 1961, i BAARDA, 1968):

$$H_0: l \sim N(Ax, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (2)$$

(és a dir, l segueix una llei de distribució normal, multidimensional, amb esperança $E(l) = Ax$ i dispersió $D(l) = \sigma_0^2 P^{-1}$, σ_0^2 és el factor de variància a estimar).

Suposem que una estimació no esbiaixada de variància mínima de x i σ_0^2 s'obté amb:

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (3a)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{r} (A \hat{x} - l)^T P (A \hat{x} - l) \quad (3b)$$

$$r = n - u \text{ (redundància)}$$

i els residus s'escriuen:

$$v = A \hat{x} - l \quad (4)$$

Sota H_0 les distribucions d' $\hat{x}$ i v són:

$$\hat{x} \sim N(x, K_{xx}), K_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx} \quad (5a)$$

$$v \sim N(0, K_{vv}), K_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv} \quad (5b)$$

amb les matrius de coeficients de pes:

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1}, Q_{vv} = P^{-1} - A Q_{xx} A^T \quad (6)$$

El terme *precisió* es defineix per les característiques estadístiques dels paràmetres estimats $\hat{x}$, si les suposicions *a priori* (relacions funcionals i estocàstiques) del model de l'ajust (equació 1) són considerades vertaderes.

Per tant, la matriu de covariància K_{xx} conté tota la informació sobre la precisió de la solució $\hat{x}$.

A fi de completar la discussió, cal esmentar que la mesura de precisió de Baarda no és la matriu de covariància K_{xx} , sinó una *matriu de criteri* artificial, o bé la desviació de K_{xx} respecte d'ella, respectivament.

Les matrius de covariància K_{xx} , K_{vv} també es poden escriure usant l'operador de dispersió D . Per a K_{xx} obtenim:

$$K_{xx} = D(\hat{x}) = E((\hat{x} - E(\hat{x}))(\hat{x} - E(\hat{x}))^T) \quad (7)$$

Sota H_0 obtenim:

$$E(\hat{x}) = x, \quad (8)$$

i per tant:

$$K_{xx} = D(\hat{x}) = E((\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T) \quad (9)$$

Exactitud

Suposem que el model (equació 1) sigui un model fals. Llavors, obtenim:

$$E(l) \neq Ax \quad (10)$$

i l'estimador de mínims quadrats:

$$\bar{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l = \hat{x} + \nabla x \quad (11)$$

ja no és no esbiaixat, de forma que:

$$E(\bar{x}) = x + \nabla x \neq x \quad (12)$$

on ∇x és el biaix degut als errors del model.

La precisió de $\bar{x}$ es pot deduir, altre cop, aplicant l'operador de dispersió:

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= E((\bar{x} - E(\bar{x}))(\bar{x} - E(\bar{x}))^T) = \\ &= E((\bar{x} - (x + \nabla x))(\bar{x} - (x + \nabla x))^T) = \\ &= E((\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T) = K_{xx} \end{aligned} \quad (13)$$

Per tant, obtenim, tant en el cas del model veritable com en el del model fals, mesures de precisió idèntiques (el valor veritable σ_0^2 pel factor de variància s'usa en tots dos models!). En ambdós casos la precisió descriu la desviació dels vectors estimats $\bar{x}$ (o $\hat{x}$) a partir de la seva esperança associada amb el model corresponent.

Per a la discussió dels efectes d'un possible model fals, el terme exactitud esdevé important. Per deduir una mesura d'exactitud multidimensional, el segon moment d' $\bar{x}$ sobre x (que ja no és una dispersió) es formula:

$$A(\bar{x}) = E((\bar{x} - x)(\bar{x} - x)^T) \quad (14)$$

$A(\bar{x})$ defineix l'abast de la desviació del vector estimat $\bar{x}$ a partir del vector veritable x . Desenvolupant l'equació 14 s'obté:

$$\begin{aligned} A(\bar{x}) &= E(\bar{x}\bar{x}^T) - 2E(\bar{x})x^T + xx^T = \\ &= E(\bar{x}\bar{x}^T) - 2(x + \nabla x)x^T + xx^T = (15) \\ &= E(\bar{x}\bar{x}^T) - 2\nabla xx^T - xx^T \end{aligned}$$

Un procés similar de l'equació 13 dóna:

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= E(\bar{x}\bar{x}^T) - 2E(\bar{x})(x + \nabla x)^T + (x + \nabla x)(x + \nabla x)^T = \\ &= A(\bar{x}) - 2E(\bar{x})\nabla x^T + 2x\nabla x^T + \nabla x\nabla x^T = (16) \\ &= A(\bar{x}) - \nabla x\nabla x^T \end{aligned}$$

Per tant, es dedueix que:

$$A(\bar{x}) = K_{zz} + \nabla x\nabla x^T \quad (17)$$

L'equació 17 es pot usar com una mesura de l'exactitud; inclou tant els efectes de la precisió, com els de la fiabilitat (errors del model). Si es verifica H_0 obtenim:

$$\nabla x = 0$$

i l'exactitud $A(\bar{x})$ és idèntica a la precisió $D(\bar{x})$.

El biaix ∇x no es coneix normalment, excepte en cas que es disposi d'informació externa que no sigui emprada pel model d'estimació (equació 1), com per exemple les coordenades de punts de comprovació. Baarda evita aquest problema substituint l'equació 17 per una fórmula que conté l'efecte combinat dels

errors aleatoris i dels no detectables en x , en el model (arriba a allò que ell anomena *valors de frontera* $\nabla_0 x$, que són mesures escalars).

Fiabilitat i inspecció de dades

El terme *fiabilitat* defineix la qualitat del model d'ajust en relació a la detecció d'errors en el model. Aquests errors poden ésser errors grollers (*blunders*), errors sistemàtics (errors en les hipòtesis funcionals) i errors en els pesos (errors en les hipòtesis estocàstiques). Fou BAARDA(1967, 1968) qui va desenvolupar una teoria força completa de la fiabilitat, que es va utilitzar en els ajustos de la xarxa geodèsica dels Països Baixos durant uns quants anys i que ha estat també adoptada pels fotogrametristes per investigar la fiabilitat de les estructures de les xarxes fotogramètriques.

Actualment, el terme fiabilitat s'usa preferentment en relació a la detecció i localització d'errors grollers, la qual cosa és correcta, si un programa d'autocalibració sofisticat s'ocupa de la compensació d'errors sistemàtics; també s'usa perquè el problema de millorar els pesos ha d'ésser tractat separatament mitjançant tècniques d'estimació de pesos.

