

ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO b DE RICHTER A PARTIR DE LAS MEDIDAS IMPRECISAS DE INTENSIDAD EPICENTRAL

S. FORCADA*

J.J. EGOZCUE*

Universitat Politècnica de Catalunya

El objetivo de este trabajo es la estimación del parámetro exponencial de Richter que determina la distribución de probabilidad de la variable intensidad de movimientos sísmicos que se producen en una determinada zona. Las medidas de intensidad sísmica son, por propia naturaleza, imprecisas y por ello se propone estimar el parámetro mediante un procedimiento que incorpore la imprecisión de los datos. Se cuantifica la imprecisión asignando a cada medida de intensidad una distribución de probabilidad sobre el rango de intensidades. Cada medida imprecisa de intensidad se puede entonces interpretar como una realización de una variable aleatoria valorada en el espacio de Hilbert $l^2(R)$ cuya esperanza se identifica con la distribución de la variable intensidad. La estimación del parámetro se obtiene entonces a través de la minimización de la distancia cuadrática en $l^2(R)$ entre la distribución teórica de la variable intensidad y la media muestral de las medidas imprecisas de intensidad. Se puede demostrar que el estimador así obtenido proporciona bajo ciertas hipótesis, razonables en la práctica, un estimador del parámetro asintóticamente centrado y normal. Se aplica el método a la obtención de los estimadores del parámetro de Richter para dos catálogos sísmicos concretos, uno real correspondiente a una zona del Pirineo Oriental y otro simulado. Los resultados se comparan con las estimaciones de máxima verosimilitud y Bayes obtenidas al considerar los datos como precisos.

Estimation of Richter b parameter based on imprecise measures of epicentral intensity

Keywords: Point estimation, maximum likelihood, imprecise data, random elements, Hilbert spaces, epicentral intensity.

*S. Forcada y J.J. Egozcue. Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya. TERRASSA.

–Article rebut el febrer de 1995.

–Acceptat el març de 1996.

1. INTRODUCCIÓN

En la práctica de la ingeniería sísmica es preciso determinar la posibilidad de que una cierta obra civil se vea afectada por una acción sísmica durante determinado período de tiempo. Este tipo de cálculos suele recibir el nombre genérico de «evaluación de la peligrosidad sísmica». Entre los parámetros que determinan la peligrosidad se encuentran los períodos de retorno de distintos tipos de terremotos y la proporción entre distintos tipos de acción.

En las regiones de sismicidad moderada surge una problemática específica relacionada con la calidad de los datos disponibles. En dichas regiones, los períodos de retorno a estimar pueden ser muy largos, frecuentemente por encima de los cien años, y, en consecuencia, para proceder a su estimación es necesario disponer de los datos recogidos a lo largo de varios siglos. Obviamente estos datos no son homogéneos en su calidad y, además, pueden ser incompletos.

Por ejemplo, en el Pirineo Oriental, no se dispone de datos instrumentales hasta 1914 y estos datos no son completos hasta los años sesenta o más tarde. Se hace, por tanto, necesario utilizar la intensidad sísmica como parámetro para caracterizar el «tamaño» de un terremoto. Esta opción permite la extensión de los catálogos sísmicos más allá del período de tiempo en que se dispone de datos instrumentales.

La intensidad sísmica se define a partir de los efectos que un terremoto produce en un lugar. Se trata de los efectos sobre edificios, ruido percibido, vibraciones de ciertos objetos, alteraciones de topografía, e incluso reacciones de la población frente al terremoto. En base a esta información se construye de forma cualitativa una escala discreta de intensidades que va de uno a doce. Nos referiremos aquí a la escala MSK de uso en Europa (ver [29]).

La definición de los distintos grados indica claramente que la intensidad que se asigna a un terremoto depende de muchos factores que varían con los tiempos históricos. Por ejemplo, cultura y dispersión de la población, calidad de los edificios, posición del epicentro respecto de los núcleos de población, etc.

En la actualidad la intensidad se evalúa mediante encuestas sobre la población afectada. El número de personas encuestadas es, aún hoy en día, muy variable (normalmente la extensión de la muestra es muy baja) y la muestra no se puede considerar aleatoria.

Además, el procesado de las encuestas para deducir la intensidad en el epicentro adolece de un enorme grado de subjetividad. La situación es más precaria para datos correspondientes a siglos anteriores al XX. Para esos terremotos la intensidad epicentral debe deducirse de informaciones documentales casi siempre parciales y que no tienen por qué adecuarse a la definición de la escala de intensidades.

En consecuencia, la intensidad sísmica, incluso en tiempos recientes es un dato impreciso. Un terremoto consignado, en un catálogo sísmico, como de intensidad epicentral siete en el siglo XVIII podría haber sido de intensidad ocho si el epicentro no coincidió con un núcleo de población, pero también podría corresponder a intensidad seis si los informes consultados tendieron a exagerar los daños o los efectos sobre la población. El margen de error puede incluso extenderse a otros grados de intensidad. En este planteamiento subyace la idea de que cada terremoto posee una intensidad epicentral «verdadera» pero desconocida.

Otro factor que interviene críticamente en la utilización de catálogos históricos de terremotos es la completitud de los datos. Ciertamente algunos sucesos sísmicos pueden quedar ignorados en los catálogos, ya sea porque no afectaron a poblaciones, porque no se consignaron los efectos o porque los informes documentales se perdieron. Esto involucra especialmente a las intensidades más bajas. En nuestro enfoque del problema no contemplamos la problemática derivada de la completitud de los datos, limitándonos a considerar catálogos supuestamente completos.

El problema de la evaluación de la peligrosidad sísmica teniendo en cuenta la imprecisión de los datos sólo ha sido abordado tímidamente. Ello es debido, en parte, a que los desarrollos más importantes se han realizado en zonas de alto riesgo en las que se dispone de muchos datos instrumentales. Así, los métodos tradicionales (ver [7], [18], [19]) sólo tienen en cuenta incertidumbres en la atenuación sísmica para estudiar la peligrosidad local, y de forma un tanto vaga la imprecisión de la localización del epicentro.

