

## ANÁLISIS COMPARATIVO DE ESTIMADORES PRETEST DE HETEROCEDASTICIDAD EN MODELOS ECONOMÉTRICOS. UN ESTUDIO MONTE CARLO

R. DIOS PALOMARES  
C. RODRÍGUEZ FONSECA  
Universidad de Córdoba\*

*En el presente artículo se recogen los resultados de una investigación llevada a cabo sobre el comportamiento de pretest de heterocedasticidad. Con este fin se ha diseñado un experimento Monte Carlo, introduciendo como proceso generador de datos un modelo con tres supuestos sobre la estructura de la varianza del error y con distintos niveles de heterocedasticidad para cada uno de ellos. Asimismo, se analiza la potencia de los diferentes contrastes de heterocedasticidad bajo los distintos supuestos de estructura heterocedástica. Además, se estudia la consecuencia de utilizar un estimador por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles cuya matriz  $\hat{\Omega}$  no se corresponde con la matriz  $\Omega$  del proceso generador de datos, mediante una función de riesgo de los estimadores pretest. Se concluye que es más importante el procedimiento de estimación empleado que el contraste aplicado para detectar la heterocedasticidad.*

**A comparative analysis of heterocedasticity pretest estimators in econometrics models. A Monte Carlo study**

**Palabras clave:** Test de heterocedasticidad, pretest, Monte Carlo, curva de potencia

**Clasificación AMS (MSC 2000):** 62J05, 62J20

---

\*Universidad de Córdoba. Departamento de Estadística, Econometría, Investigación Operativa y Organización de Empresas. Avda. Menéndez Pidal, s/n. 14004 Córdoba.

–Recibido en marzo de 1998.

–Aceptado en junio de 1999.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el modelo lineal general  $\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{e}$ , el vector de perturbaciones  $\mathbf{e}$  sigue una distribución normal con vector de medias cero y matriz de varianzas-covarianzas  $\Omega = E[(\mathbf{e} - E(\mathbf{e}))(\mathbf{e} - E(\mathbf{e}))']$ . Si dicha matriz es igual a  $\sigma^2 * \mathbf{I}_T$ , siendo  $\mathbf{I}_T$  la matriz identidad de rango igual al número de observaciones  $T$ , estaríamos en presencia de un modelo homocedástico, pero en la práctica hay casos en los que no se cumple la hipótesis de homocedasticidad siendo la matriz de varianzas-covarianzas de  $\mathbf{e}$  la siguiente:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

es decir, la varianza del error es distinta para cada observación y, por tanto, nos encontramos en el caso de un modelo heterocedástico.

Ante la posible existencia de heterocedasticidad en el modelo, se impone la necesidad de realizar un tratamiento de la misma enfocado en dos aspectos: contraste de homocedasticidad y estimación óptima.

Para el contraste de la hipótesis de homocedasticidad se han desarrollado una serie de métodos cuya potencia es muy variable y depende, entre otras cosas, de la estructura real de la heterocedasticidad.

Los contrastes de heterocedasticidad aplicados con más frecuencia en la bibliografía se clasifican en dos grupos. El primero de ellos está formado por los tests específicos para cada uno de los siguientes supuestos sobre la estructura de la varianza del error (Fomby, 1984):  $\sigma_i^2 = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\sigma_i^2 = (\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha})^2$ ,  $\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha})$ . El segundo grupo está compuesto por los tests generales o no específicos. Entre ellos destacan el test de Breusch y Pagan (1979), Goldfeld y Quandt (1965), Harvey (1976), test de Picos (Goldfeld y Quandt, 1965), test de Correlación por Rangos (Spearman, 1904) y White (1980). La potencia de alguno de ellos ya ha sido cuestionada ampliamente en la bibliografía: Carrol y Ruppert (1981), Glejser (1969), Godfrey (1978), Harrison (1979), Harvey y Phillips (1974) y Hausman (1978).

El segundo aspecto es estimar de forma óptima los parámetros del modelo. La estimación de los parámetros se puede realizar de dos formas distintas:

- a) mediante los estimadores por Mínimos Cuadrados Ordinarios (M.C.O.),  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ , que sólo son óptimos cuando el modelo es homocedástico y

b) a través de los estimadores por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles (M.C.G.F.),  $\tilde{\beta} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} y$ , que sólo son óptimos cuando la matriz está bien estimada.

Los procedimientos de estimación por M.C.G.F., también se clasifican en dos grupos. En el primer grupo se encuentran los métodos de estimación específicos para cada uno de los supuestos sobre la estructura de la varianza del error (Fomby, 1984) y en el segundo grupo los que denominaremos procedimientos de estimación generales. Estos estimadores generales se van a diferenciar en la forma de estimar la matriz  $\Omega$ . Las propiedades de los anteriores procedimientos no han sido analizadas en pequeñas muestras.

Las consecuencias que se derivan de un fallo en el procedimiento de estimación son muy importantes, de modo que lo ideal sería que en caso de homocedasticidad se estimara por M.C.O. y, en caso de heterocedasticidad, se aplicaran los M.C.G.F. con una matriz  $\Omega$  correctamente estimada.

Toda esta problemática se puede enmarcar en el contexto de la estimación pretest. Definimos para ello un estimador pretest de heterocedasticidad como aquel que engloba a los estimadores por M.C.O. y por M.C.G.F., de modo que se decide estimar según uno u otro procedimiento, dependiendo del resultado de un test de hipótesis preliminar. El estimador pretest  $\hat{\beta}$  que planteamos coincide con el estimador por M.C.O. si se acepta la hipótesis nula de homocedasticidad, y en caso contrario el estimador utilizado es el de M.C.G.F.

Es decir,

$$\hat{\beta} = \begin{cases} \hat{\beta} & \text{si se acepta } H_0 \\ \tilde{\beta} & \text{si se rechaza } H_0 \end{cases}$$

Así, la combinación de un test y un procedimiento de estimación de  $\Omega$  definen un pretest de heterocedasticidad. El estimador pretest es insesgado y su varianza está comprendida entre la de los estimadores por M.C.O. y la de los M.C.G.F.

Las propiedades muestrales del estimador pretest se pueden estudiar en el contexto de la matriz de riesgo o Error Cuadrático Medio (E.C.M.) que será

$$(1) \quad R(\beta, \hat{\beta}) = \text{cov}(\hat{\beta}) + (\text{sesgo de } \hat{\beta})(\text{sesgo de } \hat{\beta})'$$

Igualmente, se puede analizar dicho modelo de riesgo en función de la importancia que tenga la heterocedasticidad en el Proceso Generador de Datos (P.G.D.). Si se resume dicha importancia en un parámetro  $\lambda$  y nos interesa conocer el comportamiento del estimador pretest en el espacio paramétrico de  $\lambda$ , tenemos la función

$$R(\lambda, \beta, \hat{\beta}) = E \left[ (\hat{\beta}_{(\lambda)} - \beta)(\hat{\beta}_{(\lambda)} - \beta)' \right] + \left[ E(\hat{\beta}_{(\lambda)}) - \beta \right] \left[ E(\hat{\beta}_{(\lambda)}) - \beta \right]'$$

que se podrá calcular sólo en el caso de que  $\lambda$  y  $\beta$  sean conocidos, como ocurre en un experimento Monte Carlo.

Son muchos los planteamientos teóricos de nuevas metodologías que han sido confirmados utilizando el método Monte Carlo. Mikhail (1972) lleva a cabo una simulación, para pequeñas muestras, de las propiedades de estimadores econométricos. Sowe (1973) realiza una revisión bibliográfica en la que clasifica los estudios Monte Carlo aplicados a la Econometría. Hendry y Harrison (1974) emplearon el método Monte Carlo para observar el comportamiento de pequeñas muestras en el procedimiento de mínimos cuadrados. De nuevo Mikhail, esta vez en el año 1975, estudia las propiedades de distintos estimadores a través de un estudio Monte Carlo. Kloek y Dijk (1978) analizaron los estimadores bayesianos mediante el método Monte Carlo. Mizon y Hendry (1980) utilizan un experimento Monte Carlo para los contrastes de especificación dinámica. Surekha y Griffiths (1984) también realizaron un experimento Monte Carlo con el objetivo de estudiar el comportamiento de los estimadores bayesianos bajo dos supuestos distintos para la estructura de la heterocedasticidad.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, queda claro que en el análisis del problema de heterocedasticidad en el modelo econométrico, la bondad de un estimador pretest dependerá, por un lado, del acierto que tenga el test en aceptar o rechazar la homocedasticidad y, por otro lado, de lo próxima que esté la estimación de  $\Omega$  a su verdadera matriz en el P.G.D.