Hi ha definicions de:

- Fiabilitat interna: dóna la magnitud d'un error groller en una observació que és no detectable a un cert nivell de probabilitat.
- Fiabilitat externa: indica l'efecte d'aquest error groller no detectable en les quantitats estimades (d'interès especial: coordenades de l'espai objecte dels punts del terreny). Per conèixer detalls de la fiabilitat interna i externa dels sistemes per feixos, veieu FÖRSTNER (1979, 1980) i GRÜN (1979, 1980b, 1980c).
- Tècnica d'inspecció de dades (*data-snooping*): un procediment per detectar errors grollers.

A causa que els errors veritables (e) del sistema d'ajust (equació 1) no es coneixen, el procediment de detecció d'errors grollers s'ha de restringir a x i/o v . Llavors les hipòtesis nul·les:

$$H_{0i}^x: E(\hat{x}_i) = x_i \quad (18a)$$

$$H_{0i}^v: E(v_i) = 0 \quad (18b)$$

es poden utilitzar en tests.

Les esperances per al vector x_i de solucions no es coneixen normalment; les excepcions són les coordenades dels punts de control i de comprovació.

En el cas de coordenades de punts de comprovació, els tests portarien als criteris estadístics següents:

$$t_i = \frac{\hat{x}_i - x_i}{\hat{\sigma}_{x_i}}, \text{ amb } \hat{\sigma}_{x_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{x_i x_i}} \quad (19)$$

on $q_{x_i x_i}$ és l'element diagonal i-èsim de Q_{xx} en cas que $\hat{\sigma}_0$ s'hagi d'emprar en lloc de l'esperança σ_0 . Sota H_{0i}^x el criteri de test t_i es distribueix segons la t de Student amb r graus de llibertat.

$$t_i \sim t(r) \quad (20)$$

En projectes pràctics normalment no es disposa de les coordenades dels punts de comprovació. Si l'objectiu d'un projecte de test fotogramètric és comprovar la potència de la tècnica aplicada, i si d'aquest test cal extreure'n recomanacions pràctiques per als professionals, els criteris de test (equació 19) no s'han d'aplicar en els propis projectes de tests, ja que els resultats així obtinguts no estarien en concordança amb les necessitats pràctiques. Per tant, els resultats presentats en aquest treball no han estat subjectes als tests de l'equació 19, és a dir, les coordenades fotogramètriques dels punts de comprovació no han estat "netejaes" per cap procediment directe de rebuig aplicat *a posteriori*.

Si les coordenades dels punts de control s'introdueixen com a magnituds estocàstiques (compareu amb GRÜN, 1978) llavors es poden establir criteris de tests, similars als de l'equació 19, per comprovar la desviació de les coordenades determinades fotogramètricament respecte als seus valors geodèsics. Així, per exemple:

$$t_i^c = \frac{v_i^c}{\hat{\sigma}_{x_i}^c} \quad (21)$$

on c indica *punt de control*.

t_i^c té el caràcter d'un residu normalitzat i no segueix la distribució de Student, ja que v_i^c depèn de $\hat{\sigma}_0$, i, com a tal, de $\hat{\sigma}_{x_i}^c$. Per provar aquesta darrera afirmació, hom pot consultar el teorema 4.21 de GRAYBILL (1961, pàg. 88).

La distribució correcta de t_i^c és la τ distribució (compareu l'aplicació de τ en POPE, 1975, per a la detecció d'errors grollers):

$$t_i^c \sim \tau(r) \quad (22a)$$

amb:

$$\tau^2(r) = \frac{r \cdot t^2(r-1)}{r-1 + t^2(r-1)} \quad (22b)$$

La comprovació de les observacions de les coordenades imatge, basada en l'equació 18b, pot fer-se utilitzant la tècnica d'inspecció de dades de Baarda. Un cop més, per a la majoria dels blocs fotogramètrics, s'ha d'utilitzar la $\hat{\sigma}_0$ estimada en lloc de l'esper-

rança σ_0 . Llavors, els criteris de test resulten ésser:

$$w_i = \frac{-v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}, \text{ amb } \hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i v_i}} \quad (23)$$

on $q_{v_i v_i}$ és l'element diagonal i-èsim de Q_{vv} . Si H_{0i}^v és verdadera, W_i es segueix la distribució τ per la mateixa raó indicada abans, és a dir:

$$w_i \sim \tau(r) \quad (24)$$

La distribució τ no s'ha investigat gaire fins ara, atès que encara hi ha problemes específics per resoldre amb la distribució de w_i sota hipòtesis alternatives. Afortunadament, la redundància dels blocs fotogramètrics és gran, de manera que τ pot ésser substituïda per la distribució de Student:

$$\tau(r) \approx t(r) \quad (25)$$

la qual és més fàcil d'emprar.

Els criteris de test w_i són de considerable importància pràctica per *netejar* dades. Donen un procediment força sensible per detectar errors grollers, ja que inclouen via $\hat{\sigma}_{v_i}$ ($q_{v_i v_i}$) l'estructura de la xarxa. Per a sistemes grans com els que són corrents en aerotriangulació, el càlcul estricte de la matriu Q_{vv} completa, o encara que només sigui el dels seus elements diagonals $q_{v_i v_i}$ és molt costós.

Considerant, a més a més, la incertesa en l'assignació de la matriu de pesos P , es justifica la idea d'aplicar una tècnica modificada d'inspecció de dades, tal com ha estat introduïda per GRÜN (1979, 1980c). Basant-se en l'ús de valors aproximats per a q_{vv} derivats de models de fiabilitat interna, s'han comprovat, amb aquest mètode, les coordenades d'imatge de les àrees de test de Jämijärvi i Willunga (citats més endavant, en la secció que tracta dels Estudis Empírics de Precisió).