Posteriormente se ha comprendido que la mera estima puntual de probabilidades de ocurrencia no informa suficientemente al usuario de los resultados. Por ello se han introducido modificaciones en los métodos clásicos. Especial mención merecen los métodos bayesianos que permiten obtener fácilmente estimas por intervalo de probabilidad (ver [5], [9], [11], [22]). Pero la introducción de los errores de la intensidad en la estimación de los parámetros de la peligrosidad, desde distintas perspectivas, es más reciente (ver [6], [10], [12], [14]).

La escasez de técnicas estadísticas para analizar datos imprecisos de intensidad es una de las razones por las que las intensidades se anotan, en la mayor parte de catálogos, como datos precisos. A lo sumo, en algunos catálogos se consignan códigos de fiabilidad de las intensidades. Resulta, por tanto, de interés ensayar diferentes metodologías de estimación con datos imprecisos así como la codificación de los mismos.

Existen diversos intentos de utilizar datos intervalares (ver [1], [20]) y parámetros borrosos (ver [15], [26], [31]) en el problema de la peligrosidad sísmica (ver [14]). No obstante, el enfoque intervalar implica la suposición de un comportamiento pro-

probabilísticamente uniforme en el intervalo de error, lo que no refleja adecuadamente muchas situaciones reales.

El planteamiento con datos y parámetros borrosos completa, en cierto sentido, las técnicas intervalares. Sin embargo conlleva la interpretación y manejo del concepto de parámetro borroso, que no es práctica usual en la ingeniería sísmica ni en la evaluación de la peligrosidad sísmica.

Las técnicas de estimación bayesiana (ver [3], [25]) han sido utilizadas ampliamente en el análisis de la peligrosidad sísmica (ver [7], [11]). Sin duda, estos métodos bayesianos son una potente herramienta para resolver problemas asociados a la evaluación de la peligrosidad sísmica, con la ventaja de una interpretación clara desde un punto de vista probabilístico. No obstante su utilización, incluso en casos muy sencillos, puede, como veremos, presentar graves dificultades.

En este trabajo abordamos el problema de la estimación del parámetro de Richter cuando la imprecisión en los datos de intensidad se cuantifica mediante distribuciones de probabilidad sobre el rango de intensidades. A partir de aquí la muestra de intensidades imprecisas se entiende como una muestra de una variable aleatoria a valores en un espacio de Hilbert. Ello nos permite la utilización de ciertos argumentos de carácter geométrico que combinados con los de tipo probabilístico, nos llevan a la obtención de un estimador asintóticamente centrado y normal. Los resultados teóricos se aplican a la obtención de los estimadores en dos casos prácticos concretos. Uno corresponde a un catálogo sísmico real y el otro a un catálogo simulado.

2. EL MODELO DE INTENSIDAD

Nos planteamos como objetivo estimar el parámetro exponencial (parámetro de Richter) que determina la frecuencia relativa de las diferentes intensidades, en una determinada región sísmica, a partir del catálogo correspondiente de intensidades.

Consideraremos las intensidades sísmicas $i = i_0, \dots, i_s$, donde i_0 e i_s son respectivamente las intensidades menor y mayor de todas las consideradas. El valor de i_0 se fija normalmente en función del interés en ingeniería sísmica y frecuentemente es $i_0 = 5$. La intensidad superior i_s suele determinarse a partir de las intensidades máximas registradas en la región y frecuentemente $i_s = 10, 11, \text{ ó } 12$.

En general se procede de la manera siguiente: dado un terremoto, se le asigna una intensidad epicentral, I , entre los valores i_0 e i_s . I es un experimento multinomial y en consecuencia la distribución de la variable aleatoria $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, queda especificada

por las probabilidades

$$p_i = P(I = i), \quad i = i_0, \dots, i_s \quad \text{con} \quad \sum_{i=i_0}^{i_s} p_i = 1.$$

Sin embargo, tradicionalmente se suele considerar que estos parámetros están ligados por alguna ley exponencial. Esto proviene del hecho experimental (ver [27]) de que las magnitudes sísmicas a gran escala obedecen a una distribución exponencial, conocida con el nombre de ley de Richter.

Por analogía, se suele considerar que las intensidades epicentrales en una zona también siguen este tipo de distribución en su versión discreta. De las diferentes versiones existentes hemos adoptado aquí el siguiente modelo acumulado.

$$\begin{aligned} P(I \geq i) &= e^{-b(i-i_0)} & i &= i_0, \dots, i_s \\ P(I \geq i_0) &= 1, & P(I > i_s) &= 0 \end{aligned}$$

que da lugar a la función de probabilidad

$$\begin{aligned} p_i &= P(I = i) = e^{-b(i-i_0)}(1 - e^{-b}), & i &= i_0, \dots, i_{s-1} \\ p_s &= P(I = i_s) = e^{-b(i_s-i_0)}. \end{aligned}$$

El parámetro b determina ahora la distribución de I y lo denominaremos parámetro de Richter.

El modelo de comportamiento probabilístico más utilizado para describir las ocurrencias de terremotos en un período de tiempo es el de Poisson. Se han propuesto diversos modelos alternativos (Ver [24], [28], [30]) que se caracterizan por ser no estacionarios y depender de múltiples parámetros, lo cual los hace poco utilizables en zonas de baja sismicidad donde escasean los datos.

3. ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO b CUANDO SE CONSIDERA LOS DATOS PRECISOS

Supongamos que disponemos de un catálogo de datos sísmicos completo a lo largo de un tiempo T en el que se han registrado m sucesos cuyas intensidades, supuestas precisas, son y_1, \dots, y_m . Suponemos además que el comportamiento probabilístico de esta muestra corresponde a la función de probabilidad dada por la Ley de Richter.

