

Sistemes terrestres de referència per a posicionament geodèsic

Sergio González López

Universitat Politècnica de Catalunya

La figura de la Terra

El problema que la geodèsia vol resoldre, plantejant i suplementant la primera definició de Helmert: “Geodèsia és la ciència de mesurar i cartografiar la superfície terrestre” [1], es pot descriure de la manera següent: El problema de la geodèsia és determinar la figura (forma i dimensions) de la Terra i el seu camp gravífic exterior, juntament amb les seves variacions temporals.

És a dir, es tracta d'un problema amb una formulació geomètrica (forma) i una formulació física (camp gravífic) que, a més, estan relacionades.

Per descriure la forma real de la Terra, es tria un conjunt finit de punts representatius del terreny, se senyalen i es determinen les seves posicions en un sistema de coordenades. Aquest conjunt de punts, una xarxa geodèsica, és diferent segons el tipus de posició determinat. Ha estat tradició fins ara separar el component altimètric del planimètric, perquè es necessiten observacions diferents segons cada cas. D'aquesta manera, s'estableixen xarxes verticals i xarxes horitzontals separades, que es complementen per proporcionar la posició d'un punt a l'espai.

Més interessant és treballar amb una xarxa de punts la posició espacial de la qual és coneguda en un sistema tridimensional. Es pot establir aquest tipus de xarxa combinant els dos tipus de xarxes tradicionals o bé amb tècniques geodèsiques de posicionament tridimensional.

La superfície irregular de la Terra sòlida no és representable per una equació simple i, per això, es representa com un conjunt de punts mitjançant l'ús de coordenades: la Terra es representa, en definitiva, mitjançant un poliedre. Malgrat això, les superfícies oceàniques (aproximadament un 70% del total) tenen un principi de formació més simple que les superfícies sòlides. Sota certes hipòtesis formen part d'una superfície equipotencial del camp gravífic terrestre. Aquesta superfície equipotencial completa (oceans i l'estesa

sota les terres emergides) sovint s'identifica com la forma matemàtica de la Terra [1], el geoide, a què es refereix Gauss: “El que anomenem la superfície de la Terra en el sentit geomètric no és res més que aquella superfície que intersecta en cada punt la direcció de la gravetat en angle recte, part de la qual coincideix amb la superfície dels oceans”. En aquest sentit, el geoide té un significat físic elemental, però una representació geomètrica d'una complexitat enorme. Això fa inadequat que s'utilitzi com a superfície de referència en el cas de les xarxes horitzontals i, per tant, apareix la necessitat dels models terrestres matemàticament senzills.

Esferes i el·lipsoides. Aspectes històrics

Models esfèrics

Deixant de banda els models terrestres esotèrics, ja Pitàgores i Aristòtil sospitaven que la Terra tenia forma esfèrica. El precursor de la geodèsia científica és Eratòstenes d'Alexandria (276-195 aC), el qual, suposant que la Terra tenia forma esfèrica i realitzant mesures astronòmiques i sobre la superfície terrestre, va ser capaç d'obtenir un valor per al radi terrestre. La seva tècnica és sumament senzilla (*figura 1*). Eratòstenes va observar que, el migdia del dia del solstici d'estiu, els raigs solars il·luminaven el fons d'un pou a Siena (avui Assuan). Al mateix temps, a Alexandria el Sol estava lleugerament més a prop de l'horitzó. Mesurant la longitud de l'ombra d'una vareta a Alexandria, Eratòstenes va mesurar la distància zenital del Sol $z=1/50$ de circumferència. Suposant que Siena es trobava exactament al sud d'Alexandria, va deduir que l'angle format per les verticals de tots dos llocs també és $1/50$ de circumferència. Llavors, només cal mesurar la distància entre Siena i Alexandria i multiplicar-la per 50 per obtenir un valor de la circumferència terrestre. És difícil