Criteris de test per a l'avaluació de resultats d'ajustos de blocs

Per a l'avaluació dels resultats dels ajustos de blocs és crucial emprar criteris de test que puguin contestar la pregunta: "el model d'estimació aplicat és correcte o no?" K_{xx} s'ha definit com una mesura de precisió per a la solució $\hat{x}$ (o $\bar{x}$). Però la matriu K_{xx} completa, encara que dona la densitat d'informació més elevada, és una mesura d'exactitud molt complicada i, per tant, ens estimem més mesures de precisió escalars. En investigacions fotogramètriques de blocs de prova, les mitjanes de les variàncies de les coordenades dels punts del terreny ajustats s'utilitzen com a mesures teòriques de precisió (els símbols X , Y , Z fan

referència als vectors de coordenades de punts del terreny, és a dir de subconjunts del vector x de l'equació 1):

$$\sigma_x^2 = \frac{\text{tr}(K_{xx}^x)}{n_{x,y}}, \sigma_y^2 = \frac{\text{tr}(K_{xx}^y)}{n_{x,y}} \quad (26a)$$

$$\sigma_{x,y}^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}, \sigma_z^2 = \frac{\text{tr}(K_{xx}^z)}{n_z} \quad (26b)$$

on $K_{xx}^x, K_{xx}^y, K_{xx}^z$ són les parts de K_{xx} que corresponen a X, Y, Z ; i $n_{x,y}, n_z$ són el nombre de coordenades d' X, Y i Z . Els valors (equacions 26a i 26b) són d'interès pràctic especial, ja que estan relacionats íntimament amb formes quadràtiques dels vectors de diferències de coordenades estimades en els punts de comprovació, tal com ara s'explicarà.

Les diferències entre les coordenades estimades fotogramètricament i les determinades independentment (que se suposen lliures d'errors en comparació amb la precisió fotogramètrica esperada) són:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{X} &= \hat{X} - X \\ \Delta \hat{Y} &= \hat{Y} - Y \\ \Delta \hat{Z} &= \hat{Z} - Z \end{aligned} \quad (27)$$

on $(X^T, Y^T, Z^T)^T$ és el vector de les coordenades veritables i $(\hat{X}^T, \hat{Y}^T, \hat{Z}^T)^T$ és el vector de coordenades fotogramètriques. A causa del fet que els valors veritables X, Y, Z són inclosos a $\Delta \hat{X}, \Delta \hat{Y}, \Delta \hat{Z}$, es poden definir com a estimadors d'exactitud:

$$\bar{\mu}_x^2 = \frac{\Delta \hat{X}^T \Delta \hat{X}}{n_{x,y}}, \bar{\mu}_y^2 = \frac{\Delta \hat{Y}^T \Delta \hat{Y}}{n_{x,y}} \quad (28a)$$

$$\bar{\mu}_{x,y}^2 = \frac{\bar{\mu}_x^2 + \bar{\mu}_y^2}{2}, \bar{\mu}_z^2 = \frac{\Delta \hat{Z}^T \Delta \hat{Z}}{n_z} \quad (28b)$$

Sota les hipòtesis nul·les:

$$H_0^{x,y}: \begin{pmatrix} \Delta \hat{X} \\ \Delta \hat{Y} \end{pmatrix} \sim N(0, K_{xx}^{x,y}) \quad (29a)$$

$$H_0^z: \Delta \hat{Z} \sim N(0, K_{xx}^z) \quad (29b)$$

els estimadors $\bar{\mu}_{x,y}^2, \bar{\mu}_z^2$ són estimadors no-esbiaixats per a les mesures teòriques de precisió $\sigma_{x,y}^2, \sigma_z^2$

$$E(\bar{\mu}_{x,y}^2) = \sigma_{x,y}^2 \quad (30a)$$

$$E(\bar{\mu}_z^2) = \sigma_z^2 \quad (30b)$$

Per tant els "estadístics de la traça" $\bar{\mu}_{x,y}^2$ i $\bar{\mu}_z^2$ (en terminologia de BJERHAMMAR (1960), segons la qual:

$$\begin{aligned} E(\bar{\mu}_{x,y}^2) &= \text{tr}(K_{xx}^{x,y}) / 2n_{x,y} \\ i E(\bar{\mu}_z^2) &= \text{tr}(K_{xx}^z) / n_z \end{aligned}$$

són adequats com a predictors de l'exactitud en la planificació pràctica de projectes i també són útils en investigacions empíriques d'exactitud, tal com es presenten en aquest treball.

Tanmateix, si s'ha de comprovar que $\Delta \hat{X}, \Delta \hat{Y}$ i $\Delta \hat{Z}$ segueixen una llei de distribució normal (o que no la segueixen), els estimadors de màxima versemblança:

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 = \frac{(\Delta \hat{X}^T, \Delta \hat{Y}^T) Q_{xx}^{x,y-1} (\Delta \hat{X}^T, \Delta \hat{Y}^T)^T}{2n_{x,y}} \quad (31a)$$

$$\hat{\mu}_z^2 = \frac{\Delta \hat{Z}^T Q_{xx}^{z-1} \Delta \hat{Z}}{n_z} \quad (31b)$$

són els estimadors millors (vegeu GRÜN, 1980a i MOLENAR, 1978).

Una característica estadística interessant és que sota $H_0^{x,y}$ i H_0^z , els estimadors $\hat{\mu}_{x,y}^2$ i $\hat{\mu}_z^2$ són estimadors no esbiaixats del factor de variància:

$$E(\hat{\mu}_{x,y}^2) = \sigma_{x,y}^2, E(\hat{\mu}_z^2) = \sigma_z^2 \quad (32)$$

Tant $\hat{\mu}_{x,y}^2 / \hat{\sigma}_{x,y}^2$ com $\hat{\mu}_z^2 / \hat{\sigma}_z^2$ segueixen (sota $H_0^{x,y}, H_0^z$) les distribucions de Fisher:

$$T_{x,y} = \frac{\hat{\mu}_{x,y}^2}{\hat{\sigma}_{x,y}^2} \sim F(2n_{x,y}, r) \quad (33a)$$

$$T_z = \frac{\hat{\mu}_z^2}{\hat{\sigma}_z^2} \sim F(n_z, r) \quad (33b)$$

Si les matrius $Q_{xx}^{x,y-1}$ i Q_{xx}^{z-1} , que són les equacions normals reduïdes parcials, es coneixen per a X, Y i Z , llavors l'estimació interval per a X, Y i Z , utilitzant els estimadors (equacions 31a i 31b), es pot fer de forma senzilla.

Considerem un error de tipus I, de magnitud $1-\alpha$ (α és la probabilitat de rebutjar una hipòtesi nul·la veritable); llavors les equacions:

$$T_{x,y} = F(1-\alpha, 2n_{x,y}, r) \quad (34a)$$

$$T_z = F(1-\alpha, n_z, r) \quad (34b)$$

defineixen dos hiperel·lipsoïdes de confiança amb el centre a $(\hat{X}^T, \hat{Y}^T)$ i $\hat{Z}$. Per tant, $1-\alpha$ és la probabilitat que sota $H_0^{x,y}$ i H_0^z respectivament, els valors vertaders $(X^T, Y^T), Z$ siguin dins el seu hiperel·lipsoïde corresponent.