Si m_1 es el número de veces que los valores $i < i_s$ aparecen en la muestra, entonces la función de verosimilitud es

$$L(y_1, \dots, y_m; b) = e^{-b(\sum_{j=1}^m (y_j - i_0))} (1 - e^{-b})^{m_1}$$

y consecuentemente el estimador máximo verosímil es

$$\hat{b} = \log \left(\frac{m_1}{\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)} + 1 \right)$$

cuya varianza asintótica viene dada por:

$$\begin{aligned} \hat{V}(b) &= \frac{1}{nE_b \left[\left(\frac{\partial}{\partial b} \log P_l(b) \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{i=i_0}^{i_s-1} \left(\frac{e^{-b}}{1-e^{-b}} - (i-i_0) \right)^2 (1-e^{-b})e^{-b(i-i_0)} + (i_s-i_0)^2 e^{-b(i_s-i_0)}} \end{aligned}$$

El intervalo de confianza asintótico se obtendrá sustituyendo b en esta expresión por el valor estimado \hat{b} y tomando el valor resultante como la varianza del estimador, que a su vez se supone normal. Si escribimos $\hat{V}(\hat{b})$ para indicar la varianza asintótica así obtenida, el intervalo de confianza $1 - \alpha$ será

$$(\hat{b} - z\sqrt{\hat{V}(\hat{b})}, \hat{b} + z\sqrt{\hat{V}(\hat{b})})$$

donde z representa el punto para el que la función de distribución correspondiente a una distribución normal estandarizada toma valor igual a $1 - \frac{\alpha}{2}$. Si adoptamos el enfoque bayesiano para estimar b , nos encontramos con que no se dispone de funciones de densidad a priori conjugadas de fácil manejo.

La distribución gama de parámetros β, q parece adecuada para modelar la distribución a priori de b ya que dicho parámetro b es positivo, y a priori debería suponerse unimodal.

$$f'_b(b) = \frac{\beta^q}{\Gamma(q)} b^{q-1} e^{-\beta b}$$

A partir de la función de verosimilitud $L(y_1, \dots, y_m; b) = (1 - e^{-b})^{m_1} e^{-b(\sum_{j=1}^m (y_j - i_0))}$ calculamos la función de densidad a posteriori:

$$f''_b(b) = \frac{1}{C} b^{q-1} (1 - e^{-b})^{m_1} e^{-b(\beta + (\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)))} \quad 0 < b$$

donde la constante C queda determinada (ver [13]) por:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \int_0^{+\infty} b^{q-1} (1 - e^{-b})^{m_1} e^{-b(\beta + (\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)))} db = \\ &= \Gamma(q) (-1)^{m_1} \sum_{j=1}^m (-1)^k \binom{m_1}{k} \frac{1}{(m_1 + \beta + (\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)) - k)^q} \end{aligned}$$

Si se toma la esperanza a posteriori de b como estimador bayesiano puntual se tiene, resolviendo integrales similares a la anterior:

$$E''(b) = q \frac{\sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m_1}{k} (m_1 + \beta + (\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)) - k)^{-(q+1)}}{\sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m_1}{k} (m_1 + \beta + (\sum_{j=1}^m (y_j - i_0)) - k)^{-q}}$$

El intervalo de probabilidad corresponderá a los percentiles $\frac{\alpha}{2}$, $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución a posteriori.

Puede utilizarse una función de densidad a priori impropia no informativa (ver [3], [25]) poniendo en la distribución a posteriori $q = 1$, $\beta = 0$. Con ello, la moda de la densidad a posteriori coincide con el estimador máximo verosímil.

Observemos que en este caso la densidad a priori no es la conjugada de la distribución de la variable I . La densidad a posteriori no corresponde a una densidad usual y, por tanto, el cálculo de los percentiles para el intervalo de probabilidad es algo más costoso que cuando no es así.

4. DATOS IMPRECISOS DE INTENSIDAD

En los catálogos sísmicos, normalmente, se especifica el momento en que ocurrió el suceso, su posición epicentral, y una estima de su intensidad epicentral. De este primer catálogo se extraen los sucesos que corresponden a la región estudiada, al rango de intensidades de interés y que además, están dentro del intervalo de tiempo en el que se supone que el catálogo está completo para cada intensidad. Después de esta primera depuración de los datos procederemos a la codificación de su imprecisión.

Asignaremos una distribución de probabilidad a cada suceso, de manera que dicha distribución constituirá el dato impreciso de intensidad epicentral. Así, por ejemplo, supongamos que en el catálogo consta que el suceso ω ha sido de intensidad k . Entonces se asocia a ω el dato impreciso $\chi(\omega)$ consistente en una distribución de probabilidad sobre i_0, \dots, i_s , que para cada intensidad $i = i_0, \dots, i_s$ toma el valor $\chi(\omega)(i)$. Este valor, $\chi(\omega)(i)$, se interpretará como la probabilidad de que el suceso ω , consignado como de intensidad k en el catálogo, haya sido en realidad de intensidad epicentral

i. Si disponemos de m sucesos $\omega_1, \dots, \omega_m$, con sus respectivas distribuciones de probabilidad $\chi(\omega_j)$ sobre los valores de intensidad, escribiremos, a fin de simplificar la notación, $\chi_1 = \chi(\omega_1), \dots, \chi_m = \chi(\omega_m)$. Entonces la probabilidad $\chi(\omega_j)(i)$ de un valor i de intensidad según $\chi(\omega_j)$ se escribirá $\chi_j(i)$

De este modo, a cada suceso ω del espacio de probabilidad se asocian: a) una intensidad epicentral «verdadera» $I(\omega)$, que no es directamente observable y que por tanto se desconoce y b) una distribución de probabilidad representada por la función de probabilidad $\chi = \chi(\omega)$. En términos generales el problema que se nos plantea es el de estimar el parámetro asociado a la distribución de probabilidad de una variable $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, cuando la información de que se dispone para realizarla es una distribución de probabilidad. Al realizar m repeticiones independientes de un mismo experimento, la muestra que se obtiene consiste en m distribuciones de probabilidad que generalmente no son iguales, y es a partir de estos datos que queremos estimar el parámetro de la distribución de X . Observemos que si $I(\omega_1) = I(\omega_2)$, ello no implica necesariamente que $\chi_1 = \chi(\omega_1)$ sea igual a $\chi_2 = \chi(\omega_2)$ ya que en general serán diferentes. También puede suceder, tal como lo estamos planteando, que $\chi(\omega_1) = \chi(\omega_2)$ y $I(\omega_1) \neq I(\omega_2)$.

Los catálogos sísmicos tradicionales sólo especifican la intensidad epicentral de cada suceso y, a lo sumo, una indicación más o menos vaga de su precisión. Por tanto, la obtención de un catálogo de datos imprecisos de intensidad comporta una tarea larga de revisión de datos y documentos históricos. A continuación presentamos una evaluación preliminar de los datos contenidos en el catálogo del Pirineo Oriental que más tarde utilizaremos para ilustrar las técnicas de estimación.

