

ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE DIVERSOS FACTORES SOBRE EL TIEMPO DE GIRO DE UNA PEONZA, MEDIANTE EL USO DE EXPERIMENTOS FACTORIALES A DOS NIVELES

JUAN RIERA ANTONIO
JUAN A. TORRES PLANELLS

Universitat Politècnica de Catalunya

Este estudio surge como respuesta a un ejercicio propuesto por la cátedra de Estadística de la E.T.S.E.I.B.

Nuestra propuesta consiste en aplicar el método de los diseños factoriales de experimentos a dos niveles, ensayando sobre un modelo básico de peonzas cuyas características de diseño pueden ser fácilmente alteradas. A partir de la variación de estos parámetros, pretendemos evaluar su posible influencia sobre el tiempo de giro de dichas peonzas, lo que supondrá nuestro criterio de calidad.

1. INTRODUCCIÓN

El sistema con el que vamos a experimentar consiste en un conjunto de peonzas de distintos tamaños y materiales que serán lanzadas mediante un pequeño motor eléctrico. Las partes de que consta cada una de ellas son básicamente las siguientes: (ver Figura 1)

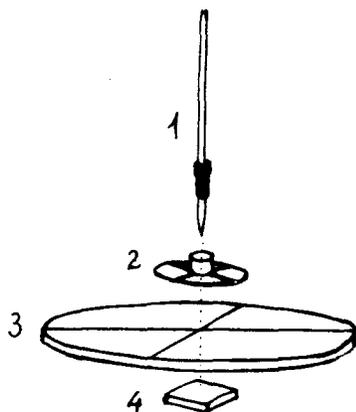


Figura 1. Esquema en explosión de la peonza.

1: *Eje*. Está constituido por una aguja de lana, metálica.

2. *Soporte superior*. Formado por un engranaje de despertador. Su función es mantener el disco en un plano perpendicular al eje.

3. *Disco*. De madera o cartón según el caso. Está fabricado manualmente y es el principal responsable de que el conjunto gire sin caerse durante cierto tiempo.

4. *Soporte inferior*. Pequeña pieza de goma fabricada a mano. Mantiene sujeto el disco contra el soporte superior.

Las razones fundamentales que nos han llevado a elegir este tipo de experimentos son principalmente el ahorro de tiempo y dinero. La construcción de las peonzas resulta francamente sencilla y barata, pues disponíamos de la mayoría de las materias primas. Asimismo la experimentación resultaba rápida, cómoda y muy entretenida.

En próximos apartados entraremos de forma más profunda en la descripción del diseño, así como de las causas que lo han motivado.

El objetivo que perseguimos con la realización de estos experimentos es bien claro. Pretendemos evaluar cada uno de los factores que se pondrán en juego, así como sus posibles interacciones, en el tiempo que tarda en pararse una peonza lanzada siempre a la misma velocidad.

2. DISEÑO

Para proceder a la enumeración de los factores que utilizaremos en el diseño, realizaremos antes un breve análisis teórico del experimento. En cualquier caso, hemos procurado que la aplicación de la teoría no resulte suficiente para averiguar la influencia de la variable estudiada, con lo que no podemos, a priori, afirmar si el efecto de una variable va a aumentar, disminuir o no influir en el tiempo de giro.

2.1 Análisis teórico

La peonza, si no ocurre nada anómalo, se detendrá por las dos siguientes causas:

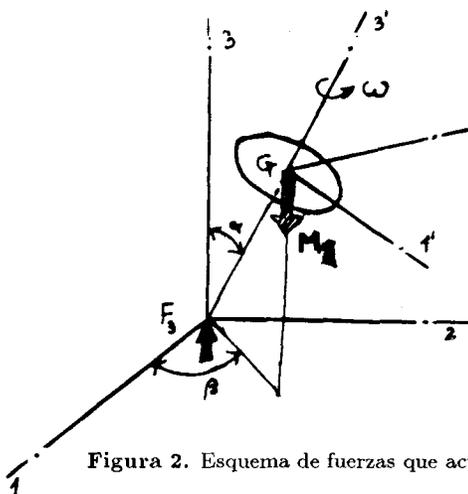
- a) Que se agote la energía de rotación que se le proporciona, debido al rozamiento eje-suelo y peonza-aire. Como siempre daremos a la peonza la misma velocidad de rotación (la del motor eléctrico) su energía cinética será inicialmente $E_0 = \frac{1}{2} I \omega_{\text{MOTOR}}^2$, en donde I será función de: Masa del disco (material), diámetro del disco y distribución de masas (chinchetas).

Por otra parte, no conocemos la ecuación que rige las pérdidas de energía por rozamiento, aunque sí sabemos que aumentarán al aumentar el tamaño y peso de la peonza.

Así nos encontramos con las siguientes cuestiones: Al aumentar el peso del disco crece su momento de inercia y, en consecuencia, su energía cinética inicial, pero también serán mayores las pérdidas por rozamiento eje-suelo. Luego, ¿girá más tiempo la peonza al emplear un material más pesado?