Els estimadors $\hat{\mu}_{x,y}^2, \hat{\mu}_z^2$ es poden comprovar usant els valors crítics $c_{x,y}, c_z$ de les taules de Fisher:

$$P(\hat{\mu}_{x,y}^2 \leq c_{x,y} = \hat{\sigma}_{x,y}^2 F(1-\alpha, 2n_{x,y}, r) / H_0^{x,y}) = 1-\alpha \quad (35a)$$

$$P(\hat{\mu}_z^2 \leq c_z = \hat{\sigma}_z^2 F(1-\alpha, n_z, r) / H_0^z) = 1-\alpha \quad (35b)$$

En contrast amb aquest procediment, l'estimació d'interval per a $(X^T, Y^T)^T$, Z mitjançant l'equació 28b és molt més costosa.

Aproximacions per a les distribucions de $\hat{\mu}_{x,y}^2$, $\hat{\mu}_z^2$ sota $H_0^{x,y}$, H_0^z , les ha donat MOLENAAR (1978):

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 \sim \sigma_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^{x,y})}{2n_{x,y}} F(K_{x,y}, \infty) \quad (36a)$$

$$\hat{\mu}_z^2 \sim \sigma_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^z)}{n_z} F(K_z, \infty) \quad (36b)$$

D'ací, es pot deduir que:

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 \sim \hat{\sigma}_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^{x,y})}{2n_{x,y}} F(K_{x,y}, r) \quad (37a)$$

$$\hat{\mu}_z^2 \sim \hat{\sigma}_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^z)}{n_z} F(K_z, r) \quad (37b)$$

Si els valors propis de $Q_{xx}^{x,y}$, Q_{xx}^z s'escriuen $\lambda_i^{x,y}$ ($i = 1, \dots, 2n_{x,y}$), λ_j^z ($j = 1, \dots, n_z$), llavors els graus de llibertat $K_{x,y}$, K_z s'han de calcular:

$$K_{x,y} = \text{int} \left(\frac{\left(\sum_{v=1}^{2n_{x,y}} \lambda_v^{x,y} \right)^2}{\sum_{v=1}^{2n_{x,y}} (\lambda_v^{x,y})^2} \right) \quad (38a)$$

$$K_z = \text{int} \left(\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_z} \lambda_v^z \right)^2}{\sum_{v=1}^{n_z} (\lambda_v^z)^2} \right) \quad (38b)$$

on int és l'operador de conversió a valors enters.

Els estimadors $\hat{\mu}_{x,y}^2$, $\hat{\mu}_z^2$ poden comprovar-se emprant els valors crítics $\bar{c}_{x,y}$, $\bar{c}_z$:

$$P(\hat{\mu}_{x,y}^2 \leq \bar{c}_{x,y} = \hat{\sigma}_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^{x,y})}{2n_{x,y}} F(1 - \alpha, K_{x,y}, r) / H_0^{x,y}) = 1 - \alpha \quad (39a)$$

$$P(\hat{\mu}_z^2 \leq \bar{c}_z = \hat{\sigma}_0^2 \frac{\text{tr}(Q_{xx}^z)}{n_z} F(1 - \alpha, K_z, r) / H_0^z) = 1 - \alpha \quad (39b)$$

quant més $Q_{xx}^{x,y}$, Q_{xx}^z s'aproximen a múltiples de la matriu unitat, cosa que és més probable si el recolzament és dens que no pas si no ho és, tant més es corresponen els estimadors $\hat{\mu}_{x,y}^2$, $\hat{\mu}_z^2$ amb $\hat{\mu}_{x,y}^2$, $\hat{\mu}_z^2$. Considerem:

$$Q_{xx}^{x,y} = fI \quad (40)$$

on f és un factor escalar i I és la matriu unitat.

Llavors:

$$\text{tr}(Q_{xx}^{x,y}) = 2n_{x,y}f \quad (41)$$

$$K_{x,y} = 2n_{x,y} \quad (42)$$

i

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 \sim \hat{\sigma}_0^2 f F(2n_{x,y}, r) \quad (43)$$

Per a $\hat{\mu}_{x,y}^2$ obtenim:

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 = \frac{(\Delta \hat{X}^T, \Delta \hat{Y}^T) \Delta \hat{X}}{2n_{x,y}f} \quad (44)$$

i, finalment:

$$\hat{\mu}_{x,y}^2 = \frac{\hat{\mu}_{x,y}^2}{f} \sim \hat{\sigma}_0^2 F(2n_{x,y}, r) \quad (45)$$

Per a $f = 1$, les distribucions de $\hat{\mu}_{x,y}^2$ i $\hat{\mu}_z^2$ són idèntiques. Una discussió similar es pot fer per a la coordenada Z .

Per a més detalls, vegeu KOCH, 1975; MOLENAAR, 1978; i GRÜN, 1980a. El càlcul dels estimadors $\hat{\mu}_{x,y}$ i $\hat{\mu}_z$ no va ser possible en aquestes investigacions a causa que, en els llocs usats, les matrius $Q_{xx}^{x,y-1}$, Q_{xx}^{z-1} no es coneixien en aquell moment.

Per causa del fet que els estimadors $\hat{\mu}_{x,y}^2$, $\hat{\mu}_z^2$ integren característiques de precisió i fiabilitat, es poden considerar com a estimadors de l'exactitud i, com a tals, poden ser utilitzats per revisar els resultats d'ajust de blocs de test, tal com es fa a la secció d'Estudis Empírics d'Exactitud.

Estudis empírics d'exactitud

En els darrers anys, s'han realitzat estudis d'exactitud fotogramètrica emprant blocs de test. La majoria d'aquests estudis es basaven més en recolzaments geodèsics d'exactitud insuficient que no pas en mètodes d'aproximació al procés de les dades. Com a conseqüència, l'autèntic nivell d'exactitud fotogramètrica mai no va ésser demostrat. Recentment, però, ROBERTS (1976) i SLAMA (1978) han publicat resultats sorprenents utilitzant sistemes de cambres amb malles de marques superposades (*reseau camera*) i dedicant un esforç considerable a treballs de calibració i de compensació d'errors sistemàtics *a priori*. Encara que els procediments de tractament de les dades aconsellats pels dos autors no poden ésser recomanats com a eficients per a cap projecte, llurs investigacions han demostrat el potencial d'exactitud inherent a la fotogrametria.