La zona del Pirineo Oriental considerada está definida por una poligonal cuyos vértices son los de la tabla 1 y que se señalan en el mapa adjunto de la zona (Fig. 1).

Esta zona ya fue utilizada en [9] en un estudio con datos supuestamente precisos. El catálogo, proviene de Mezcua y Martínez ([21]) y ha sido complementado con otras informaciones provenientes del Servei Geològic de la Generalitat de Catalunya (ver [4]).

Tabla 1
Pirineo Oriental

Long.	0.30	1.80	2.30	3.60	3.00	0.90
Lat.	42.60	42.00	42.10	42.20	43.20	43.00

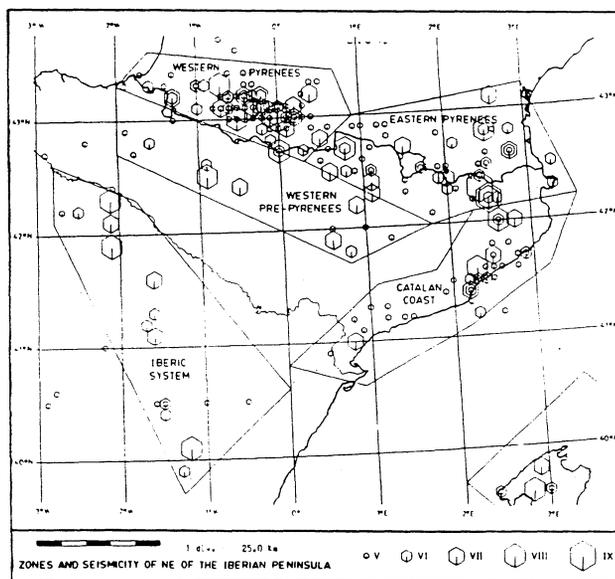


Figura 1

Dependiendo de la fecha y de la intensidad que consta en el catálogo se ha asignado una distribución de probabilidad al dato impreciso. La tabla 2 muestra los diferentes tipos de función de probabilidad (dato impreciso) que se suponen centradas en la intensidad que figura en el catálogo original.

Tabla 2

Período	Intensidad	Catálogo impreciso				
		$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$
1000-1800	$5 \leq i \leq 7$	0.05	0.10	0.70	0.10	0.05
1000-1800	$i \geq 8$	0.00	0.10	0.75	0.10	0.05
1801-1914	$5 \leq i \leq 6$	0.01	0.12	0.75	0.12	0.00
1801-1914	$i \geq 7$	0.00	0.12	0.80	0.08	0.00
1915-1950	i	0.00	0.10	0.80	0.10	0.00
1951-1980	i	0.00	0.07	0.90	0.03	0.00
1981-1990	i	0.00	0.04	0.95	0.01	0.00
1427-1428	$i = 10$	0.00	0.10	0.60	0.20	0.10

De esta forma disponemos de una muestra imprecisa de la variable intensidad I que notaremos:

$$\chi_1 = (\chi_1(i_0), \dots, \chi_1(i_s)), \chi_2 = (\chi_2(i_0), \dots, \chi_2(i_s)), \dots, \chi_m = (\chi_m(i_0), \dots, \chi_m(i_s)).$$

Sin duda, la asignación sistemática de estas funciones de probabilidad viene afectada por una componente fuertemente subjetiva. Su modificación y mejora corresponde a un largo y costoso estudio de los datos históricos. En este sentido, los estudios históricos iniciados bajo los auspicios del Servei Geològic de la Generalitat de Catalunya pueden aportar en un futuro próximo mejoras importantes. La figura 2 proporciona una representación gráfica del catálogo del Pirineo Oriental, con datos imprecisos. Cada línea vertical corresponde a la probabilidad de que el terremoto ocurrido en la fecha sobre la que se encuentra dicha línea, haya sido de la intensidad correspondiente. En esta representación gráfica, de cara a la información visual que proporciona, hay que tener en cuenta dos factores. En primer lugar, sucede a menudo que para un mismo año se superponen distintos terremotos en las diferentes intensidades. Ello significa que el conjunto de todas las probabilidades sobre un mismo año no constituyen una distribución de probabilidad. En segundo lugar la representación es general para todos los registros y no para cada período de completitud del catálogo.

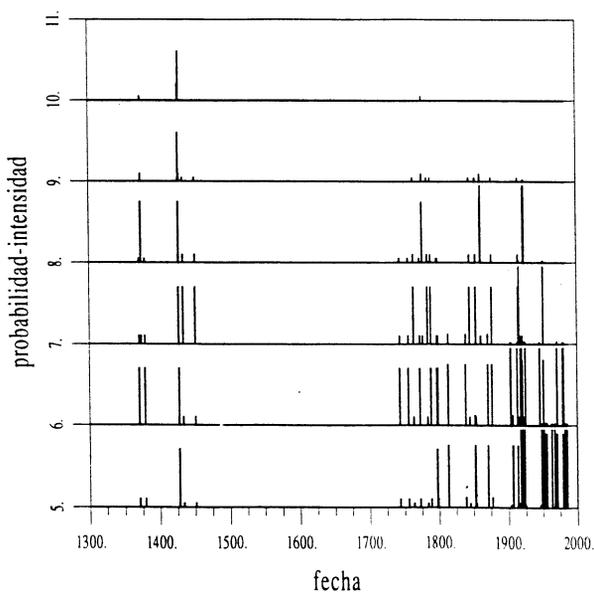


Figura 2
Pirineo Oriental

Desde un punto de vista práctico, una primera aproximación al problema de la estimación de b a partir de estos datos imprecisos, nos lo proporciona la posibilidad de obtener diversas muestras precisas de la variable I a partir de la realización de las distintas distribuciones χ_j de la muestra imprecisa. Cada vez que realizamos un elemento de la muestra imprecisa obtenemos una muestra «precisa» de la variable inicial I que nos da inmediatamente el estimador de máxima verosimilitud \hat{b} del parámetro b . Si repetimos el proceso un determinado número de veces obtendremos un número de estimadores igual al número de repeticiones, y podremos tomar como estimador el promedio de todos ellos.