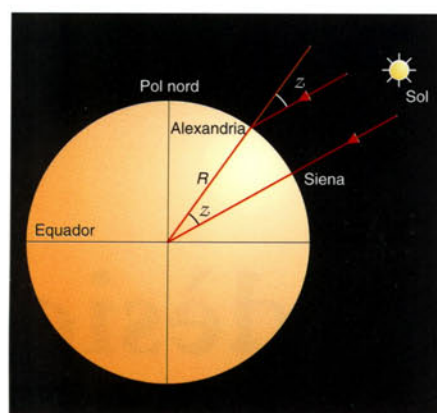


Figura 1: Determinació del radi de la Terra per Eratòstenes

establir en termes d'unitats de mesura modernes quin va ser el radi terrestre obtingut i la seva precisió, però no hi ha cap dubte que aquesta primera determinació de la mida de la Terra és una fita històrica que va tardar diversos segles a ser superada.

Fins al segle XVII, les mesures d'arc basades en una Terra esfèrica es van millorar mitjançant la introducció de noves tècniques instrumentals (ulleres de llarga vista) i metodològiques (triangulació). El 1615, la triangulació dirigida per Snellius als Països Baixos introdueix el concepte de mesures geodèsiques de precisió [2].

Models el·lipsoïdals

Durant el segle XVII, s'introdueixen noves observacions i idees provinents de l'astronomia i de la física que influeixen decisivament en el concepte de la figura de la Terra. Fonamentalment, Newton postula una forma el·lipsoïdal per a la Terra, per a la qual cosa utilitza la seva teoria de la gravetat i mesures molt precises realitzades amb pèndols. En definitiva, Newton va obtenir un el·lipsoide de revolució com a figura d'equilibri per a una Terra homogènia, líquida i rotacional basada en la validesa de la llei de la gravitació universal. La raó de la diferència entre la longitud del radi equatorial i el radi polar al radi equatorial és el que s'anomena aplanament de l'el·lipsoide f . El valor obtingut per Newton és $f=1/230$.

La controvèrsia que va provocar una afirmació com aquesta, va conduir a una desaforada carrera per comprovar-ne la validesa, la qual cosa preocupava més a d'altres que al mateix Newton. Cassini, com a resultat d'unes mesures errònies, va arribar a conclusions contradictòries en el sentit d'obtenir, per a la Terra, un el·lipsoide allargat en els pols en lloc d'aplanat. El debat científic suscitat no va concloure fins que l'Acadèmia de Ciències de París va organitzar dues expedicions a Lapònia i Perú per tal de realitzar mesures d'arc de meridià en zones properes al pol i a l'equador. Els resultats van confirmar la certesa de l'afirmació de Newton. Des d'aquell moment i fins ara, l'el·lipsoide de revolució és un model matemàtic comunament acceptat per aproximar la superfície de la Terra.

Posicionament geodèsic i sistemes de referència

Qualsevol fenomen o mesura sobre la superfície terrestre ha d'anar acompanyat de la seva posició. La determinació de les coordenades d'un punt a l'espai és el que sol anomenar-se posicionament. El problema del posicionament és obtenir les coordenades d'un punt a partir de mesures del punt a determinats cossos celestes

(naturals o artificials) i de les coordenades d'aquests cossos.

Per tant, podem veure que l'escenari en què es produeixen les mesures i els moviments del punt d'observació i els punts observats ha d'estar ben referit per garantir la coherència de les observacions i els resultats.

Com que el problema formulat és de caràcter espacial, un sistema de referència cartesià tridimensional global pot ser un sistema adequat per treballar. Sent les coordenades cartesianes molt convenientes per al càlcul, no són les coordenades utilitzades històricament.

Ja hem vist la possibilitat d'aproximar la superfície de la Terra mitjançant un el·lipsoide de revolució, que funciona com a model geomètric localitzant sobre seu els punts per mitjà d'un parell de coordenades curvilínies (latitud i longitud). Sobre aquest el·lipsoide es poden calcular distàncies i azimuts amb una gran precisió. Malgrat això, la superfície de la Terra és substancialment diferent i la separació entre la superfície real i el model geomètric no té gaire importància mentre que es mantinguin separades les xarxes horitzontals de les verticals.