El presente trabajo resume los resultados más relevantes de una investigación llevada a cabo con el objetivo principal de investigar si existe algún estimador pretest que se comporte mejor que los demás, en circunstancias de incertidumbre sobre la estructura de la varianza del error, que es el caso más frecuente que nos encontramos en la práctica.

Con este fin se ha diseñado un experimento Monte Carlo, introduciendo como P.G.D. un modelo con tres supuestos sobre la estructura de la varianza del error y con distintos niveles de heterocedasticidad para cada uno de ellos.

Los objetivos secundarios que se plantean son los siguientes:

1. Analizar la potencia de los diferentes contrastes de heterocedasticidad bajo los distintos supuestos de estructura heterocedástica.
2. Estudiar la consecuencia de utilizar un estimador por M.C.G.F. cuya matriz  $\hat{\Omega}$  no se corresponda con la matriz  $\Omega$  del proceso generador de datos. Por ejemplo, cuando existe homocedasticidad.

3. Estudiar el comportamiento de los distintos pretests con el fin de plantear una estrategia de actuación óptima ante la incertidumbre sobre la posible naturaleza de la heterocedasticidad.

## 2. METODOLOGÍA

El experimento está diseñado con el fin de analizar el comportamiento de los contrastes de heterocedasticidad y de los estimadores por M.C.O. y por M.C.G.F., cuando el P.G.D. corresponde a modelos con estructuras de varianza del error homocedásticas y heterocedásticas.

Así, se realiza un experimento Monte Carlo tomando como P.G.D. un modelo base  $y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + e_i$ , generando muestras con distintas hipótesis sobre la matriz, incluida  $\Omega = I$  (caso de homocedasticidad).

En el experimento se han utilizado los datos del gasto total en productos agroalimentarios ( $\mathbf{Y}$ ) y de renta familiar disponible ( $\mathbf{X}$ ) correspondientes a cuarenta y siete provincias españolas en el año 1990 cuyos datos se presentan en la tabla 1 del anexo. La especificación del modelo es  $\mathbf{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathbf{X}_i + e_i$ . Tras realizar una primera estimación, el P.G.D. que tomaremos como base será  $\mathbf{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathbf{X}_i + e_i$ , ya que asignaremos a los parámetros estructurales  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , los valores estimados por M.C.G.F en el modelo real que son  $\hat{\beta}_0 = 2633,135$  y  $\hat{\beta}_1 = 0,156$ . Todos los contrastes de heterocedasticidad utilizados rechazan la hipótesis de homocedasticidad en el modelo, siendo la varianza residual estimada igual a 550.000.

### 2.1. Fuentes de variación

Se desarrolla el experimento con dos fuentes de variación: la forma de la función  $\sigma_i^2 = h(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})$  y la gravedad de la heterocedasticidad  $\lambda$ .

#### 2.1.1. La forma de la función

Se establece un P.G.D. bajo los siguientes supuestos

- a)  $\sigma_i^2 = a + b \cdot \mathbf{X}_i \Rightarrow$  Supuesto A.
- b)  $\sigma_i^2 = (a + b \cdot \mathbf{X}_i)^2 \Rightarrow$  Supuesto B.
- c)  $\sigma_i^2 = \exp(a + b \cdot \mathbf{X}_i) \Rightarrow$  Supuesto C.

### 2.1.2. La gravedad de la heterocedasticidad $\lambda$

Se sustituye la varianza muestral del modelo base,  $\hat{\sigma}_e^2$ , en la ecuación  $\hat{\sigma}_e^2 = a + b \cdot \bar{X}$ ,  $\hat{\sigma}_e^2 = (a + b \cdot \bar{X})^2$ , ó  $\hat{\sigma}_e^2 = \exp(a + b \cdot \bar{X})$ , dependiendo del supuesto sobre la varianza del error y siendo  $\bar{X}$  el valor medio de la variable exógena. Dando valores a  $a$  en estas ecuaciones se obtienen valores de  $b$ , formándose parejas de valores  $(a, b)$  que hacen que la varianza se asigne, bien al término independiente, bien a la variable exógena, o bien a los dos. Por ejemplo, si  $a$  es igual a cero toda la varianza se le asignaría a la variable exógena, sería el caso de heterocedasticidad máxima; si  $b$  es igual a cero la varianza del error sería constante, es decir, estaríamos en el caso de homocedasticidad.

Para cada pareja de valores  $(a, b)$  que constituye un ensayo o punto experimental, se calcula la serie  $t_i = a + b \cdot X_i$  sustituyendo la pareja de valores  $(a, b)$ . Si a dicha serie se le estima la desviación típica y se le calcula la media podemos construir una medida relativa de dispersión denominada coeficiente de variación

$$\text{C.V.} = \frac{\hat{\sigma}_t}{\bar{t}}$$

Esta medida de dispersión será representada por  $\lambda$  que indica la gravedad de la heterocedasticidad. La gravedad se establece, para cada uno de los supuestos anteriores, en siete niveles que suponen desde homocedasticidad hasta heterocedasticidad extrema. Los valores de  $a$  y  $b$  definirán esta gravedad. Se pueden ver los valores correspondientes a los parámetros de interés de este procedimiento en las tablas 2, 3, y 4 del anexo.

## 2.2. Generación del término de error heterocedástico y de cada muestra

Los pasos que se han seguido para generar cada muestra son los siguientes:

- Calcular el valor de  $\sigma_i^2$ , sustituyendo  $a, b$  y  $X$  en  $\sigma_i^2 = a + b \cdot X_i$ ,  $\sigma_i^2 = (a + b \cdot X_i)^2$  ó  $\sigma_i^2 = \exp(a + b \cdot X_i)$ , según se trabaje con el primer, segundo o tercer supuesto, respectivamente.
- Generar un valor aleatorio de una distribución  $N(0, 1)$ .
- Generar la variable  $e_i$  a través de  $e_i = \sigma_i \cdot z_i$ .
- Generar cada punto muestral sustituyendo los valores de  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, X_i$  y  $e_i$  en la ecuación

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot X_i + e_i.$$

Se han formulado tres supuestos de estructura de varianza del error con siete niveles de heterocedasticidad cada uno; por tanto, serán veintiún procesos distintos para cada uno de los cuales se generan dos mil muestras de tamaño cuarenta y siete.

### 2.3. Contrastes de heterocedasticidad

Para cada muestra generada se realizan los siguientes tests.

a) Contrastes específicos (Fomby, 1984):

- Test para cuando la varianza es una función lineal de las variables exógenas,  $\sigma_i^2 = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}$ .
- Test para cuando la desviación típica es una función lineal de las variables exógenas,  $\sigma_i = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}$ .
- Test para la heterocedasticidad multiplicativa,  $\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})$ .

b) Contrastes no específicos:

- Test de Breush-Pagan.
- Test de Goldfeld-Quandt.
- Test de Harvey.
- Test de Picos.
- Test de Correlación por Rangos (Spearman).
- Test de White.

### 2.4. Métodos de estimación

Para cada una de las muestras generadas se procede al cálculo de los siguientes estimadores. Por un lado, se calculan los estimadores por M.C.O. y por M.C.G. (teórico) a través de  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$  y  $\tilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1}y$ , respectivamente. Por otro lado, se calculan tres estimadores para los que existe una forma funcional específica de heterocedasticidad (Fomby, 1984). A estos estimadores se les representará por *SA*, *SB* y *SC*, según correspondan al primer supuesto para la estructura de la varianza del error, al segundo o al tercero, respectivamente.

Por último, se calculan seis estimadores por M.C.G.F.,  $\tilde{\tilde{\beta}} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1} X'\hat{\Omega}^{-1}y$ . Estos estimadores se diferencian para una misma muestra en la matriz  $\hat{\Omega}$ . Si en la diagonal de dicha matriz situamos los elementos de los residuos por M.C.O. al cuadrado, se obtiene un estimador que representaremos por *R2*. Cuando la diagonal de  $\hat{\Omega}$  esté compuesta por los elementos de la variable exógena que provoca la heterocedasticidad, el

estimador resultante se representará por  $VE$ , y si es el cuadrado de la variable exógena la que ocupa la diagonal de dicha matriz, el estimador resultante será representado por  $VE2$ . Si en los modelos de los tests de Breush-Pagan, Harvey y White estimamos sus respectivas variables estimadas, se pueden construir, a partir de éstas, tres matrices  $\hat{\Omega}$  distintas sin más que sustituir en su diagonal cada una de estas variables. Los tres nuevos estimadores se denominarán  $B-P$ ,  $HA$  y  $W$ , respectivamente.