Desde la óptica bayesiana, podemos plantear a nivel teórico la estimación de b incluyendo la imprecisión de los datos en el cálculo de la densidad a posteriori realizado en el apartado 3. Si consideramos la muestra de I imprecisa, disponemos de las distribuciones χ_1, \dots, χ_m . Llamamos Y_j a la variable aleatoria, que proporciona el valor de la intensidad en la observación j -ésima y que por tanto su distribución de probabilidad es χ_j . Entonces el número de veces que observaremos sucesos para los que $i < i_y$ es una variable aleatoria que indicaremos por M_1 . La densidad a posteriori es

$$f''_{b|M_1, Y_1, \dots, Y_m}(b|m_1, y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{C} b^{q-1} (1 - e^{-b})^{M_1} e^{-b(\beta + (\sum_{j=1}^m (Y_j - i_0)))} \quad 0 < b$$

y al ser M_1, Y_1, \dots, Y_m variables aleatorias, la distribución a posteriori de b es en realidad la distribución marginal de b . O sea:

$$\tilde{f}''_b(b) = \sum_{m_1, y_1, \dots, y_m} f''_b(b) P(M_1 = m_1, Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m)$$

Al no poder calcular la distribución conjunta de M_1, Y_1, \dots, Y_m no se puede obtener $\tilde{f}''_b(b)$.

5. ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO b CUANDO SE CONSIDERA LOS DATOS IMPRECISOS

Tenemos la variable aleatoria intensidad $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuya distribución de probabilidad corresponde a la ley de Richter del apartado 2 y que indicaremos por P_b . Queremos estimar b a partir de una muestra imprecisa, en el sentido del apartado 4, de la variable I . Sea χ_1, \dots, χ_m dicha muestra.

Enfocaremos el problema de estimación de b en el contexto de elementos aleatorios en espacios de Hilbert. Para abordar el problema utilizaremos los resultados de [23] sobre elementos aleatorios en espacios métricos separables.

Representaremos cada distribución de probabilidad, $(p_{i_0}, \dots, p_{i_s})$ definida sobre el rango de posibles intensidades, i_0, \dots, i_s , mediante el elemento $(0, \dots, 0, p_{i_0}, \dots, p_{i_s}, 0, \dots)$ del espacio vectorial l^1 de las sucesiones de números reales absolutamente sumables. En estos términos, la ley de Richter corresponde a

$$P_b = \left(0, \dots, 0, 1 - e^{-b}, \dots, e^{-kb}(1 - e^{-b}), \dots, e^{-(s-1)b}(1 - e^{-b}), e^{-sb}, 0, \dots \right)$$

Al ser l^1 subespacio del espacio de Hilbert l^2 de las sucesiones de números reales de cuadrado sumable, interpretaremos una muestra imprecisa

$$\chi_1 = (\chi_1(i_0), \dots, \chi_1(i_s)), \dots, \chi_m = (\chi_m(i_0), \dots, \chi_m(i_s))$$

de la variable I , como una muestra de una variable aleatoria χ a valores en l^2 . Esto es, una función medible

$$\chi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (l^2, \mathcal{B}_2)$$

con \mathcal{B}_2 la σ -álgebra generada por los abiertos de l^2 según la norma definida por $\|\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Consideremos el conjunto $M = \left\{ (0, \dots, 0, p_{i_0}, \dots, p_{i_s}, 0, \dots) \in l^1 \mid p_{i_k} \geq 0, \sum_{k=0}^s p_{i_k} = 1 \right\} \subset l^1$ y observemos que $\chi(\Omega) \subset M$

Las realizaciones de χ constituyen la información que extraemos de las realizaciones de la intensidad I . Para que esta información pueda ser fiable deberemos suponer que las distribuciones de probabilidad que nos proporciona la variable χ no son exageradamente arbitrarias sino que son coherentes con los resultados de I . Es decir, los comportamientos probabilísticos de I y χ han de estar relacionados de manera razonable. Se supondrá, por hipótesis, que la esperanza $E(\chi) = \int_{\Omega} \chi(\omega) dP$ de la variable χ coincide con la distribución de probabilidad de la variable I . Esto es:

$$E(\chi) = P_b.$$

Esta hipótesis puede justificarse ya que $E(\chi) \in M$, y la probabilidad que asigna la distribución de probabilidad $E(\chi)$ a cada i_k , con $k = 0, \dots, s$, es $E(\chi)(i_k) = \int_{\Omega} \chi(\omega)(i_k) dP$. Es decir, $E(\chi)$ asigna a cada posible valor de intensidad i_k la probabilidad esperada de que $I = i_k$. Parece adecuado entonces considerar que el comportamiento probabilístico de χ sea tal que dicha probabilidad esperada coincida con la probabilidad de i_k dada por P_b .

Por la ley de los grandes números, para variables aleatorias valoradas en espacios de Hilbert, la distribución promedio muestral $\bar{\chi}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_i$ converge en probabilidad

a P_b , lo cual sugiere estimar b mediante el valor que minimiza, en l^2 , la distancia cuadrática $\|\bar{\chi}_m(\omega) - P_b\|^2$ entre $\bar{\chi}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \chi_i$ y P_b .

Obsérvese que los valores que minimizan esta distancia cuadrática son los mismos que minimizan la función

$$\mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b) = \sum_{i=1}^m \|\chi_i - P_b\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle \chi_i - P_b, \chi_i - P_b \rangle.$$

Llamaremos \hat{b}_m al estimador de b tal que $\min_{\{b\}} \mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b) = \mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; \hat{b}_m)$ obtenido a través de la ecuación $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0$.

Suponiendo que $E \left[\left(\frac{\partial}{\partial b} \|\chi - P_b\|^2 \right)^2 \right]$ es finita y teniendo en cuenta que la función $\mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b)$ es tal que $\frac{1}{n} \frac{\partial^3}{\partial b^3} \mathcal{L}(b)$ está acotada en el entorno de todo punto \bar{b} , se comprueba, mediante argumentos paralelos a los de los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 de [17] cap. 6, que la ecuación $\frac{\partial}{\partial b} \mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b) = 0$ tiene, con probabilidad tendiendo a uno cuando $m \rightarrow \infty$, una raíz \hat{b}_m que corresponde a un mínimo de $\mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b)$ cumpliéndose además que la sucesión $\sqrt{m}(\hat{b}_m(\chi_1, \dots, \chi_m) - b)$ converge en ley a una variable normal de esperanza cero y varianza

$$\frac{E \left(\left\langle \frac{\partial P_b}{\partial b}, \chi - P_b \right\rangle^2 \right)}{\left\| \frac{\partial P_b}{\partial b} \right\|^4}$$

6. CASO PRÁCTICO DE ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO DE RICHTER

Hemos aplicado el desarrollo anterior a la estimación del parámetro de Richter para dos catálogos sísmicos. Uno de ellos es un catálogo obtenido por simulación y el otro es el catálogo presentado en el apartado 4 correspondiente a la zona del Pirineo Oriental.