Això ja no passa amb el progrés de la geodèsia espacial, que pot proporcionar informació tridimensional i fer que s'hagin de combinar les altituds definides geomètricament (cotes el·lipsoïdals, referides a l'el·lipsoide) amb les altituds de tipus físic (cotes ortomètriques referides al geoide).

Un altre problema que s'ha d'afrontar és el dels diferents el·lipsoïdes emprats en el posicionament geodèsic, el·lipsoïdes geocèntrics globals i el·lipsoïdes geoexcèntrics locals. Per sort, el sistema geodèsic WGS84 és el que defineix un únic el·lipsoide global, mentre que en diferents zones de la Terra s'adopta un el·lipsoide local geoexcèntric que s'adapta millor al geoide a la zona considerada.

Tot això dóna lloc a la formulació d'equacions que permeten localitzar el mateix punt en diferents sistemes de coordenades, ja que, si bé la utilització de coordenades cartesianes globals és còmoda, de vegades també es necessiten coordenades geodèsiques globals, o convé tenir els punts localitzats en el sistema local en què es basa la cartografia oficial.

Els sistemes de referència que veurem aquí seran els sistemes terrestres en els quals es puguin localitzar els punts d'observació.

Sistemes de coordenades en el camp gravifcoterrestre. Coordenades naturals

El potencial gravitatori V es pot expressar (figura 2):

$$V(P) = V(X, Y, Z) = G \iiint_T \frac{\rho(Q)}{l} dv_Q \quad (1)$$

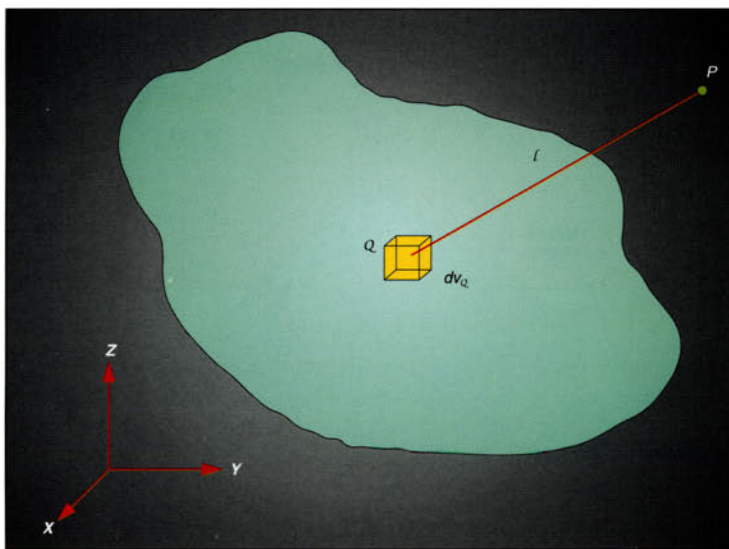


Figura 2: Potencial d'un cos sòlid

on P és un punt de coordenades (X, Y, Z) , Q és el punt variable a la Terra T , on es troba l'element diferencial de volum dv_Q , l és la distància entre P i Q , $\rho(Q)$ és la densitat a Q i G és la constant de gravitació universal.

Aquesta representació del potencial només té un valor teòric, ja que la seva aplicació pràctica requereix el coneixement de la densitat en qualsevol punt de l'interior de la Terra.

Per a grans distàncies,

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2)$$

el potencial (1) es pot expressar com:

$$V = \frac{GM}{r} + O(r^2) \quad (3)$$

que ve a dir que a gran distància un cos es comporta, des d'un punt de vista gravitatori, aproximadament com una massa puntual.

Entenem per potencial gravífic W la suma del potencial gravitatori V i el potencial centífug V_c , de manera que:

$$W(X, Y, Z) = V(X, Y, Z) + \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) \quad (4)$$

on ω és la velocitat angular de la rotació terrestre.