En total tenemos once estimadores distintos. En la Tabla 5 del Anexo se ofrecen las notaciones de los estimadores por M.C.G.F. utilizados en el experimento.

## 2.5. Estimadores pretest

Cada estimador pretest se compone de un contraste y un procedimiento de estimación de  $\Omega$ , para el caso en que se rechace la hipótesis nula de homocedasticidad. Hemos diseñado además, para cada contraste, varios estimadores pretest que corresponden a distintas formas de estimar  $\Omega$  que son  $R2$ ,  $VE$ ,  $VE2$  y  $W$ . En los tests de Breush-Pagan y Harvey, además de los cuatro procedimientos «tipo» ( $R2$ ,  $VE$ ,  $VE2$  y  $W$ ), se estimará con el procedimiento asociado a  $B-P$  y  $HA$ , respectivamente. Con los tests específicos se realizará algo similar. Así, en el test para cuando  $\sigma_i^2 = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}$  se añade la estimación que corresponde a  $SA$ ; al test para cuando  $\sigma_i = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}$  se le agrega la estimación correspondiente a  $SB$  y al test para cuando  $\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha})$  se le une la estimación asociada a  $SC$ .

En la Tabla 2 (Anexo II) se recoge la nomenclatura utilizada para distinguir los estimadores pretest.

## 2.6. Cálculo de las curvas de potencia

En base a los resultados de los distintos tests se calcula empíricamente la probabilidad de cada uno de ellos de rechazar la hipótesis nula de homocedasticidad. Así, se representan las curvas de potencia de los contrastes de heterocedasticidad para cada supuesto concreto en función de los valores de  $\lambda$ . Se trabaja con un nivel de significación  $\alpha$  igual a 0.05.

## 2.7. Cálculo de las curvas del E.C.M.

Se hallan los valores de los errores cuadráticos medios definidos en (1) para los distintos estimadores obtenidos en el experimento: M.C.O., M.C.G., M.C.G.F. y estimadores pretest. Posteriormente, se calculan los E.C.M. relativos al del estimador por M.C.G., dividiendo los primeros por los últimos con el fin de eliminar el efecto de dimensión



y bajo el supuesto de que éstos son los óptimos teóricos. Con estos nuevos valores se representan las curvas del E.C.M. en función del  $\lambda$  correspondiente para cada ensayo.

## 2.8. Tratamiento informático

Para poder llevar a cabo todos los pasos descritos en el diseño del experimento ha sido necesario realizar una serie de macros mediante el programa Econometric Views 2.0. Las macros que se han creado son las correspondientes a:

- La generación del término de error heterocedástico.
- La generación de cada muestra.
- La aplicación de la batería de tests de heterocedasticidad.
- La aplicación de los distintos métodos de estimación.
- El cálculo de los distintos estimadores pretest.
- El cálculo de las curvas de potencia.
- El cálculo de las curvas del E.C.M.

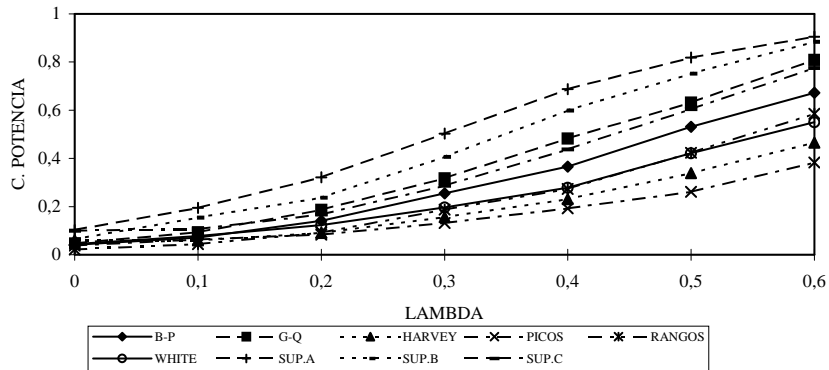
## 3. RESULTADOS

### 3.1. Estudio de las curvas de potencia

#### 3.1.1. Supuesto $\sigma^2 = a + b \cdot X$

Las curvas de potencia correspondientes a los nueve tests llevados a cabo en el experimento se pueden ver en el Gráfico 1.

Hay que destacar dos aspectos. Primero, los tests específicos en presencia de homocedasticidad ( $\lambda = 0$ ) tienen un comportamiento pésimo desde el punto de vista del error de tipo I, mientras que por el contrario, los tests no específicos ofrecen una probabilidad de error de tipo I más cercano al nivel de significación 0.05. Segundo, en presencia de heterocedasticidad la situación anterior se invierte, es decir, los tests generales poseen una probabilidad de error de tipo II muy elevado, mientras que los test específicos alcanzan probabilidades de rechazo de la hipótesis nula del 90 %, caso del test específico para el supuesto que estamos considerando  $\sigma^2 = a + b \cdot X$ .

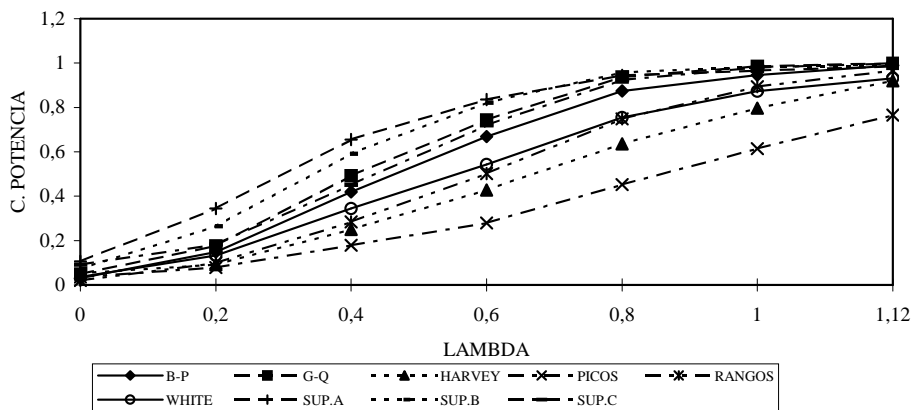


Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 1.** Curvas de potencia (Sup. A)

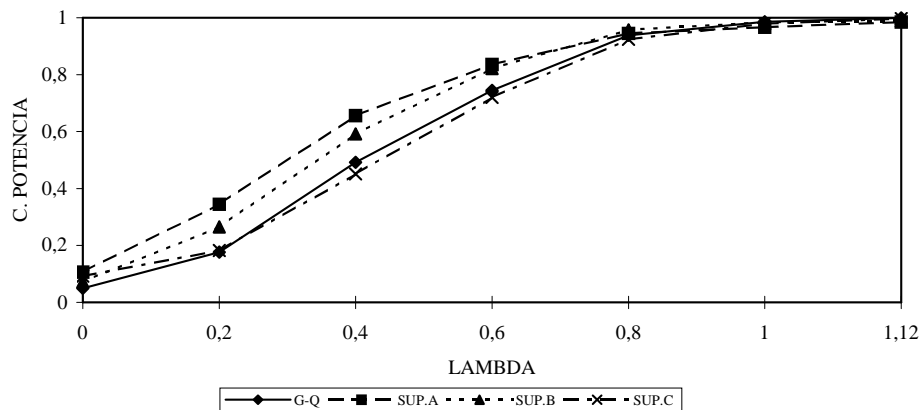
### 3.1.2. Supuesto $\sigma^2 = (a + b \cdot X)^2$

Las curvas de potencia de los tests se recogen en el Gráfico 2. Si se comparan las curvas de potencia de los Gráficos 1 y 2, para valores iguales de  $\lambda$ , podemos comprobar que se muestran igual de eficaces a la hora de detectar heterocedasticidad siendo cierta. De aquí se puede deducir que el supuesto del P.G.D. tiene poca influencia sobre el comportamiento de los contrastes de heterocedasticidad.



Fuente: Elaboración propia.