El catálogo del Pirineo corresponde al período comprendido entre 1940 y 1987 en el que se registraron 20 terremotos de intensidades comprendidas entre 5 y 10. En el catálogo simulado, en un período de 750 años, se han registrado 362 terremotos de intensidades comprendidas también entre 5 y 10. En el caso del Pirineo Oriental se asocian los modelos de imprecisión de la tabla 2 tal como se explicó en el apartado 4 y en el caso del catálogo simulado la asociación se hace por sorteo, en proporciones preestablecidas y con $b = 1$. La figura 3 representa el catálogo simulado de manera análoga a como se representó el catálogo del Pirineo Oriental, en la figura 2.

En primer lugar se ha realizado la estimación mediante las técnicas estándar de máxima verosimilitud y Bayes considerando los datos como precisos.

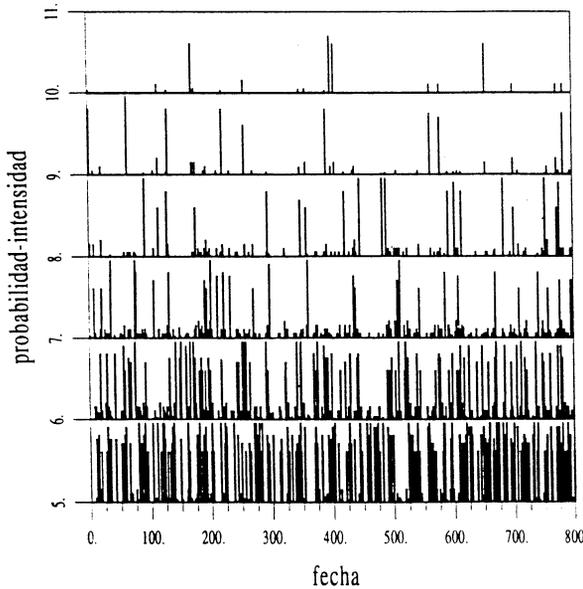


Figura 3

Catálogo Impreciso Simulado

En segundo lugar se ha procedido a la estimación de b después de haber modelado la imprecisión de los datos muestrales según las distribuciones de la tabla 2. Las estimas se han realizado por simulación y mediante \mathcal{L} . Tal como ya se apuntó anteriormente, la estima bayesiana con imprecisión no es en este caso viable.

Por último se ha utilizado la función \mathcal{L} para estimar b cuando suponemos que la imprecisión se anula. Partíamos de unos registros puntuales iniciales a los que se había asignado un modelo de imprecisión. Si ahora sustituimos los modelos de imprecisión por distribuciones de probabilidad que asocian probabilidad uno al valor registrado y cero a los demás valores, estamos anulando la imprecisión introducida anteriormente, pero a pesar de ello podemos llevar a cabo la estimación de b con la misma técnica ideada para tratar el caso de datos imprecisos. Los resultados se presentan en la tabla 3.

Las filas ML(datos precisos) y Bayes(datos precisos) corresponden a las estimaciones de b cuando se supone que en los registros no ha habido imprecisión y se

acepta como buena la intensidad consignada en el catálogo. Se dan aquí (Columna Est. punt.) las estimas de máxima verosimilitud y bayesiana del parámetro. Se indica también (Columna Std. A) la desviación típica asintótica para el caso del estimador máximo verosímil y la desviación típica de la distribución a posteriori para el caso de la estima bayesiana.

En las dos filas siguientes se tienen los resultados de las diferentes estimaciones del parámetro cuando se supone que los registros de que se dispone son imprecisos y que además dicha imprecisión se cuantifica a través de los modelos de imprecisión de la tabla 2. En este caso la estimación de b se lleva a cabo por simulación, primero y luego utilizando \mathcal{L} . Como se indicó en 4, la obtención de la estima simulada se realiza mediante el promedio de los distintos estimadores máximo verosímiles obtenidos para cada muestra simulada.

Tabla 3

	Est. punt.	Std. A	Std. BS	$d(l^2)$
ML(datos precisos)	0.8935	0.04882		
Bayes(datos precisos)	0.8963	0.04890		
Sim(datos imprecisos)	0.8158			0.02067
\mathcal{L} (datos imprecisos)	0.7920	0.04564	0.04492	0.01679
\mathcal{L}_8 (imprec. nula)	0.8935	0.06318	0.06044	0.03104

(a) *Estimación del parámetro b de Richter. Catalogo Simulado*

	Est. punt.	Std. A	Std. BS	$d(l^2)$
ML(datos precisos)	1.253	0.2991		
Bayes(datos precisos)	1.334	0.3129		
Sim(datos imprecisos)	1.244			0.1098
\mathcal{L} (datos imprecisos)	1.034	0.2951	0.3003	0.07458
\mathcal{L}_8 (imprec. nula)	1.040	0.3172	0.3191	0.08376

(b) *Estimación del parámetro b de Richter. Pirineo Oriental*

La segunda columna (Std. A) da la desviación típica asintótica estimada del estimador \hat{b} , obtenido con la función \mathcal{L} , según su expresión dada en el apartado 5, en donde

$E\left(\left\langle \frac{\partial P_b}{\partial b}, \chi - P_b \right\rangle^2\right)$ se estima mediante $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left\langle \frac{\partial P_b}{\partial b} \Big|_{b=\hat{b}}, \chi_i - P_{\hat{b}} \right\rangle^2\right)$ y $\left\| \frac{\partial P_b}{\partial b} \right\|^4$ mediante $\left\| \frac{\partial P_b}{\partial b} \Big|_{b=\hat{b}} \right\|^4$.

En la tercera columna (Std. BS) se tiene la estimación de la desviación típica de \hat{b} obtenida mediante bootstrap sobre la muestra imprecisa, en la que se ha muestreado mil veces. Observemos que estas dos estimaciones son prácticamente coincidentes.