Cambra	Àrea	Extensió (km ²)	Recobriment l/t	Núm. d'imatges	Escala de la imatge	Recolzament Precisió (mm)	
						Plan.	Alt.
RMK A2 WA	Jämijärvi	2 x 2	60/60	51	1: 4 000	5	0,6/km
MRB WA	Jämijärvi	2 x 2	60/60	51	1: 4 000	5	0,6/km
RMK AR WA	Willunga	5,8 x 5,8	60/60	48	1:12 700	25	30
RMK AR WA	Kapunda	24 x 24	60/60	81	1:50 000	?	?

Taula 1: Especificacions dels blocs de test

Aplicacions d'alta exactitud exigeixen algunes condicions bàsiques que cal complir:

- Ús de punts senyalitzats.
- Vols amb, com a mínim, un recobriment quadruple, ja sigui amb el 60% de recobriment lateral o amb el 20%, i vols creuats.
- Un recolzament perimetral relativament dens en planimetria i una xarxa relativament densa de punts de recolzament en altimetria.
- La mesura de coordenades imatge, juntament amb la utilització d'un ajust rigorós de blocs per feixos, comptant amb un mètode per a la compensació d'errors sistemàtics (es recomana autocalibració).
- Una estratègia sofisticada de detecció d'errors grollers prou estricta en sentit estadístic, però que no faci gastar temps de càlcul inútilment.

L'aplicació de la tècnica d'autocalibració i dels resultats aconseguits, es descriuen en diverses publicacions (vegeu BROWN, 1976; EBNER, 1976; GRÜN, 1978 i 1980a; i ET AL.). Una estratègia per a la detecció d'errors grollers en l'ajust per feixos ha estat suggerida per GRÜN (1979).

En les seccions que vénen presentarem els resultats de diferents investigacions sobre els blocs de prova, fetes en diferents àrees de test i amb diferents cambres i escales d'imatge, tot i que, respectant les condicions esmentades abans.

La *taula 1* dona els paràmetres dels projectes de Jämijärvi (Finlàndia), i Willunga i Kapunda (Austràlia). Aquest article presenta només els resultats obtinguts amb autocalibració simultània; les comparacions entre calibració de camp i autocalibració es poden trobar a GRÜN (1978, 1980a). Els conjunts de paràmetres addicionals utilitzats foren els ortogonals desenvolupats per EBNER (1976) i GRÜN (1978). Les coordenades imatge varen mesurar amb un estereocomparador Zeiss PSK del Departament dels Territoris (Adelaida, Austràlia), l'Institut de Fotogrametria de la Universitat Tecnològica d'Helsinki (Helsinki, Finlàndia) i la

Càtedra de Fotogrametria de la Universitat Politècnica de Munic (Munic, Alemanya Federal). Els resultats obtinguts per les mesures fetes amb restituïdors analítics (Zeiss Planicomp C100) han estat detallats per EBNER (1979) i per EDER i GRÜN (1980).

Per raons econòmiques, només es varen fer les mesures i càlculs absolutament necessaris. Per tant, els refinaments de les coordenades imatge es varen reduir a:

- Transformació afí (sis paràmetres) utilitzant quatre marques fiducials. Encara que el material de Willunga i Kapunda és del tipus *reseau* i malgrat que les fotos MRB-Jämijärvi tenen una malla als costats (*edge reseau*), només es varen seleccionar els quatre punts centrals dels costats i es varen ignorar tots els altres punts.
- Correcció de la distorsió radial d'acord amb els certificats de calibració de les cambres.
- Correcció de la refracció mitjançant la fórmula de Bertram modificada.

Per a l'ajust per feixos, les coordenades refinades de la imatge es varen suposar no correlacionades i amb igual pes (= 1), mentre que les coordenades del recolzament geodèsic es varen prendre amb pes infinit (lliures d'errors).

En cada cas, es varen utilitzar coordenades de recolzament en el pla secant i fou estalviada la correcció de l'efecte de la curvatura de la terra en les coordenades imatge.

Els paràmetres addicionals es varen tractar com a incògnites lliures (valors no estocàstics). Després de la primera iteració de l'ajust per feixos, es va determinar el nombre de paràmetres addicionals significatiu amb els tests de la *t* de Student (nivell $\alpha:0.05$). En la segona iteració, els paràmetres addicionals no significatius varen quedar exclosos del càlcul.

Les coordenades imatge de Jämijärvi i Willunga van ésser analitzades mitjançant un procés aproximat d'inspecció de dades (*data-snooping*), per tal de per-

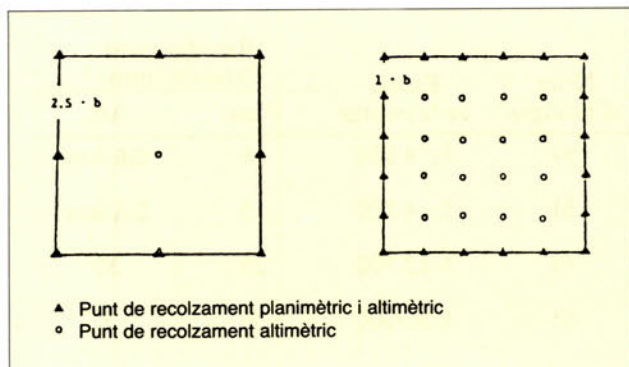


Fig. 1: Distributions del recolzament pels càlculs dels blocs de text de Jämijärvi, Willunga i Kapunda

metre la detecció i eliminació d'errors grollers (compareu amb GRÜN, 1979, 1980c). En cada projecte es varen emprar dos dissenys de recolzament diferents (figura 1). Els resultats de l'ajust s'indiquen a la taula 1. Els estimadors d'exactitud $\bar{\mu}_{x,y}$, $\bar{\mu}_z$ de la taula 2 es donen en micres per independitzar els resultats de l'escala de la foto.

Tal i com demostren els resultats, l'autocalibració fou un èxit, atès que es van aconseguir millores d'exactitud de fins a 2,7 vegades. D'acord amb les expectatives teòriques i l'experiència pràctica, les millores són més grans amb recolzament dispers (vegeu també els experiments previs d'EBNER, 1976 i GRÜN, 1978), una

característica molt atractiva de l'autocalibració. L'aplicació dels quarant-quatre paràmetres addicionals fou possible només amb dades de Jämijärvi (distribució de punts a la imatge tipus 5 x 5); en aquest cas el resultat en altimetria fou millor (factors de millora d'1,2 a 1,6) que els resultats corresponents obtinguts amb dotze paràmetres addicionals (factors de millora d'1,1). Els resultats en planimetria són, però, d'igual exactitud.