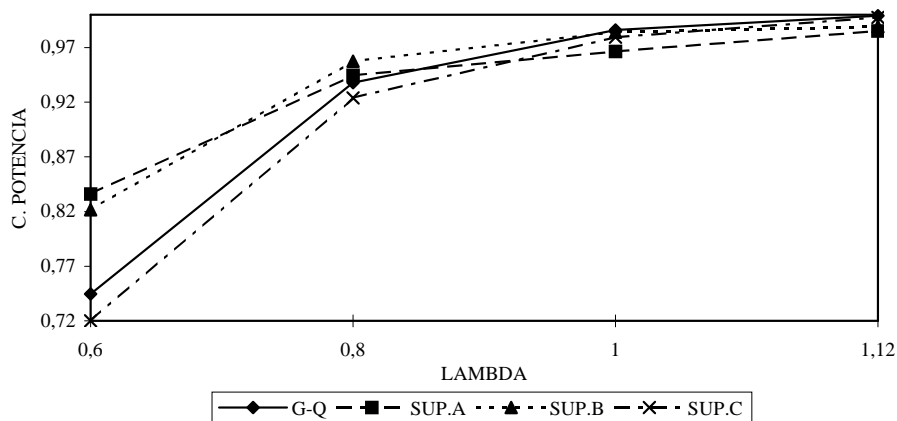
**Gráfico 2.** Curvas de potencia (Sup. B)



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 3.** Curvas de potencia de los tests más potentes (Sup. B)

Siguiendo el criterio de máxima potencia, simplificaremos el número de curvas para analizar con mayor claridad la potencia de éstas, obteniendo así el Gráfico 3.



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 4.** Curvas de potencia de los tests más potentes (Sup. B)

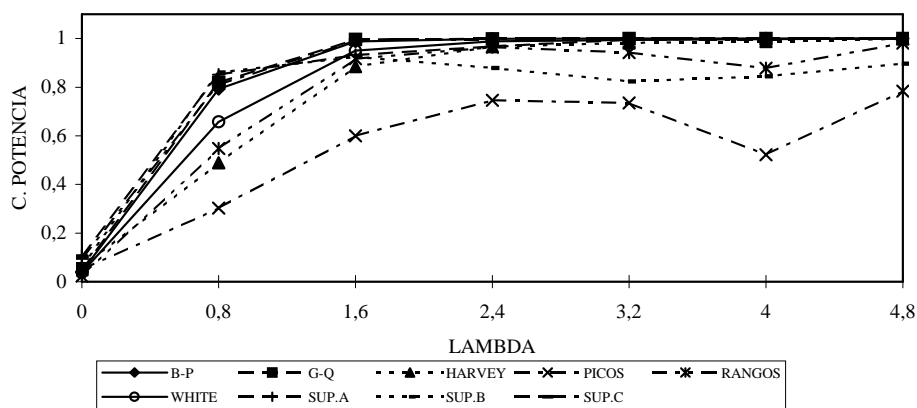
Se han eliminado todos los tests generales (excepto el de Goldfeld-Quandt), lo que viene a significar que estos contrastes son menos potentes que aquellos con formas funcionales específicas de heterocedasticidad; no obstante, hay que recalcar que los tests

no específicos cometen menos error de tipo I que los tests específicos. Centrándonos en el Gráfico 3, se observa que el test para cuando  $\sigma^2 = a + b \cdot X$  parece dominar sobre los demás en un amplio espectro de valores de  $\lambda$ . Por otro lado, en caso de homocedasticidad, ocurre que la probabilidad de error de tipo I para el test de Goldfeld-Quandt es aproximadamente 0.05 (el nivel de significación).

Para analizar la probabilidad de error de tipo II del test de Goldfeld-Quandt, realicemos un zoom de la zona comprendida entre  $\lambda = 0.6$  y  $\lambda = 1.12$  del Gráfico 3. El resultado es el Gráfico 4 y en él se puede ver que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, siendo falsa, es muy elevada llegando al 99.9% que corresponde a una probabilidad de error de tipo II igual a 0.1. En definitiva, para valores extremos de  $\lambda$  y cuando la verdadera estructura de la varianza es  $\sigma^2 = (a + b \cdot X)^2$ , el test de Goldfeld-Quandt supone un contraste bastante fiable y eficaz.

### 3.1.3. Supuesto $\sigma^2 = \exp(a + b \cdot X)$

En el Gráfico 5 se muestran las curvas de potencia de los contrastes de heterocedasticidad. Lo primero que destaca es el excelente comportamiento de algunos test, llegándose a alcanzar probabilidades del 100% en la detección de la heterocedasticidad a partir de valores de  $\lambda = 1.6$ , lo que equivale a una probabilidad de error de tipo II nulo. Hay que destacar el hecho de que dentro de este grupo se encuentre el del supuesto A y también el de GQ. Otro aspecto significativo es que el tests de rangos que es no específico se muestre bastante eficaz, superando incluso al del supuesto B.



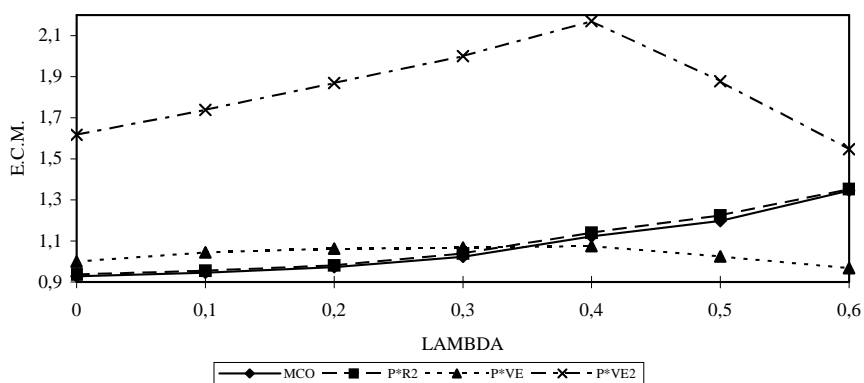
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 5.** Curvas de potencia (Sup. C)

### 3.2. Estudio de la función de riesgo (E.C.M.) de los estimadores

#### 3.2.1. Supuesto $\sigma^2 = a + b \cdot X$

A partir de las curvas del E.C.M. de los distintos estimadores pretest es posible obtener un gráfico que refleje el comportamiento característico del E.C.M. de todos ellos, debido a que los resultados obtenidos son muy similares entre pretests que contrastan el mismo contraste, debiéndose las diferencias al procedimiento de estimación. Así, hemos denominado  $P^*R2$ ,  $P^*VE$  y  $P^*VE2$  a los pretests que combinan cualquier contraste con la estimación  $R2$ ,  $VE$  y  $VE2$ , respectivamente. Dicho gráfico es el siguiente:



Fuente: Elaboración propia.

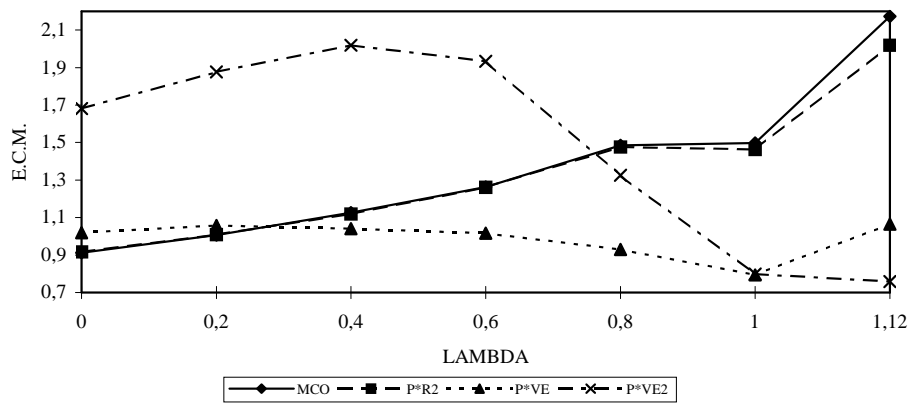
**Gráfico 6.** Error cuadrático medio de pretest (Sup. A)

El estimador  $P^*VE2$  ofrece un E.C.M. muy superior al del resto de los estimadores pretest para todos los valores ensayados de  $\lambda$ , por tanto en la búsqueda del estimador pretest óptimo,  $P^*VE2$  queda descartado para el supuesto que se está considerando. Por otro lado, se puede observar que el E.C.M. del estimador  $P^*R2$  tiene un comportamiento muy similar al del estimador por M.C.O.