En la última columna se aporta una medida del grado de cumplimiento de la hipótesis $E(\chi) = P_b$. Para verificar el cumplimiento de esta hipótesis es preciso conocer el verdadero valor del parámetro b y la esperanza de χ ; ello evidentemente no es posible y, en principio, aceptaremos que en nuestro caso y para nuestros datos la hipótesis se cumple. A pesar de ello, al converger $\tilde{\chi}_m$ a $E(\chi)$, la distancia en l^2 entre $\tilde{\chi}_m$ y $P_{\hat{b}}$, con \hat{b} el estimador correspondiente de b , nos proporciona una cierta medida del grado de cumplimiento de esta hipótesis. Indicamos esta distancia en las tablas mediante $d(l^2)$. Por tanto, cuanto menor sea el valor que aparece en la cuarta columna más podemos confiar en el cumplimiento de la hipótesis establecida. Los valores numéricos obtenidos indican que en el caso del catálogo simulado las distribuciones $P_{\hat{b}}$ son prácticamente iguales a la distribución $\tilde{\chi}$, y en el caso del catálogo de Catalunya tampoco son muy diferentes. Podemos suponer cómodamente, entonces, que la hipótesis se cumple en ambos casos.

En la cuarta fila (\mathcal{L}_6) se presentan los resultados análogos a los de la tercera, pero en este caso, reduciendo la imprecisión a cero. Es decir, cuando suponemos que los datos son precisos y lo expresamos considerando que la muestra obtenida la constituyen distribuciones con probabilidad uno en los registros iniciales. Se recogen aquí los resultado de aplicar la función \mathcal{L} anterior a este caso, siendo el significado de los distintos apartados análogo al de los correspondientes apartados de la tercera fila.

Observemos que tanto en el caso del catálogo simulado como en el real se obtiene un valor estimado de b menor cuando se considera los datos imprecisos que cuando se hace nula la imprecisión. Ello es coherente con el hecho de que b mide el decrecimiento de la frecuencia relativa con la intensidad ($\log P(I \geq i) = -b(i - i_0)$). La proporción de terremotos es más grande para intensidades pequeñas y cuando se modela la imprecisión tal como hemos hecho aquí la cesión de probabilidades que se produce de unas intensidades a otras redundando en un aumento de las probabilidades en las intensidades superiores y, en consecuencia, en un decrecimiento de la probabilidad con la intensidad y en la obtención de una estima menor que la obtenida con datos precisos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Arstein, Z.** (1974). «On the Calculus of Closed Set-Valued Functions». *Indiana Univ. Math. J.*, **24**, 433–441.
- [2] **Ash, R.B.** (1972). *Real Analysis and Probability*. Academic Press.
- [3] **Box, G.E.P** y **Tiao, G.C.** (1973). *Bayesian Inference in Statistical analysis*. Addison-Wesley.
- [4] **Butlletí Sismològic 1985-1990**. Servei Geològic de Catalunya. Departament de Política Territorial i Obres Públiques. Generalitat de Catalunya.
- [5] **Campbell, K.W.** (1982). «Bayesian Analysis of Extreme Earthquake Occurrences. Part I. Probabilistic Hazard Model». *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 1689–1706.
- [6] **Chen, D., Dong, W.** y **Shah, C.** (1988). «Earthquake Recurrence Relationships from Fuzzy Earthquake Magnitudes». *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **7**, 136–142.
- [7] **Cornell, C.A.** (1968). «Engineering Seismic Risk Analysis». *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 1583–1606.
- [8] **Efron, B.** y **Tibshirani, R.J.** (1993). «An Introduction to the Bootstrap». *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman Hall.
- [9] **Egozcue, J.J., Barbat, A., Canas, J.A., Miquel, J.** y **Banda, E.** (1991). «A Method to Estimate Intensity Occurrence Probabilities in Low Seismic Activity Areas». *Earthquake Eng. Struc. Dyn.*, **20**.
- [10] **Egozcue, J.J., Díez, P.** y **Muñoz, P.** (1991). «Bayesian Hazard Assessment Using Imprecise Data». *Proc. of CERRA-ICASP*, **6**. Mexico DF.
- [11] **Esteva, L.** (1969). «Seismicity Prediction: A Bayesian Approach». *Proc. 4th World Conf. Earthquake Eng.*, Santiago de Chile.
- [12] **Feng, D., Gu, J., Lin, M., Xu, S.** y **Yu, X.** (1985). «Assesment of Earthquake Hazard by Simultaneous Use of the Statistical Method and the Method of Fuzzy Mathematics». *Pageoph.*, **122**, 982–997.
- [13] **Gradshteyn, I.S.** y **Ryzhik, I.M.** (1980). *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press.
- [14] **Kijko, A.** y **Sellevoll, M.A.** (1990). «Estimation of Earthquake Hazard Parameters for Incomplete and Uncertain Data Files». *Natural Hazards*, **3**, 1–13.
- [15] **Kruse, R.** y **Meyer, K.D.** (1987). *Statistics with Vague Data*. D. Ridel Publishing Company.
- [16] **Laha, R.G.** y **Rohatgi, V.K.** (1979). *Probability Theory*. Wiley.
- [17] **Lehmann, E.L.** (1983). *Theory of Point Estimation*. Wiley.