Si aumentamos el diámetro del disco, o ponemos un suplemento de peso en su contorno (chinchetas) nos encontramos con el mismo problema, aumentándose además en este caso el rozamiento con el aire.

- b) Otra causa de que se detenga el artilugio es que debido a una ligera imprecisión en el lanzamiento, la peonza se incline y el disco toque el suelo, con lo que se pierde gran cantidad de energía. Estudiemos el fenómeno mecánicamente aplicando el teorema del momento cinético en el punto G (ver Figura 2)



$$\frac{1}{4}mR^2 \left[\dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2\dot{\beta}\omega \sin \alpha + \ddot{\alpha} \right] = F_3 h \sin \alpha$$

(Expresión particularizada para $\beta = 90^\circ$)

Figura 2. Esquema de fuerzas que actúan sobre la peonza.

Si para este estudio suponemos una posición determinada y fijamos m e I (ya hemos visto cómo influían, en el apartado anterior, se observa que el momento que inclina la peonza disminuye al hacerlo h mientras que permanece constante el que la equilibra. Pero el sentido común, nos indica que al reducirse h también lo hace la distancia entre la periferia del disco y el suelo, con lo que la peonza tocará el suelo más fácilmente ¿Cuál de estos dos efectos será más importante? ¿Se anularán entre si? Estas preguntas intentaremos contestarlas mediante el uso de la estadística, ya que la mecánica no nos ha dado una respuesta.

Téngase en cuenta que en la realidad la peonza se detendrá debido a una mezcla de las dos causas enunciadas, pero creemos que su tratamiento por separado permitía una más clara exposición del problema, así como una más fácil introducción de los factores que se utilizarán.

2.2 Factores

- *Altura.* La denominaremos por la letra A y corresponde a la distancia entre el disco y el extremo inferior de la aguja. La hemos llamado h en el apartado 2.1 b), donde han quedado claros los motivos por los que lo introducimos en el diseño.
Para materializarlo hemos construido dos ejes con unos topes de celo en los que queda fijado el soporte superior (ver Figura 1).
- *Material.* Para designarlo usaremos la letra B. Resulta claro que según el material cada prototipo pesará más o menos, y en 2.1 a) ya hemos visto que esto puede ser decisivo.
- *Diámetro.* Lo conoceremos por C. Influye en el peso del prototipo y también puede provocar que la peonza toque antes el suelo (ver Figura 2) por lo que parece razonable predecir una posible interacción entre este

factor y al altura A. Además influye directamente en el valor del momento de inercia I .

- *Chinchetas*. Este factor será la D. Aumenta el peso, pero principalmente el momento de inercia al distribuirse la masa en zonas alejadas del eje de giro del disco.
- *Soporte*. Lo llamaremos E. Este factor va a tener un carácter más económico que físico. Usaremos soportes inferiores (ver Figura 1) de dos tipos, uno de ellos de fabricación mucho más sencilla, y en consecuencia más barata. Importante si pensamos fabricar grandes cantidades de peonzas.

2.3 Niveles de los factores

Nivel +: 20 mm.

A

Nivel -: 13 mm.

Procuraremos situar los discos en una parte bastante inferior del eje, pero sin excedernos, pues los discos tocarían el suelo demasiado pronto. También ha influido en la elección de estos dos niveles el tamaño del eje, y tal vez una cierta experiencia en juegos infantiles.

Nivel +: Cartón

B

Nivel -: Madera de balsa

Estos dos materiales fueron elegidos en función de su reducido coste, gran disponibilidad en el mercado, y la facilidad de fabricación que ofrecían.

Nivel +: 100 mm.

C

Nivel -: 70 mm.

La elección de estos niveles se fundamenta en las mismas causas que en el caso de la variable A. Se intentó llegar a un cierto compromiso entre ambas.

Nivel +: Discos con 4 chinchetas en la zona exterior regularmente distribuidas.

D

Nivel -: Discos sin chinchetas.

Colocamos las chinchetas en la parte exterior del disco por ser la zona en la que su efecto se haría más evidente. A su vez, el número de 4 chinchetas creímos que no hacía los discos excesivamente pesados y además permitía una correcta y fácil redistribución del peso.

- Nivel +: Soporte inferior cuadrado
E Nivel -: Soporte inferior circular

El soporte de goma cuadrado, resultaba más fácil de fabricar, y al ser algo más grande cumplía mejor su función. Sin embargo su forma no circular podía provocar ligeros desequilibrios aunque esto no era probable debido a su escaso peso frente al resto del prototipo.

3. DISEÑO EXPERIMENTAL UTILIZADO

Hemos realizado un diseño factorial fraccionado 2^{5-1} en dos bloques de 8 experimentos cada uno. Vamos a analizar más de cerca este diseño. Queríamos conocer los posibles efectos, y sus interacciones, de 5 factores sobre el tiempo de giro de una peonza; si quisiéramos determinarlos sin confusión alguna necesitaríamos realizar un total de 32 (2^5) experimentos, lo que no hubiera resultado muy conveniente a estas alturas del curso, dado el tiempo requerido para el montaje de cada prototipo. De entrada, decidimos reducir el número de experimentos a la mitad, conscientes de que si no obteníamos resultados esperados podíamos realizar otros 16 experimentos y obtener así el factorial completo (si bien podía aparecer un efecto bloque que podría ser controlado). Éste fue el principal motivo de fraccionar el diseño.