Si se realiza un análisis más general del Gráfico 6 se observa que existe una primera zona de baja e intermedia heterocedasticidad donde la estimación por M.C.O. y por  $P^*R2$  es óptima, sin embargo cuando la presencia de heterocedasticidad se acentúa lo mejor sería ir hacia un estimador como el  $P^*VE$ , lo cual está en consonancia con el supuesto que se está tratando. Si ante la incertidumbre sobre el grado de heterocedasticidad, hubiera que decidirse por una sola forma de estimación a lo largo de todo  $\lambda$ , quizás lo más conveniente sería utilizar el estimador  $P^*VE$  debido a que su comportamiento es más homogéneo: en casos de máxima heterocedasticidad comete el mínimo E.C.M. y con poca heterocedasticidad su comportamiento, aunque no alcanza el de los M.C.O., podemos calificarlo como aceptable.

### 3.2.2. Supuesto $\sigma^2 = (a + b \cdot X)^2$

Para este supuesto, el gráfico característico que resume el comportamiento del E.C.M. de todos los pretests es el Gráfico 7. El E.C.M. que comete el estimador  $P^*VE2$  continúa siendo superior al del resto de los estimadores pretest, no obstante en este supuesto a partir de un determinado valor de  $\lambda$  el E.C.M. disminuye drásticamente, hasta tal punto que en términos de máxima heterocedasticidad dicho estimador es el que posee el mínimo E.C.M. Por otro lado, el E.C.M. del estimador  $P^*R2$  vuelve a tener un comportamiento muy similar al del estimador por M.C.O. El estimador  $P^*VE$  es el que tiene mayor bondad para un amplio intervalo de valores de  $\lambda$ , por tanto ante la incertidumbre sobre el grado de heterocedasticidad, dicho estimador sería el más adecuado ya que se comporta de manera más uniforme



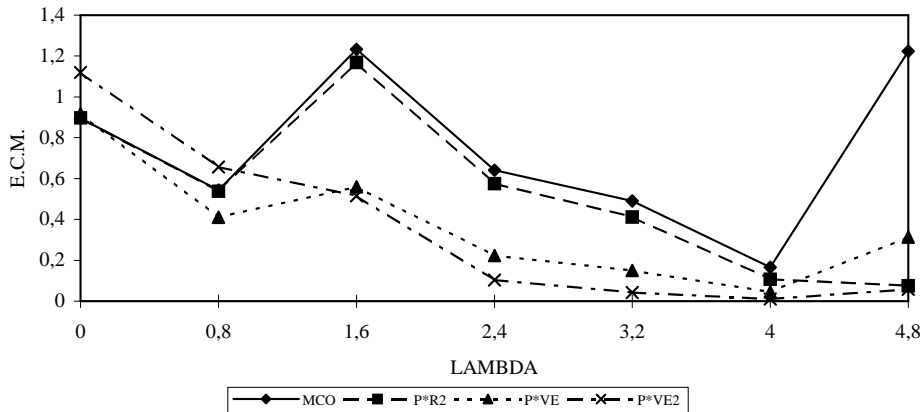
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 7.** Error cuadrático medio de pretest (Sup. B)

Un estudio más amplio del Gráfico 7 nos lleva a diferenciar tres zonas. La primera, comprendida entre  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 0.3$ , en la que los estimadores óptimos son  $P^*R2$  y M.C.O. Una segunda zona entre  $\lambda = 0.3$  y  $\lambda = 1$ , en la que domina el estimador  $P^*VE$ . La última zona abarca el caso extremo de heterocedasticidad y el estimador  $P^*VE2$  resulta ser óptimo, siendo ésto lo que se debiera esperar teniendo en cuenta el supuesto de heterocedasticidad con el que se está trabajando.

### 3.2.3. Supuesto $\sigma^2 = \exp(a + b \cdot X)$

El Gráfico 8 es el representativo del comportamiento del E.C.M. de los pretests para el supuesto que se está considerando. El estimador  $P^*R2$  continúa teniendo un comportamiento similar al estimador por M.C.O.

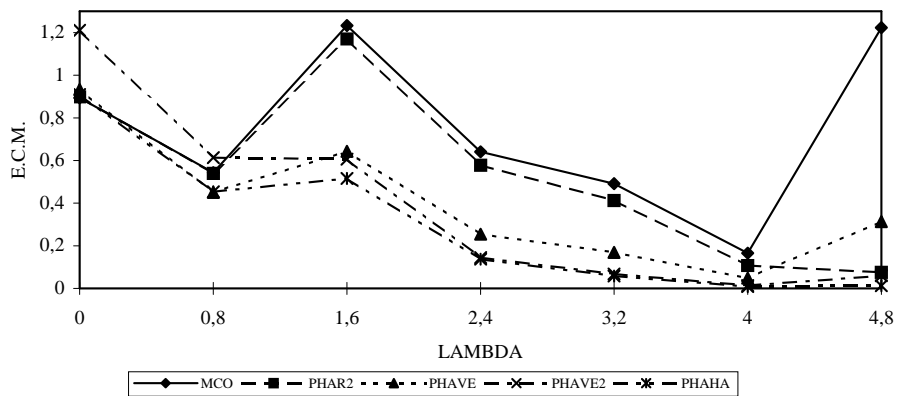


Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 8.** Error cuadrático medio de pretest (Sup. C)

Un aspecto interesante es la evolución del E.C.M. del estimador  $P * VE2$ . Para valores pequeños de  $\lambda$  tiene el mayor valor de la función de riesgo entre todos los estimadores y conforme aumenta la gravedad de la heterocedasticidad su E.C.M. disminuye, hasta que a partir de  $\lambda = 1.6$ , aproximadamente, se comporta como el estimador óptimo. Cuando la gravedad de la heterocedasticidad es muy leve el estimador  $P * VE$  sería el más deseable y, cuando estamos en términos de heterocedasticidad media y extrema, es el estimador  $P * VE2$  el que ofrece el mínimo valor en la función de riesgo.

A partir del test Harvey se ha obtenido el estimador pretest *PHAHA*. El comportamiento de su E.C.M. aparece reflejado en el siguiente gráfico.

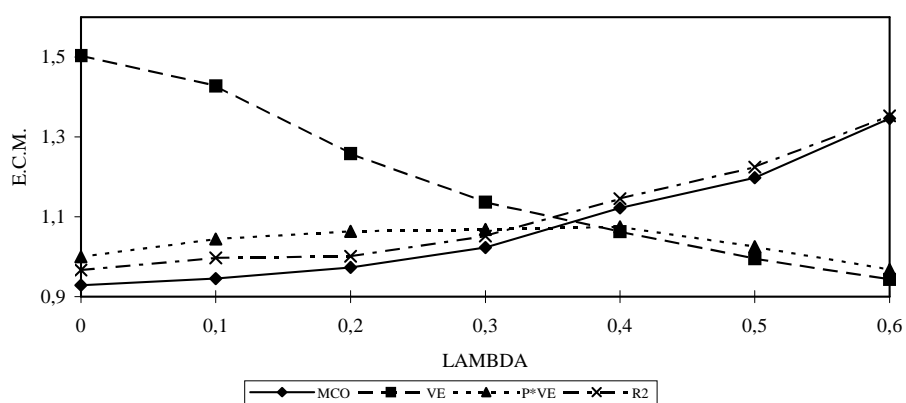


Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 9.** Error cuadrático medio de los pretest que utilizan el contraste de Harvey (Sup. C)

Como se puede comprobar, la utilización del estimador *PHAHA* nos asegura, sea cual sea el valor de  $\lambda$ , que estamos realizando la mejor estimación. Por tanto, independientemente de la gravedad de la heterocedasticidad, hemos encontrado un estimador óptimo para el supuesto que se está considerando.

Para completar el estudio del E.C.M. de los estimadores pretest, se van a analizar una serie de gráficos que se consideran de interés. El primero de ellos es el Gráfico 10, obtenido a partir del supuesto  $\sigma^2 = a + b \cdot X$ .