El vector gravetat $\mathbf{g}$ és el gradient del potencial gravífic W :

$$\mathbf{g} = \nabla W = \begin{pmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{pmatrix} \quad (5)$$

els components del qual són les derivades parcials de W respecte de X, Y, Z .

La magnitud del vector gravetat $\mathbf{g}$ és la gravetat g , i la seva direcció, representada pel vector unitari:

$$\mathbf{n} = - \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (6)$$

és la direcció de la vertical.

Immers en el camp gravificoterrestre, es pot definir un sistema de coordenades relacionat amb el vector gravetat que sol anomenar-se sistema natural (figura 3):

- la latitud astronòmica Φ és l'angle que formen el pla equatorial i la direcció de la línia de força del camp gravífic a P (direcció del vector gravetat $\mathbf{g}$);
- la longitud astronòmica Λ és l'angle que formen el meridià origen i el meridià de P , i
- el potencial gravífic W permet situar el punt P en el sistema de superfícies equipotencials.

Les determinacions astronòmiques de posició proporcionen la latitud Φ i la longitud Λ , i d'aquesta manera permeten establir la direcció de la vertical a P . Quant al potencial W , no es pot determinar de manera directa, encara que si es combina anivellament amb mesures de la gravetat es poden obtenir diferències de potencial, de manera que les coordenades naturals de P es determinen pel potencial respecte a una superfície de nivell escollida com a origen, per exemple, el geoide ($W=W_0=\text{cte}$).

En aquest sistema de coordenades naturals, llavors la posició del punt P queda determinada per la intersecció de les superfícies coordenades $\Phi=\text{cte}$, $\Lambda=\text{cte}$ i $W=\text{cte}$ o la intersecció de les tres línies coordenades: paral·lel astronòmic (línia Λ), meridià astronòmic (línia Φ) i línia isozenital (línia W).

Una definició alternativa de les coordenades naturals es materialitza en el triplet (Φ, Λ, H) . Si P és un punt de la superfície terrestre, la línia de força del camp gravífic que passa per P talla el geoide a P_0 . La distància de P a P_0 mesurada al llarg de la línia de força és la cota ortomètrica H (figura 4).

La cota ortomètrica H està relacionada amb la diferència de potencial (o cota geopotencial), mitjançant l'equació:

$$C = W_0 - W = \int_0^H g dH \quad (7)$$

Figura 3: Coordenades naturals

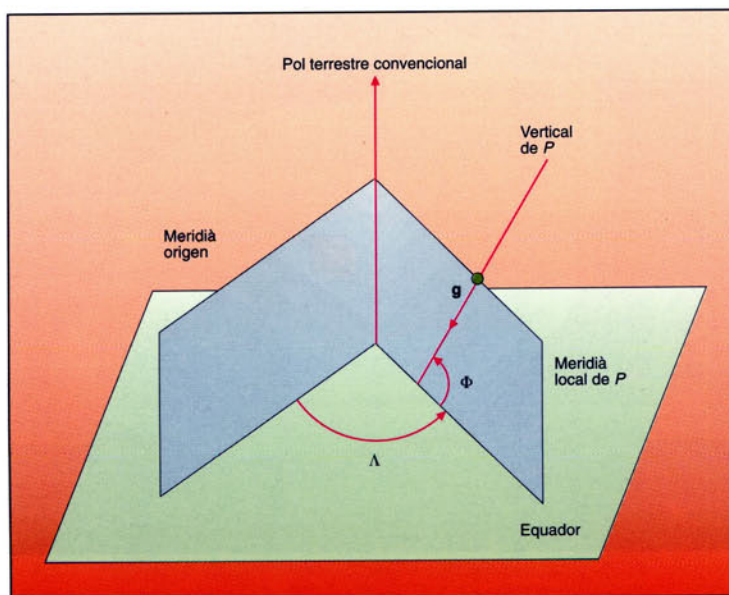


Figura 4: Cota ortomètrica

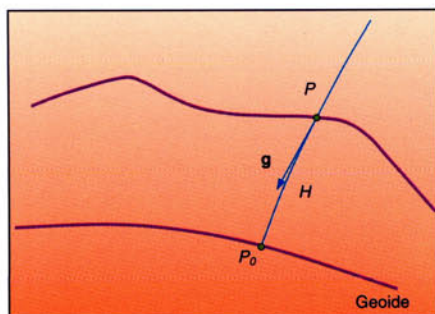
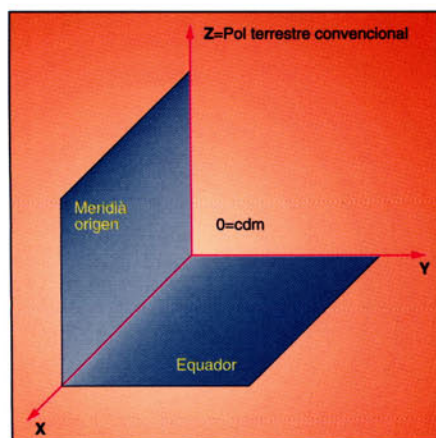


Figura 5: Sistema de referència cartesià global



Sistema cartesià tridimensional global

Es tracta d'un sistema cartesià geocèntric (figura 5), amb l'origen al centre de masses de la Terra, l'eix **Z** coincident amb l'eix de rotació terrestre convencional positiu cap al pol nord (pol terrestre convencional, CTP), els eixos **X** i **Y** en el pla de l'equador, i **X** passant pel meridià de Greenwich i **Y** formant triedre directe amb **X** i **Z**.

A aquest triedre cartesià s'hi associa un el·lipsoide geocèntric, orientat de manera que els seus eixos coincideixin amb els eixos cartesianes **XYZ**.

Un punt en aquest sistema es localitza mitjançant el vector $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^t$.

El·lipsoide de referència.

Coordenades geodèsiques

Si en lloc de considerar el geode com una superfície de referència, considerem un el·lipsoide de revolució de semieixos *a* i *b* centrat en el geocentre, les coordenades naturals associades a aquest són les coordenades geodèsiques (φ, λ, h) definides de la manera següent (figura 6).

La latitud geodèsica φ , angle mesurat sobre el pla merididià de *P* entre el pla equatorial de l'el·lipsoide i la normal a l'el·lipsoide a *P*; la longitud geodèsica, λ , angle mesurat sobre el pla equatorial entre el meridià origen (eix **X** del sistema cartesià geocèntric) i el pla merididià de *P*; l'altitud geodèsica, *h*, distància mesurada sobre la normal a l'el·lipsoide a *P* entre el punt *P* i l'el·lipsoide.

- Sistema de referència WGS84

El sistema de referència WGS84 (*World Geodetic System 1984*) és un sistema global, basat en l'el·lipsoide de la *International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) Geodetic Reference System 1980 (GRS80)*. L'el·lipsoide WGS84 està format per un semieix major $a=6\,378\,137$ m i un aplanament $f=1/298.257\,223\,563$. El sistema de referència WGS84 és la materialització d'un sistema terrestre convencional

(CTS) segons les indicacions del Bureau International de l'Heure (BIH), establert a partir de les coordenades de més de 1 500 estacions del US Navy Navigation Satellite System repartides per tot el planeta. El sistema WGS84 també inclou una descripció del camp gravitatori, mitjançant desenvolupament en harmònics esfèrics fins al grau i ordre 180.

En aquest sistema global s'ofereixen les posicions dels satèl·lits de la constel·lació NAVSTAR per localitzar punts mitjançant tècniques GPS (*Global Positioning System*). D'aquí es dedueix immediatament que aquest també és el sistema en què s'obtenen les posicions dels punts on s'ha estacionat.