- [18] **McGuire, R.K.** (1977). «Effects of Uncertainty in Seismicity on Estimates of Seismic Hazard for the East Coast of United States». *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 827–848.
- [19] **McGuire, R.K.** «FORTRAN Computer Program for Seismic Risk Analysis». *U.S.G.S. Open File Report*, 67–76.
- [20] **Matheron, G.** (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley.
- [21] **Mezcua, J.** y **Martínez, J.M.** (1983). «Sismicidad del area Ibero-Mogrebí». *Inst. Geogr. Nacional*. Madrid.
- [22] **Morgat, C.P.** y **Shah, H.C.** (1979). «A Bayesian Model for Seismic Hazard Mapping». *Bull. Seism. Soc. Am.*, **69**, 1237–1251.
- [23] **Padgett, W.J.** y **Taylor, R.L.** (1973). «Laws of Large Numbers for Normed Linear Spaces and Certain Fréchet Spaces». *Lecture Notes 360*. Springer-Verlag.
- [24] **Patwardhan, A.S., Kulkarni, R.B.** y **Tocher, D.** (1980). «A Semi-Markov Model for Characterizing Recurrence of Great Earthquakes». *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 323–347.
- [25] **Press, S.J.** (1989). *Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications*. Wiley.
- [26] **Puri, M.L.** y **Ralescu, D.A.** (1986). «Fuzzy Random Variables». *J. Math. Anal. Appl.*, **114**, 409–422.
- [27] **Richter, C.F.** (1958). *Elementary Seismology*. Freeman.
- [28] **Shlien, S.** y **Toksoz, N.** (1975). «A Branching Poisson-Markov Model of Earthquake Occurrences». *Geophys. J. R. Soc.*, **42**, 49–59.
- [29] **Udías, A.** y **Mezcua, J.** (1986). *Fundamentos de Geofísica*. Alhambra.
- [30] **Vere-Jones, D.** (1975). «Stochastic Models for Earthquakes Sequences». *Geophys. J. R. Soc.*, **42**, 811–826.
- [31] **Zadeh, L.A.** (1968). «Probability Measures of Fuzzy Events». *J. Math. Anal. Appl.*, **10**, 421–427.

ENGLISH SUMMARY

ESTIMATION OF RICHTER b PARAMETER BASED ON IMPRECISE MEASURES OF EPICENTRAL INTENSITY

S. FORCADA*

J.J. EGOZCUE*

Universitat Politècnica de Catalunya

In this paper the problem of seismic Richter b parameter estimation starting from imprecise intensity data when the imprecision is quantified by a distribution of probability is considered. An imprecise data value of intensity is perceived as a realization of a random probability measure which is represented on the Hilbert space $l^2(\mathbb{R})$. In distinction to Bayes approach geometrical and probabilistic arguments in the Hilbert space lead to the construction of an asymptotically normal and centered estimator of Richter b parameter which provide good results through easy calculations.

Keywords: Point estimation, maximum likelihood, imprecise data, random elements, Hilbert spaces, epicentral intensity.

*S. Forcada y J.J. Egozcue. Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya. TERRASSA.

–Received february 1995.

–Accepted march 1996.

We aim to estimate Richter's exponential parameter, which characterizes the seismic activity in areas of low seismicity when working with imprecise data.

An epicentral intensity value $I \in \{i_0, \dots, i_s\}$ is assigned to each given seismic movement. The probability distribution of the random variable $I : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (R, \mathcal{B}_R)$, is determined by the probabilities

$$p_i = P(I = i), \quad i = i_0, \dots, i_s \quad \text{with} \quad \sum_{i=i_0}^{i_s} p_i = 1.$$

By hypothesis the exponential accumulated model derived from the Richter's law for seismic intensities is assumed to be:

$$\begin{aligned} P(I \geq i) &= e^{-b(i-i_0)} & i = i_0, \dots, i_s \\ P(I \geq i_0) &= 1, & P(I > i_s) = 0 \end{aligned}$$

This leads to the probability function P_b defined by

$$\begin{aligned} p_i &= P(I = i) = e^{-b(i-i_0)}(1 - e^{-b}), & i = i_0, \dots, i_{s-1} \\ p_s &= P(I = i_s) = e^{-b(i_s-i_0)}. \end{aligned}$$

and the Richter's parameter, b , characterizes the distribution of the random variable I .

The available data for estimating b are given by the seismic catalogue of the area in which the estimated epicentral intensities are specified. These measurements of seismic intensity are, by their very nature, inaccurate and weakly defined. The estimation of the parameter is carried out taking into account in the procedure the data uncertainties. The uncertainty of the data is quantified by attributing to each intensity measurement a probability distribution over the range of intensities. If the intensity stated in the seismic catalogue for the event ω is k , the uncertainty on the observed intensity value is modeled by assigning a distribution of probability $\chi(\omega)$ to ω . This $\chi(\omega)$ is a probability function defined on i_0, \dots, i_s . For each $i = i_0, \dots, i_s$ the value $\chi(\omega)(i)$ is the probability of i being the true intensity of the event ω which in the catalogue was indicated as $I = k$. For m events $\omega_1, \dots, \omega_m$ we will obtain a sample $\chi_1 = \chi(\omega_1), \dots, \chi_m = \chi(\omega_m)$ which will be called imprecise sample.

We represent each probability distribution, $(p_{i_0}, \dots, p_{i_s})$, on the range of intensities, by the sequence $(0, \dots, 0, p_{i_0}, \dots, p_{i_s}, 0, \dots)$ of the space $l^1(R) \subset l^2(R)$. Hence, the imprecise sample

$$\chi_1 = (\chi_1(i_0), \dots, \chi_1(i_s)), \dots, \chi_m = (\chi_m(i_0), \dots, \chi_m(i_s))$$

of I corresponds to a sample of a random variable

$$\chi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (l^2(R), \mathcal{B}_2)$$

being \mathcal{B}_2 the σ -algebra generated by the open subsets of the Hilbert space $l^2(R)$

The probabilistic behaviour of random variables I and χ are related by the hypothesis

$$E(\chi) = P_b$$

where P_b denotes the probability measure associated to I .

The estimation, \hat{b}_m , of parameter b is obtained through the minimisation of the function

$$\mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_m; b) = \sum_{i=1}^m \|\chi_i - P_b\|^2$$

which represents the sum of squared distances in $l^2(R)$ between the theoretical distribution of the intensity variable, I , and each element of the imprecise sample. The norm in $l^2(R)$ is $\|\{a_k\}_{k \in N}\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2)^{\frac{1}{2}}$

It can be shown that the estimation obtained in such a manner provides, under certain reasonable practicable hypotheses, an asymptotically centred and normal estimator.

The method is applied to the estimation of Richter parameter for two specific seismic catalogues, one real and corresponding to an area in the Eastern Pyrenees and a simulated one. We have given a model of uncertainty to each intensity value stated in the Seismic Catalogue following the information provided by the Servei Geologic de la Generalitat de Catalunya. We apply also the method to estimate b with the data when considered accurate. When imprecise data are replaced by the probability distribution over $\{i_0, \dots, i_s\}$ which assigns probability one to the intensity in the seismic catalogue and zero to the other intensity values the method applies. Both cases (imprecise data and accurate data) are compared.