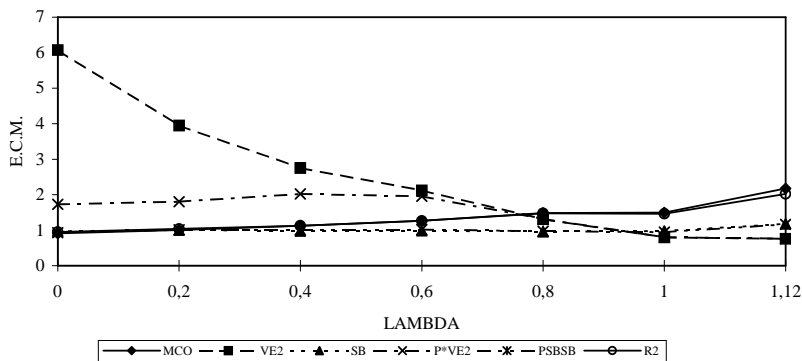
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 10.** Comparación del error cuadrático medio de estimadores y pretest (Sup. A)

En dicho gráfico se representan las curvas del E.C.M. del estimador por M.C.O., de los estimadores por M.C.G.F. *VE* y *R2*, y del estimador pretest *P\*VE*. Se puede comprobar que la curva del primero de ellos es ascendente con la gravedad de la heterocedasticidad; ésto es lo que se puede esperar del estimador por M.C.O. Es decir, este estimador resulta muy bueno en términos de homocedasticidad, incluso con poca heterocedasticidad, pero a medida que ésta aumenta, su E.C.M aumenta considerablemente. La evolución del E.C.M. del estimador *R2* es bastante similar a la del estimador por M.C.O., por tanto, cuando la heterocedasticidad es considerable el procedimiento de estimación mediante el cuadrado de los residuos es tan malo como el realizado por los M.C.O.

La curva que sigue el E.C.M. del estimador *VE* es descendente con la intensidad de la heterocedasticidad, es decir, *VE* alcanza sus mejores propiedades conforme la heterocedasticidad se acentúa. El estimador pretest *P\*VE* tiene características intermedias entre las del estimador por M.C.O. y las de *VE*, desde el punto de vista de la función de riesgo.





Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 11.** Comparación del error cuadrático medio de estimadores y pretest (Sup. B)

Observando el Gráfico 10 es fácil concluir que el estimador pretest  $P * VE$  tiene un comportamiento más homogéneo que los otros dos (M.C.O. y  $VE$ ), por tanto, si se desconoce la gravedad de la heterocedasticidad el estimador pretest sería preferentemente utilizado.

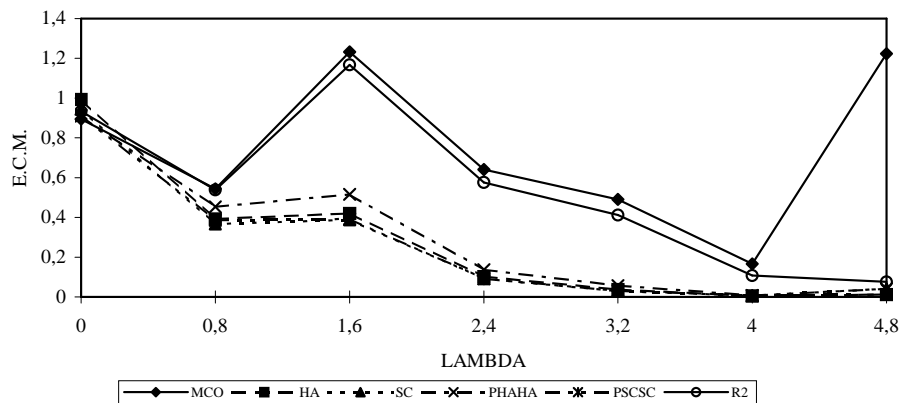
A partir del supuesto  $\sigma^2 = (a + b \cdot X)^2$  se construye el Gráfico 11. En él se representan las curvas del E.C.M. de los siguientes estimadores: M.C.O.,  $VE2$ ,  $SB$ ,  $P * VE2$ ,  $PSBSB$  y  $R2$ . La curva del primero de ellos es ascendente con la heterocedasticidad y, como ya se ha dicho con anterioridad, es lo que se podía esperar de dicho estimador. Lo mismo ocurre con el estimador  $R2$ , así que también para este supuesto ( $\sigma = a + b \cdot X$ ) la estimación según  $R2$  sería ineficiente, en presencia de heterocedasticidad.

La curva del E.C.M. del estimador  $VE2$  actúa justo al revés, es decir, es descendente con la heterocedasticidad; lo cual también es lógico si se tiene en cuenta que el supuesto considerado es  $\sigma^2 = (a + b \cdot X)^2$ . El estimador pretest  $P * VE2$  tiene propiedades intermedias entre las del estimador por M.C.O. y las de  $VE2$ . Debido al comportamiento más uniforme que presenta  $P * VE2$ , se hace preferible su utilización sobre los otros dos en caso de incertidumbre sobre los posibles valores de  $\lambda$ .

Los estimadores  $SB$  y  $PSBSB$  ofrecen, para todo  $\lambda$ , un E.C.M. muy pequeño y bastante uniforme, de manera que serían los mejores estimadores (para el supuesto considerado), superando incluso al estimador  $P * VE2$ .

Por último, a partir del supuesto  $\sigma^2 = \exp(a + b \cdot X)$  se construye el Gráfico 12 que contiene al estimador por M.C.O. y a los estimadores  $R2$ ,  $HA$ ,  $SC$ ,  $PHAHA$  y  $PSCSC$ . Se puede comprobar que el E.C.M. de estos cuatro últimos estimadores desciende de manera considerable conforme la heterocedasticidad se hace más grave. Estos resulta-

dos se entienden fácilmente desde el punto de vista del supuesto considerado, ya que dichos estimadores provienen del test de Harvey y del test específico para este supuesto. Aún así, hay que destacar las propiedades tan excelentes (medidas en términos del E.C.M.) que ofrecen estos estimadores, especialmente cuando la heterocedasticidad es máxima.



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 12.** Comparación del error cuadrático medio de estimadores y pretest (Sup. C)

#### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se recoge una investigación sobre el comportamiento de algunos pretest de heterocedasticidad. Para ello se ha realizado un experimento Monte Carlo. La parte sistemática del experimento se basa en una estructura estimada sobre datos reales de un modelo de consumo alimentario que resultó altamente heterocedástico. La perturbación elatoria se ha generado con el fin de introducir el problema de la heterocedasticidad como fuente de variación, diseñando a tal efecto tres supuestos distintos de estructura para la matriz de covarianzas del error. Para analizar la incidencia de la gravedad del problema, se han introducido siete niveles distintos de la misma, creando una metodología específica para ello.

Se exponen a continuación las conclusiones que se pueden extraer de los resultados expuestos. Dichas conclusiones entendemos que se pueden extender a modelos econométricos con una variable explicativa y un tamaño de muestra no muy distinto de  $T=50$ , que son los factores fijos con los que hemos trabajado por el momento, sin que ello suponga que no analicemos otros en un futuro próximo. En cuanto al modelo base

tomado para la parte sistemática, creemos que no supone gran pérdida de generalidad, teniendo en cuenta además que las medidas de riesgo se calculan en términos relativos.

Concluimos, por tanto, lo siguiente:

1. Lo que define la potencia de un test de heterocedasticidad es la gravedad de ésta, siendo el proceso generador de datos poco relevante.
2. En términos generales, el test de Goldfeld-Quandt es bastante bueno, presentando un buen comportamiento tanto en caso de homocedasticidad como de heterocedasticidad.
3. Si se sospecha la existencia de heterocedasticidad, los tests más potentes son los tres específicos para cada uno de los supuestos sobre la estructura de la varianza del error y el de Goldfeld-Quandt.
4. Si se piensa que es muy poco probable que haya heterocedasticidad, los tests que mejor se comportan son los no paramétricos, es decir, los tests de Picos y Spearman.
5. El test de White sólo es eficiente cuando la gravedad de la heterocedasticidad es extrema. Los malos resultados obtenidos por este test pueden deberse a que en el experimento sólo se ha considerado una variable explicativa y el test de White está pensado para modelos con varias variables exógenas.
6. Desde el punto de vista del E.C.M., el comportamiento de los estimadores pretest depende sobre todo del procedimiento de estimación y en muy pequeña medida del test correspondiente.
7. En términos generales, el estimador pretest resultante de aplicar cualquier test con el procedimiento de estimación  $R^2$ , que podemos representar en forma genérica por  $P * R^2$ , se comporta de manera similar al estimador por M.C.O.
8. Cuando la heterocedasticidad no excede de  $\lambda = 4$ , el comportamiento de los estimadores pretest representados por  $P * VE$  es bastante bueno, con la ventaja adicional de su facilidad de cálculo.
9. Los estimadores pretest  $P * VE^2$  no muestran su eficiencia hasta llegar a valores de  $\lambda = 2.4$ .
10. Los estimadores pretest concretos *PHAHA* y *PSCSC* son bastante buenos.

A modo de resumen final se enumeran las siguientes conclusiones:

1. Si se sospecha la existencia de heterocedasticidad grave, los estimadores pretest representados por  $P * VE$  ofrecen un buen comportamiento y, dentro de éstos, *PHAVE* y *PSCVE* son los estimadores óptimos.