És sorprenent que, fins i tot amb el conjunt estès de quaranta-quatre paràmetres addicionals, els coeficients de correlació es mantinguessin més petits que $|r| = 0,5$ (correlació mútua dels paràmetres addicionals i entre aquests i els elements d'orientació exterior). A causa d'aquestes petites correlacions, va ésser admissible el test estadístic de significància dels paràmetres addicionals, basat en el test d'Student unidimensional.

Pot semblar una mica peculiar, en un primer cop d'ull, que, en dos casos entre vint, els resultats obtinguts amb recolzament dispers siguin millors que els corresponents resultats amb recolzament dens (planimetria a Jämijärvi MRB i altimetria a Kapunda RMK). Això s'explica perquè els estimadors $\bar{\mu}_{x,y}^2$, $\bar{\mu}_z^2$ no són, en ells mateixos, valors vertaders, sinó quantitats estocàstiques amb una certa esperança i un rang específic de variació (interval basat en hipòtesis probabilístiques).

Versió de bloc	Versió de calibració	Estimadors de l'exactitud de l'ajust del bloc					Número de punts de comprovació	
		$\hat{\sigma}_0$ [μm]	$\bar{\mu}_{x,y}$ [μm]	Factor ¹	$\bar{\mu}_z$ [μm]	Factor ¹	Plan.	Alt.
JA1 RMK (dens)	0	4,3	2,8	—	5,0	—	100	84
	12APs	3,7	2,3	1,2	4,5	1,1		
	44APs	3,6	2,2	1,3	4,2	1,2		
JA2 RMK (dispers)	0	4,3	3,3	—	7,2	—	112	111
	12APs	3,7	2,5	1,3	6,5	1,1		
	44APs	3,6	2,5	1,3	5,0	1,4		
JA2 RMK (dens)	0	4,3	3,5	—	6,5	—	100	84
	12APs	4,1	2,6	1,4	5,8	1,1		
	44APs	3,8	2,8	1,2	5,0	1,3		
JA2 MRB (dispers)	0	4,1	4,2	—	12,0	—	112	111
	12APs	4,0	2,8	1,5	10,5	1,1		
	44APs	3,8	2,6	1,6	7,5	1,6		
WI1 (dens)	0	5,0	3,7	—	5,6	—	73	59
	12APs	3,5	2,6	1,4	4,4	1,3		
WI2 (dispers)	0	4,7	4,9	—	14,3	—	83	82
	12APs	3,3	2,8	1,8	6,6	2,2		
KA1 (dens)	0	5,45	4,8	—	6,1	—	21	42
	12APs	3,7	3,0	1,6	4,6	1,3		
KA2 (dispers)	0	4,9	8,0	—	7,9	—	37	68
	12APs	3,7	3,0	2,7	4,4	1,8		

JA RMK ... Jämijärvi (RMK A2)
JA RMK ... Jämijärvi (MRB)
WI ... Willunga
KA ... Kapunda

¹ Factor de millora de l'exactitud
0 ... versió zero (ajust convencional sense paràmetres addicionals)
12 APs ... 12 paràmetres ortogonals addicionals (EBNER, 1976)
44 APs ... 44 paràmetres ortogonals addicionals (GRÜN, 1978)

Taula 2: Resultats dels càlculs de Jämijärvi, Willunga i Kapunda

És ben conegut que les mesures de precisió (equació 26b) gairebé assoleixen el seu límit quan l'interval de recolzament val $i = 2b$. Una reducció d' i no donarà millores significatives en X, Y i Z la millora serà més baixa del 15%).

Per tant, si l'estimador $\bar{\mu}^2$ del recolzament dispers s'escriu $\bar{\mu}^2_{(S)}$ i el recolzament dens s'escriu $\bar{\mu}^2_{(D)}$, obtenim l'aproximació següent, per a les nostres distribucions de recolzament ($i = b$, $i = 2,5b$):

$$E(\bar{\mu}^2_{(S)}) \approx E(\bar{\mu}^2_{(D)}) \quad (46)$$

tant per a planimetria com per a altimetria.

A més a més, cal esperar que l'interval per $\bar{\mu}^2$ s'eixampli a mida que la quantitat de recolzament decreixi. Per consegüent no pot sorprendre'ns que, en els nostres exemples, els estimadors empírics d'exactitud obtinguts amb recolzament dispers puguin ésser més petits que els obtinguts amb recolzament dens. Malauradament, l'estimació d'interval correcta per a $\bar{\mu}^2_{x,y}$, $\bar{\mu}^2_z$ esdevé força cara, tal com s'ha demostrat en el capítol anterior i, per tant, no es va fer en aquesta investigació.

El nivell total d'exactitud és excepcionalment alt i molt consistent. Calculant la mitjana dels resultats de tots els projectes, obtenim, com a mesures empíriques d'exactitud:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{x,y} &= 2,6 \mu\text{m} \\ \bar{\mu}_z &= 4,5 \mu\text{m}\end{aligned}$$

amb recolzament dens,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{x,y} &= 2,7 \mu\text{m} \\ \bar{\mu}_z &= 5,9 \mu\text{m}\end{aligned}$$

amb recolzament no dens.

A l'escala de la imatge [μm]	Jämijärvi 1:4 000 [cm]	Willunga 1:12 700 [cm]	Kapunda 1:50 000 [cm]
$\bar{\mu}_{x,y}$	2,6	3,3	13
$\bar{\mu}_z$	4,5	5,7	22,5

Taula 3: Valors empírics d'exactitud mitjans, referits al sistema terreny

Utilitzant un valor major mitjà $\hat{\sigma}_0 = 3,6 \mu\text{m}$ (vegeu taula 2), obtenim, per a la versió amb control dens:

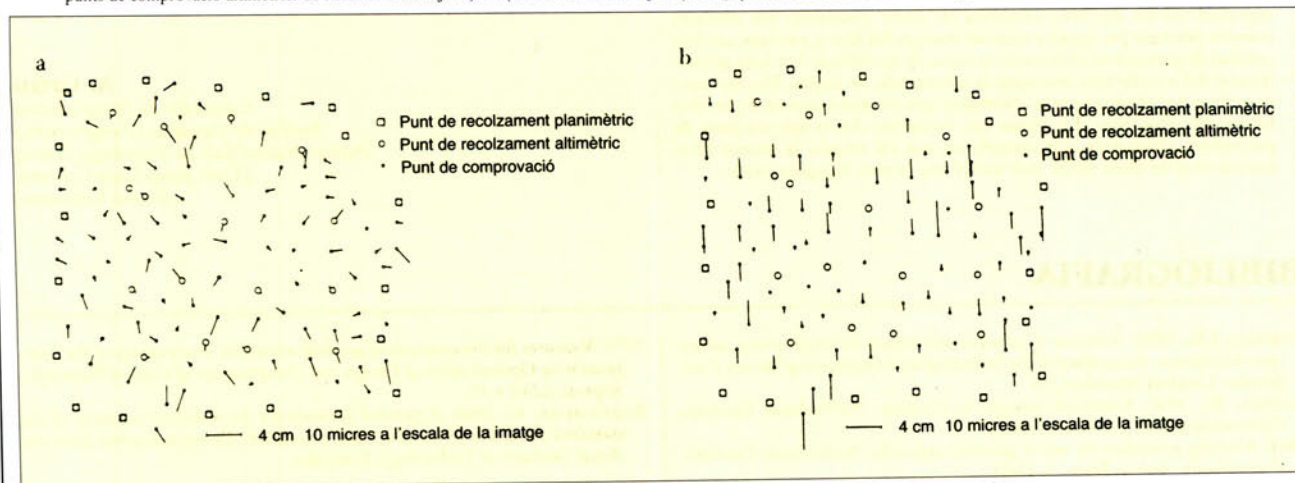
$$\frac{\bar{\mu}_{x,y}}{\hat{\sigma}_0} = 0,7 \quad \frac{\bar{\mu}_z}{\hat{\sigma}_0} = 1,2$$

la qual cosa coincideix suficientment amb les expectatives de precisió presentades per EBNER ET AL (1977).

Els termes *dens* ($i = 1b$) i *dispers* ($i = 2,5b$) són relatius i fan referència a les distribucions de recolzament que normalment es fan servir per a projectes de cadastre, consolidació de terres i densificació de xarxes a Europa. Si en àrees extenses s'han d'utilitzar distribucions encara menys denses, llavors cal considerar un nivell d'exactitud més reduït. Es poden obtenir predictors de precisió adequats per a projectes pràctics a partir de models sintètics de precisió (EBNER ET AL 1977).

Convertint els valors mitjans d'exactitud obtinguts en cada projecte individual, des del sistema imatge al sistema terreny, es pot demostrar el gran nombre d'exigències que cal demanar a un recolzament geodèsic planimètric de precisió (taula 3). L'exactitud mitjana en altimetria de $\bar{\mu}_z = 4,5 \mu\text{m}$ i correspon al 0,03% de l'escala de vol, el qual també és un bon nivell d'exactitud. Els residus en els punts de comprovació, il·lustrats a les figures 2 i 3 per les àrees de test de Jämijärvi (RMK) i Willunga, semblen prou aleatoris per

Fig. 2: a) Residus en els punts de comprovació planimètrics de l'àrea de test de Jämijärvi (versió de recolzament JA1 (RMK), paràmetres addicionals: 44 ortogonals; b) Residus en els punts de comprovació altimètrics de l'àrea de test de Jämijärvi (versió recolzament JA1 (RMK), paràmetres addicionals: 44 ortogonals)



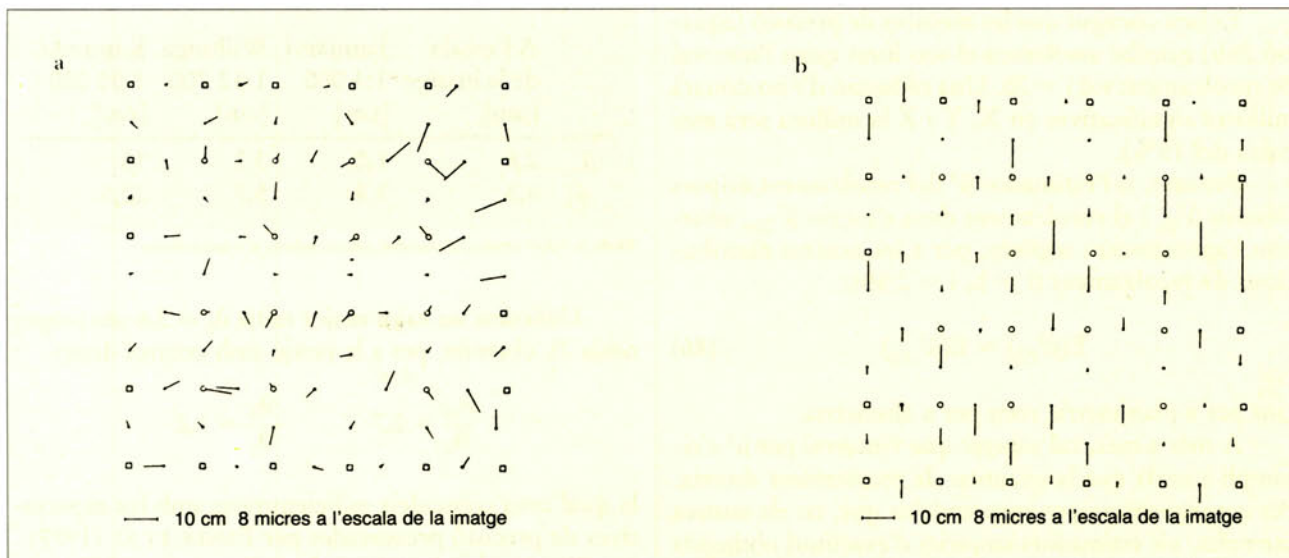


Fig. 3: a) Residus en els punts de comprovació planimètrics de l'àrea de test de Willunga (versió de recolzament W11, paràmetres addicionals: 12 ortogonals); b) Residus en els punts de comprovació al·timètrics de l'àrea de test de Willunga (versió de recolzament W11, paràmetres addicionals: 12 ortogonals)

indicar el correcte funcionament de *paràmetres addicionals globals per a tot el bloc*².

Conclusions finals

Queda demostrat empíricament que es poden obtenir exactituds de coordenades fotogramètriques de $\bar{\mu}_{x,y} = 2,5 \mu\text{m}$ per planimetria i de $\bar{\mu}_z = 4,5 \mu\text{m}$ per altimetria ($= 0,03\%$ de l'alçada de vol). Aquests valors es van obtenir amb un mínim d'esforç i cost, mitjançant l'ajust per feixos amb autocalibració. L'ús d'un control relativament dens ($i \approx 2b$) i 60/60% de recobriments, juntament amb un conjunt sofisticat de paràmetres addicionals és indispensable per assolir rutinàriament aquests alts nivells d'exactitud.