Coordenades locals

Un el·lipsoide de referència global és, sens dubte, una estructura plena d'avantatges. Malgrat això, la cartografia i la geodèsia oficial en cada país adopta com a el·lipsoide de referència (com a resultat d'herències històriques), aquell que s'adapta millor per a la zona considerada, sense necessitat de consideracions globals. Un el·lipsoide amb aquestes característiques acompanyat d'una superfície de referència per a cotes ortomètriques és el que s'anomena datum geodèsic.

Es necessiten vuit paràmetres per definir un datum geodèsic: dos paràmetres per a la forma i dimensions de l'el·lipsoide, tres per a la seva localització espacial i uns altres tres per a la seva orientació. La definició se sol fer adoptant un el·lipsoide de manera particular, i fixant un punt d'origen, l'azimut d'una direcció en aquest punt i la desviació de la vertical en aquest punt.

Aquest tipus de sistemes de referència, basat en un el·lipsoide geoexcèntric (figura 7) és el que anomenem (**xyz**) en el cas que sigui un sistema cartesià tridimensional.

El sistema reglamentari al nostre país és l'ED50 (*European Datum 1950*), basat

en l'el·lipsoide de Hayford i amb origen a Potsdam. En altres països, el datum adoptat és un altre i la conveniència d'unir els diferents datums, a més de la utilització de sistemes de posicionament per observació de satèl·lits artificials, va dur a la implantació de sistemes de referència geodèsics globals. La sèrie d'aquests ha conduït fins a l'actual sistema WGS84.

Coordenades naturals i coordenades geodèsiques globals

La desviació de la vertical astronòmica i la normal el·lipsoïdal es representa mitjançant dos petits angles ξ , η anomenats components de la desviació relativa de la vertical (figura 8).

A la figura, el zenit astronòmic és Z (coordenades Φ , Λ), Z' és el zenit geodèsic (coordenades φ , λ), i se'n desprèn l'expressió per als components de la desviació de la vertical:

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi\end{aligned}\quad (8)$$

De la mateixa manera, la figura 9 mostra una aproximació suficient que, sent N l'ondulació del geoida, s'obté:

$$N = h - H \quad (9)$$

Les dues equacions anteriors relacionen les coordenades geodèsiques i les coordenades naturals a través de la desviació de la vertical i l'ondulació del geoida.

Coordenades cartesianes i coordenades geodèsiques

Es poden calcular coordenades geodèsiques referides a l'el·lipsoide geocèntric a partir de les coordenades cartesianes X , Y , Z , i viceversa (figura 6).

Es tracta d'invertir les equacions que proporcionen les coordenades cartesianes geocèntriques a partir de les coordenades geodèsiques:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (v+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (v(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{pmatrix} \quad (10)$$

on v és el radi de curvatura de la secció normal a l'el·lipsoide perpendicular al meridià (gran normal), φ és la latitud geodèsica, λ la longitud geodèsica i h la cota el·lipsoïdal.

Per a la inversió d'aquestes equacions, es pot procedir de maneres diferents [3], amb expressions recurrents o tancades; per exemple, una formulació tancada és [3, 4]:

$$\begin{aligned}p &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{Za}{pb} \\ \varphi &= \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e'^2 a \cos^3 \theta} \\ \lambda &= \arctan \frac{Y}{X} \\ h &= \frac{p}{\cos \varphi} - v\end{aligned}\quad (11)$$