2. Si se piensa que la heterocedasticidad es muy leve o nula, los estimadores *PPVE* y *PSVE* son los mejores.
3. Si no se conoce nada sobre la estructura de la varianza del error lo más idóneo sería utilizar el estimador pretest *PG-QVE*, resultado de combinar el test de Goldfeld-Quandt con el procedimiento de estimación *VE*.
4. Queda patente la superioridad de los estimadores pretest sobre el resto de los estimadores que utilizan siempre el mismo procedimiento de estimación.

## 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las oportunas sugerencias de dos evaluadores anónimos.

## 6. REFERENCIAS

- Breusch, T.S. y Pagan, A.R. (1979). «A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation», *Econometrica*, 47, 1287-1294.
- Carroll, R.J. y Ruppert, D. (1981). «On Robust Tests for Heteroscedasticity», *Annals of Statistics*, 9, 205-209.
- Fomby, T., Carter, R. y Johnson, S. (1984). *Advanced Econometric Methods*. Ed. Springer-Verlag. New York.
- Glejser, H. (1969). «A New Test for Heteroscedasticity», *Journal of the American Statistical Association*, 64, 316-323.
- Godfrey, L.G. (1978). «Testing for Multiplicative Heteroscedasticity», *Journal of Econometrics*, 8, 227-236.
- Goldfeld, S.M. y Quandt, R.E. (1965). «Some Tests for Homoscedasticity», *Journal of the American Statistical Association*, 60, 539-547.
- Harrison, M.J. y McCabe, B.P.M. (1979). «A Test for Heteroscedasticity Based on Ordinary Least Squares Residuals», *Journal of the American Statistical Association*, 74, 494-499.
- Harvey, A.C. (1976). «Estimating Regression Models with Multiplicative Heteroscedasticity», *Econometrica*, 44, 461-465.
- Harvey, A.C. y Phillips, G.D. A. (1974). «A Comparison of the Power of Some Test for Heteroscedasticity in the General Linear Model», *Journal of Econometrics*, 2, 307-316.

- Hausman, J.A. (1978). «Specification Tests in Econometrics», *Econometrica*, 46, 1251-1271.
- Hendry, D.F. y Harrison, R.W. (1974). «Monte Carlo Methodology and the Finite Sample Behaviour of Ordinary and Two-Stage Least Squares», *Journal of Econometrics*, 2, 151-174.
- Kloek, T. y Van Dijk, H.K. (1978). «Bayesian Estimates of Equation System Parameters Application of Integration by Monte Carlo», *Econometrica*, 46, 1-19.
- Mikhail, W.M. (1972). «Simulating the Small Sample Properties of Econometric Estimators», *Journal of the American Statistical Association*, 67, 620-624.
- Mikhail, W.M. (1975). «A Comparative Monte Carlo Study of the Properties Econometrics Estimators», *Journal of the American Statistical Association*, 70, 91-104.
- Mizon, G.E. y Hendry, D.F. (1980). «An Empirical Application and Monte Carlo Analysis of Dynamic Specification», *Review of Economic Studies*, 47, 21-45.
- Sowey, E.R. (1973). «A Classified Bibliography of Monte Carlo Studies in Econometrics», *Journal of Econometrics*, 1, 377-395.
- Spearman, C. (1904). «The Proof and Measurement of Association Between Two Things», *Am. J. Psychol.*, 15, 72-101.
- Surekha, K. y Griffiths, W.E. (1984). «A Monte Carlo Comparison of Some Bayesian and Sampling Theory Estimators in Two Heteroscedastic Error Models», *Communications in Statistics B*, 13, 85-105.
- White, H. (1980). «A Heteroscedastic-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroscedasticity», *Econometrica*, 48, 817-838.

## ANEXO

**Tabla 1.** Datos del modelo base en millones de pesetas (1990)

<i>PROVINCIA</i>	<i>GASTO TOTAL EN PRODUCTOS AGROALIMENTARIOS</i>	<i>RENTA FAMILIAR DISPONIBLE</i>
Alava	47108.6	307279
Albacete	51274.2	284369
Alicante	192572.5	1341225
Almería	68196.3	393382
Asturias	179565.6	1051136
Ávila	28770.7	152069
Badajoz	76626.5	489155
Baleares	102282.2	867525
Burgos	61087.6	369639
Cáceres	59097.3	321460
Cádiz	155863.6	822891
Cantabria	79491.6	504772
Catellón	64343.7	475965
Ciudad Real	71549.1	398585
Córdoba	108998.9	602789
La Coruña	169989.5	1014977
Cuenca	31025.5	177677
Gerona	90795.4	727271
Granada	112631.9	606935
Guadalajara	23202.3	148198
Guipúzcoa	115635.9	705003
Huelva	63196.9	372708
Huesca	32567.8	211969
Jaén	91802	518609
León	82076.1	481207
Lérida	60650.6	389255
Lugo	61915.8	335107
Málaga	174493.7	1017954
Murcia	152302.1	967480
Navarra	86427.1	562873
Orense	66676.6	349990
Palencia	28967	183464
Las Palmas	106168.8	727844
Pontevedra	146753.9	856294
La Rioja	42082.9	306548
Salamanca	52498.8	310899
Sta. Cruz de Tenerife	92494.6	672427
Segovia	22568.7	138120
Sevilla	219127.2	1346684
Soria	19567.4	88928
Tarragona	77295.8	615884
Teruel	22905.7	144208
Toledo	76107.4	444165
Valladolid	73758.4	490250
Vizcaya	190063.6	1105062
Zamora	33169.5	203736
Zaragoza	138155.2	903283

Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Banco Bilbao-Vizcaya.

**Tabla 2.** Valores de  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$  para el primer supuesto

$a$	$b$	$\lambda$	NIVEL
550000	0	0	0
455000	0.17	0.1	1
360000	0.34	0.2	2
270000	0.51	0.3	3
180000	0.67	0.4	4
90000	0.84	0.5	5
0	1	0.6	6

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 3.** Valores de  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$  para el segundo supuesto

$a$	$b$	$\lambda$	NIVEL
742	0	0	0
615	2.3e-4	0.2	1
485	4.67e-4	0.4	2
365	6.85e-4	0.6	3
235	9.21e-4	0.8	4
110	1.15e-3	1	5
0	1.35e-3	1.12	6

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 4.** Valores de  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$  para el tercer supuesto

$a$	$b$	$\lambda$	NIVEL
13	0	0	0
11.9	2e-6	0.8	1
11.1	3.45e-6	1.6	2
10.35	4.81e-6	2.4	3
9.4	6.54e-6	3.2	4
8	9.09e-6	4	5
0	2.36e-5	4.8	6

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 5.** Nomenclatura de los estimadores por M.C.G.F.

<i>Diagonal de <math>\hat{\Omega}</math></i>	<i>Estimadores por M.C.G.F.</i>
elementos de $z_i' \hat{\alpha}$	SA
elementos de $(z_i' c \hat{\alpha})^2$	SB
elementos de $\exp(z_i' \alpha^*)$	SC
residuos por M.C.O. al cuadrado	R2
variable exógena	VE
variable exógena al cuadrado	VE2
estimación de la variable estimada del modelo del test de Breush-Pagan	B-P
estimación de la variable estimada del modelo del test de Harvey	HA
estimación de la variable estimada del modelo del test de White	W

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 6.** Nomenclatura de los estimadores pretest

<i>Contraste</i>	<i>Proced. estimación</i>	<i>Estimador pretest</i>
Test para cuando $\sigma_i^2 = z_i' \alpha$	R2	PSAR2
	VE	PSAVE
	VE2	PSAVE2
	W	PSAW
	SA	PSASA
Test para cuando $\sigma_i = z_i' \alpha$	R2	PSBR2
	VE	PSBVE
	VE2	PSBVE2
	W	PSBW
	SB	PSBSB
Test para cuando $\sigma_i^2 = \exp(z_i' \alpha)$	R2	PSCR2
	VE	PSCVE
	VE2	PSCVE2
	W	PSCW
	SC	PSCSC
Test de Breush-Pagan	R2	PB-PR2
	VE	PB-PVE
	VE2	PB-PVE2
	W	PB-PW
	BP	PB-PB-P
Test de Goldfeld-Quandt	R2	PG-QR2
	VE	PG-QVE
	VE2	PG-QVE2
	W	PG-QW
Test de Harvey	R2	PHAR2
	VE	PHAVE
	VE2	PHAVE2
	W	PHAW
	HA	PHAHA
Test de Picos	R2	PPR2
	VE	PPVE
	VE2	PPVE2
	W	PPW
Test de Spearman	R2	PSR2
	VE	PSVE
	VE2	PSVE2
	W	PSW
Test de White	R2	PWR2
	VE	PWVE
	VE2	PWVE2
	W	PWW