Nota

2. (N. del T): En l'original *bloc-invariant additional parameters*. Aquesta expressió vol dir que hom considera els errors sistemàtics per eliminar, comuns (afectant per igual) a totes les imatges del bloc i, per tant, un únic conjunt de paràmetres addicionals és capaç de modelitzar-los. Una generalització del mètode *bloc-invariant* és anomenada, en anglès, *bloc-variant* i hom l'usa per eliminar errors sistemàtics que afecten només una part dels fotogrames d'un bloc. En aquest cas, existeixen dos o més conjunts de paràmetres addicionals. Un exemple en què cal emprar la tècnica *bloc-variant* és el de blocs volats amb més d'una cambra fotogramètrica.

Aquests nivells d'exactitud coincideixen amb les expectatives teòriques i, per tant, no són sorprenentment alts, tot i que permeten que la fotogrametria analítica s'estengui a nous camps d'aplicació –tals com la densificació de xarxes, la topografia cadastral i moltes altres àrees d'aplicació– que tenen la tasca de donar coordenades a punts del terreny en zones urbanes i rurals.

Els valors citats s'han de considerar com a estàndards fotogramètrics d'exactitud, reals i repetibles. Depèn de les institucions responsables, autoritats i companyies privades, utilitzar aquest potencial d'exactitud per obtenir eines més econòmiques per a la determinació de punts.

Data de recepció de l'original: 09.87

A. Grün

Catedràtic de Fotogrametria
Institut de Geodèsia i Fotogrametria
Institut Federal Suís de Tecnologia (Zurich)
[Trad. Josep Lluís Colomer
i Ismael Colomina]

BIBLIOGRAFIA

- ALBERDA, J.E., 1980. A review of analysis techniques for engineering survey control schemes. *Proceeding of the Industrial and Engineering Survey Conference*. Londres, setembre 2-4.
- BAARDA, W., 1967. *Statistical concepts in Geodesy*. Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, Núm. 4. Delft.
1968. *A testing procedure for use in geodetic networks*. Netherlands Geodetic Commission. Vol. 2, Núm. 5. Delft.
1977. *Measures for the accuracy of geodetic networks. Proceedings of the Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks*. Sopron, juliol 4-10.
- BJERHAMMAR, A., 1960. A general formula for an unbiased estimate of the standard deviation of a triangulation network. *Communications from the Royal Institute of Technology*, Estocolm.

- BROWN, D.C., 1976. *The bundle adjustment - progress and prospects. Invited paper to the XIIIth Congress of the ISP, Commission III, Helsinki.*
- EBNER, H., 1976. *Self calibrating block adjustment. Invited paper to the XIIIth Congress of the ISP, Commission III, Helsinki.*
1979. *The accuracy potential of the analytical plotter zeiss-planicom C 100 in bundle triangulation with simultaneous self-calibration. Papers written in honor of the 70th birthday of Prof. L. Solaini, Politecnico di Milano, Istituto di Topografia, Fotogrammetria e Geofisica.*
- EBNER, H.; KRACK, K.; SCHUBERT, E., 1977. *Accuracy models for bundle block triangulation. Bildmessung und Luftbildwesen 45, Alemania.*
- EBER, K.; GRÜN, A., 1980. *Compensation of systematic image errors with bundle block adjustment using zeiss-planicom C 100 data. In Contributions to the ISP WG III/3 Seminar, Aalborg, Denmark. Helsinki University of Technology. Maig 17-18, 1979.*
- FÖRSTNER, W., 1979. *On internal and external reliability of photogrammetric coordinates. Paper presented to the ACSM-ASP Meeting, Washington, D.C., Març 1979.*
1980. *The theoretical reliability of photogrammetric coordinates. Paper presented to the XIVth Congress of the ISP, Commission III. Hamburg.*
- GRAYBILL, A.G., 1961. *An introduction to linear statistical models. Vol. I, McGraw Hill, Nova York, Toronto, Londres.*
- GRÜN, A. 1978. *Experiences with self-calibrating bundle adjustment. Paper presented to the ACSM-ASP Convention, Washington, D.C., febrer/març 1978.*
1979. *Gross error detection in bundle adjustment. Paper presented to the Aerial Triangulation Symposium in Brisbane. Austràlia, octubre 15-17, 1979.*
- 1980a. *Self-calibration versus testfield calibration (results from Jämijärvi, Willunga and Kapunda testfields). In: Contributions to the ISP WG III/3 Seminar, Aalborg, Denmark. Helsinki University of Technology. Maig 17-18, 1979.*
- 1980b. *Precision and reliability of close-range photogrammetry. Invited paper to the XIVth Congress of the ISP, Commission V. Hamburg.*
- 1980c. *On the internal reliability of aerial triangulation bundle systems. Presented paper to the XIVth Congress of the ISP, Commission III, Hamburg.*
- KOCH, K.R., 1975. *Distributions of probabilities for statistical reviews of adjustment results. In German. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Nr. 38.*
- MOLENAAR, M., 1978. *Essay on empirical accuracy studies in aerial triangulation. ITC Journal 1978-1, pàgs. 81-103.*
1980. *S-transformations and artificial covariance matrices in photogrammetry. Paper presented to the XIVth Congress of the ISP, Commission III. Hamburg.*
- POPE, A., 1975. *The statistics of residuals and the detection of outliers. Paper presented to the XVIth General Assembly of the IAG. Grenoble.*
- ROBERTS, R.G., 1976. *Tests of bundle block adjustment for survey co-ordination. Paper presented to the XIIIth Congress of the ISP, Commission III. Helsinki.*
- SLAMA, CH., 1978. *High precision analytical photogrammetry using a special reseau geodetic lens cone. Paper presented to the ISP Symposium of Commission III, Moscou.*

INSTRUMENTOS Y SISTEMAS
PARA GEODESIA, TOPOGRAFIA,
FOTOGRAMETRIA Y MEDICIONES
INDUSTRIALES Y MILITARES



INGEO SA

Gran Vía Corts Catalanes, 289
E-08014 BARCELONA

DELEGACION MADRID

INGEO SA
Príncipe de Vergara, 112-3.º E.
E-28002 MADRID
Tel. 91/411 00 12 - Telex 48913 elin

Teléfono 93/431 50 00
Telex 98828 igeo

SERVICIO TECNICO

INGEO SA
Miguel Yuste, 12
E-28037 MADRID
Tels. 91/204 89 07 - 204 40 70