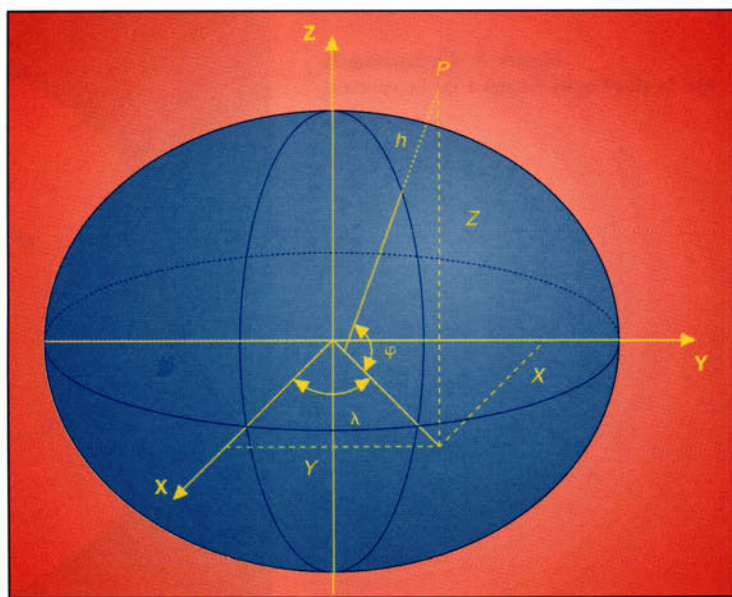


Figura 6: Coordenades cartesianes i coordenades geodèsiques

on a i b són els semieixos de l'el·lipsoide, p i θ són variables auxiliars i e' és la segona excentricitat de l'el·lipsoide.

Sistemes globals i sistemes locals

La figura 10 mostra el sistema de referència (XYZ), relacionat amb el sistema (xyz) mitjançant el vector de transformació $T = (T_1, T_2, T_3)$ entre els orígens dels dos sistemes de referència i les petites rotacions (ϵ , ψ , ω) al voltant dels eixos (x , y , z), respectivament. L'equació de transformació expressada en el sistema de referència (XYZ) serà:

$$T + (1+k)R_x - X = 0 \quad (12)$$

on $1+k$ és el factor d'escala entre els dos sistemes i R és el producte de tres matrius de rotació:

$$R = R_3(\omega)R_2(\psi)R_1(\epsilon) \quad (13)$$

Aquest seria un possible model. Defineix la relació entre els dos sistemes

Figura 7: Representació 2-D dels el·lipsoïdes global i local

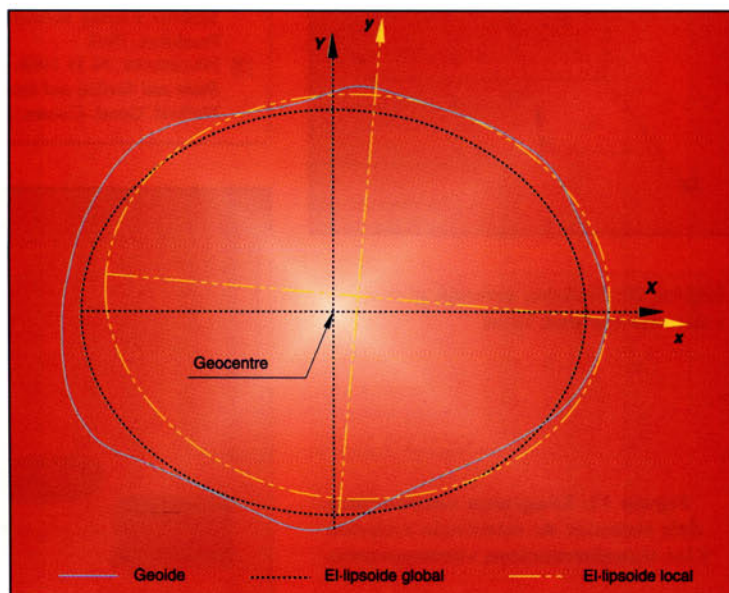


Figura 8: Components de la desviació relativa de la vertical

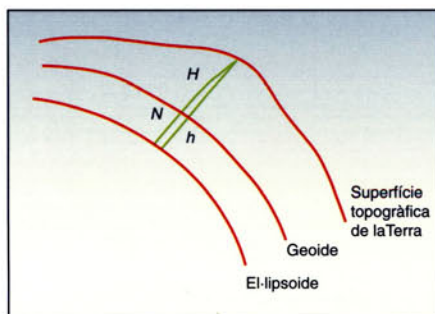
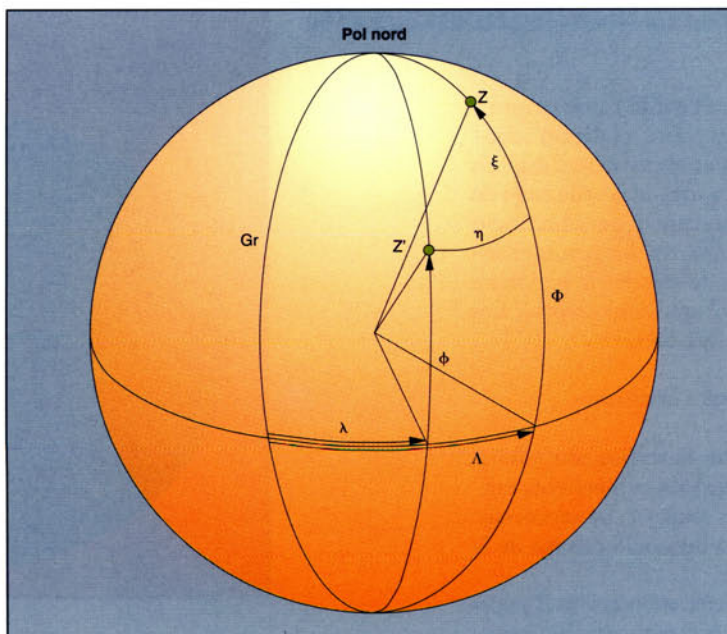


Figura 9: Cota ortomètrica, cota el·lipsoïdal i ondulació del geoide

en termes d'una transformació de semblança de Helmert amb set paràmetres ($T_1, T_2, T_3, k, \epsilon, \psi, \omega$) i, ja que les rotacions involucrades són molt petites, es pot simplificar (13):

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 & \epsilon \\ \psi & -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

i portant (14) a (12), i negligint termes de segon ordre, el model queda:

$$\mathbf{T} + \mathbf{x} + k\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Conclusions

Assumida la necessitat de sistemes de referència perfectament definits per al posicionament geodèsic, s'han inclòs aquí definicions i equacions de transformació entre diferents sistemes. Això s'ha fet contemplant problemes de transformació de coordenades entre sistemes de referència d'una mateixa família i transformacions entre famílies de sistemes de referència amb diferents posicions i orientacions. El diagrama commutatiu de la figura 11 presenta d'una manera gràfica els sistemes i les transformacions estudiades.

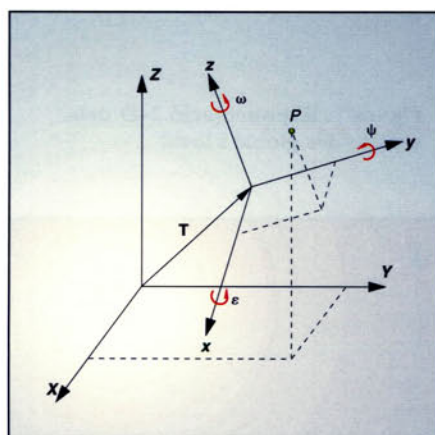


Figura 10: Sistema cartesià global i sistema cartesià local

Bibliografia

- [1] HELMERT, F. R. 1880. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*. Teubner, Leipzig. Reimprè: Minerva GmbH, Frankfurt. 1962.
- [2] HAASBROEK, N. D. 1968. *Gemma Frisius, Tycho Brahe and Snellius and their triangulations*. Publ. Netherl. Geod. Comm. Delft.
- [3] BARBARELLA, M. I GATTI, M. 1993. "Note sulla trasformazione da sistema geocentrico a sistema ellissoidico", a *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, any LII, núm. 2.
- [4] BOWRING, B. R. 1976. "Transformation from spatial to geographical coordinates", a *Survey Review*, XXIII, núm. 181, pàg. 323-327.

Figura 11: Diagrama commutatiu dels sistemes de referència emprats i les transformacions corresponents