Fuente: Elaboración propia



## ENGLISH SUMMARY

### A COMPARATIVE ANALYSIS OF HETEROSCEDASTICITY PRETEST ESTIMATORS IN ECONOMETRICS MODELS. A MONTE CARLO STUDY

R. DIOS PALOMARES  
C. RODRÍGUEZ FONSECA  
Universidad de Córdoba\*

*In this paper a Monte Carlo experiment has been designed in order to analyze the performance of the tests for heteroscedasticity and the ordinary least squares, estimated generalized least squares and preliminary test estimators in the presence of heteroscedasticity. The data generation process considered in the experiment is a model based on three structures of the variance of the error term with different levels of heteroscedasticity for each one. Different estimation procedures are analyzed and the Monte Carlo power of the tests for heteroscedasticity and the efficiency of the different estimators are computed. The estimators are compared using the risk function criterion. The results show that the pretest estimators perform better than the estimators which always use the same estimation procedure.*

**Keywords:** Monte Carlo method, heteroscedasticity, power, generalized least squares, pretest estimator

**AMS Classification (MSC 2000):** 62J05 , 62J20

**JEL Classification:** C12, C52

---

\*Universidad de Córdoba. Departamento de Estadística, Econometría, Investigación Operativa y Organización de Empresas. Avda. Menéndez Pidal, s/n. 14004 Córdoba.

–Received March 1998.

–Accepted June 1999.

In this paper a Monte Carlo experiment has been designed in order to analyze the performance of the tests for heteroscedasticity and the ordinary least squares, estimated generalized least squares and preliminary test estimators in the presence of heteroscedasticity.

In the general linear model  $\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{e}$ , the error vector  $\mathbf{e}$  has a normal distribution with mean  $\mathbf{0}$  and variance-covariance matrix  $\Omega$ . If  $\Omega = \sigma_e^2 \mathbf{I}_T$  we would be in presence of a homoscedastic model, but in the practice there are cases in those that the homoscedasticity hypothesis can not be accepted since the variance-covariance matrix for  $\mathbf{e}$  is

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

that is, the diagonal elements of  $\Omega$  are not identical and, therefore, we are in the presence of a heteroscedastic model.

In the presence of a possible heteroscedastic error model the questions of interest are how to test for heteroscedasticity, how to model heteroscedasticity, and how to estimate the model optimally.

Methods have been developed to test for heteroscedasticity. Their power will depend on the true structure of the heteroscedasticity, among another things.

Tests for heteroscedasticity frequently used can be broken down into two groups. The first one is formed by specific tests for each of the following assumptions about the variance structure of the disturbance term (Fomby, 1984):  $\sigma_i^2 = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\sigma_i^2 = (\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2$  and  $\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})$ . The second group consists of the general or nonspecific tests. By nonspecific, we mean tests which are designed to detect heteroscedasticity yet the investigator does not possess a priori knowledge of a specific form of heteroscedasticity. Some tests that have been suggested for this purpose are: Breush-Pagan test (1979), Goldfeld-Quandt test (1965), Harvey test (1976), Peak test (Goldfeld and Quandt, 1965) and the Range Correlation test (Spearman, 1904). The power of some of these tests has been questioned by several authors: Carrol and Ruppert (1981), Glejser (1969), Godfrey (1978), Harrison and Mc Cabe (1979), Harvey and Phillips (1974) and Hausman (1978).

The parameter estimates can be obtained using:

- a) Ordinary Least Squares (O.L.S.) estimators  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' \mathbf{y}$ . If the model is homoscedastic then they are the best estimators.
- b) Estimated Generalized Least Squares (E.G.L.S.) estimators  $\tilde{\beta} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{y}$ . If matrix  $\Omega$  is properly estimated then these estimators are the best.

Estimated Generalized Least Squares (E.G.L.S.) estimation procedures can be divided in two groups, those dealing with specific functional forms of heteroscedasticity (Fomby, 1984) and those addressing unspecified functional forms, known as general estimation procedures. These general estimators use different methods to estimate matrix  $\Omega$ . Though the large sample properties of the estimate generalized least squares estimators in heteroscedasticity models are well defined, their small sample properties are not.

This problem can be framed in the context of the pretest estimation. We define a preliminary-test estimator of heteroscedasticity as an estimator which involves both OLS and EGLS estimators. The choice between the ordinary least squares estimator and the estimated generalized least squares estimator is made on the basis of a test for heteroscedasticity, and the resulting estimator is a preliminary test estimator whose sampling properties are distinct from either those of OLS estimator or EGLS estimator. Thus, the pretest estimator is equal to OLS if homoscedasticity is accepted, and EGLS if homoscedasticity is rejected.

Thus, a test plus an estimation procedure for  $\Omega$  define a pretest of heteroscedasticity. The pretest estimator is unbiased and its variance is between that of ordinary least squares and estimated generalized least squares.

The mean squared error or risk matrix is a criterion that may be used to measure the performance of the pretest estimators. It may be defined as

$$R(\beta, \hat{\beta}) = \text{cov}(\hat{\beta}) + (\text{bias } \hat{\beta})(\text{bias } \hat{\beta})'$$

Likewise, the risk can be analyzed on the basis of severity of the heteroscedasticity in the Data Generating Process (D.G.P.). If a parameter denoted  $\lambda$  expresses this severity the question of interest is to know the performance of the pretest estimator over the whole range of the parameter space of  $\lambda$ . In order to know this performance we use the following function

$$R(\lambda, \beta, \hat{\beta}) = E \left[ (\hat{\beta}_{(\lambda)} - \beta)(\hat{\beta}_{(\lambda)} - \beta)' \right] + \left[ E(\hat{\beta}_{(\lambda)}) - \beta \right] \left[ E(\hat{\beta}_{(\lambda)}) - \beta \right]'$$

which only can be obtained when  $\lambda$  and  $\beta$  are known, such in a Monte Carlo simulation.

Monte Carlo experiments have been used to evaluate the new methods from a theoretical point of view. Thus, Mikhail (1972) designs a Monte Carlo experiment to investigate the small sample properties of econometric estimators. Sowe (1973) presents a chronological classified bibliography of Monte Carlo studies in Econometrics. Hendry and Harrison (1974) study the finite sample behavior of ordinary and two-stage least squares. Kloek and van Dijk (1978) discuss Monte Carlo integration for bayesian estimation. Mizon and Hendry (1980) report a Monte Carlo analysis of tests of dynamic

specification. Surekha and Griffiths (1984) investigate the behavior of bayesian estimators assuming two different heteroscedastic error models. Gonzalo (1994) and Stock and Watson (1993), among others, addressed the issue of efficient estimation of the cointegration vectors with the Monte Carlo model based on three structures of the variance of the error term with different levels of heteroscedasticity for each one.

The data generation process considered in the present experiment is a model based on three structures of the variance of the error term with different levels of heteroscedasticity for each one.

Different estimation procedures are analyzed and the Monte Carlo power of the tests for heteroscedasticity and the efficiency of the different estimators are computed.

The estimators are compared using the risk function criterion. The results show that the pretest estimators perform better than the estimators which always use the same estimation procedure.

The main conclusions are the following:

- When heteroscedasticity exists, the variance of the EGLS estimators is not always smaller than that of the LS estimators, but it depends on the success at choosing the matrix  $\hat{\Omega}$
- The power of a test for heteroscedasticity depends on the severity of it, and the DGP is hardly relevant.
- From the point of view of the risk function, the performance of the pretest estimators depends on the estimation procedure whereas the corresponding test has a little influence.

Finally, we conclude the abstract with the following remarks:

- If one suspects heteroscedasticity is severe, the pretest estimators denoted  $P * EV$  performs well, which arises of combining any test with the estimation procedure denoted  $EV$ .
- If one believes that heteroscedasticity does not exist or is mild, the simple pretest estimators denoted  $PPEV$  and  $PSEV$  are the best estimators.
- If one does not know anything about the structure of the variance of the error term, the best thing is to use the pretest estimator denoted  $PGQEV$ , which arises of combining the Goldfeld-Quandt test with the estimation procedure denoted  $EV$ .
- It is clear that the pretest estimators perform better than the estimators which always use the same estimation procedure.