La causa principal del bloqueo era la fragilidad de algunas de las piezas. Con el uso y algún que otro accidente éstas se iban deteriorando con el paso del tiempo por lo que decidimos realizar dos bloques de experimentos en días consecutivos.

Otras posibles causas de bloqueo, fueron solventadas de la siguiente manera:

- a) *Factor usuario*. En el proceso de fabricación, uno de los dos integrantes del grupo se encargó de la fabricación de ejes, soportes, y del equilibrado, mientras que el otro fabricaba los discos y colocaba las chinchetas, en caso necesario.

Una vez dentro de la fase de experimentación, uno se encargaba de lanzar las peonzas mientras que el otro cronometraba.

De esta forma se eliminaban los efectos de bloque causados por la mayor o menor habilidad de cada individuo en realizar una tarea, puesto que siempre realizaba las mismas.

- b) *Factor materia prima*. Para minimizar las posibles diferencias de material al fabricar piezas supuestamente iguales, decidimos realizar el menor número posible de éstas, montando cada prototipo con sus componentes

correspondientes justo antes de realizar el experimento. Así, sólo construimos: Dos discos de cada material (uno grande y uno pequeño), dos ejes con sus respectivos soportes superiores (uno a nivel + y otro a nivel -), y dos soportes inferiores, uno cuadrado y otro redondo. Así, para realizar el experimento +++++ montábamos un disco grande de cartón, con chinchetas, con el soporte superior a 20 mm. y el inferior cuadrado.

- c) *Factor maquinaria.* Las piezas se fabricaron de forma totalmente manual, con lo que la única máquina usada en el proceso fue una maquinilla eléctrica de afeitar cuya función era acelerar las peonzas hasta su velocidad de giro inicial. Al usar siempre la misma maquinilla no había efecto bloque posible. Del estudio teórico del problema se desprendía que el factor con menores probabilidades de tener un efecto importante era el E (soporte inferior). Fue por este motivo que decidimos acomodar el resto de los factores y generar éste a partir de $E = ABCD$. Así confundíamos el efecto de E con la interacción de mayor orden posible que presumiblemente debería ser poco importante.

Para apreciar otras confusiones generadas nos remitimos a la estructura de alias de la Tabla 3. En ella se observa que todos los efectos principales se confunden siempre con interacciones de 4° orden, y las de 2° con otras de 3°.

Otro factor importante en el diseño del experimento fue la aleatorización:

- a) En primer lugar decidimos qué bloque de experimentos realizábamos el primer día lanzando una moneda. De este modo realizamos el primer día los experimentos correspondientes al bloque 1, correspondientes a los valores de la variable de bloqueo BL.

Observación: Esta variable se generó de la forma $BL = ABC$. La única interacción de 4° orden susceptible de ser confundida con ella ya estaba “ocupada” por el factor E por lo que tuvimos que conformarnos con confundirla con una de tercer orden (Para mayor detalle ver Tabla 3).

- b) Dentro de cada bloque aleatorizamos extrayendo papelitos numerados del 1 al 8 de una urna, y colocando el número extraído en la columna ORDEN ALEATORIO de la matriz de diseño. (Ver Tabla 1).

Por último, diremos que al ser la relación de definición $I = ABCDE$, éste es de resolución 5.

En consecuencia hemos construido un diseño factorial fraccionado 2^{5-1} de resolución 5, con 2 bloques de 8 experimentos cada uno.

4. ANÁLISIS

Una vez diseñado el experimento, procedimos a su ejecución. Los resultados obtenidos (en lo referente a los tiempos de giro y a su aleatorización), están incluidos en la matriz de diseño (Ver Tabla 1).

Tabla 1
Matriz de diseño

VARIABLES:						RESPUESTA	N°	
A	B	C	D	E	BL	(Y)	BLOQUE	ORDEN
-	-	-	-	+	-	7.1	2	3
+	-	-	-	-	+	5.0	1	2
-	+	-	-	-	+	32.0	1	7
+	+	-	-	+	-	22.0	2	6
-	-	+	-	-	+	21.2	1	1
+	-	+	-	+	-	17.3	2	2
-	+	+	-	+	-	48.0	2	1
+	+	+	-	-	+	46.3	1	5
-	-	-	+	-	-	27.8	2	8
+	-	-	+	+	+	22.9	1	6
-	+	-	+	+	+	47.5	1	8
+	+	-	+	-	-	29.0	2	5
-	-	+	+	+	+	37.5	1	4
+	-	+	+	-	-	28.8	2	7
-	+	+	+	-	-	66.7	2	4
+	+	+	+	+	+	51.3	1	3

Con los datos obtenidos se procedió a la estimación de los efectos, mediante el algoritmo de Yates, y su posterior representación en papel probabilístico normal.

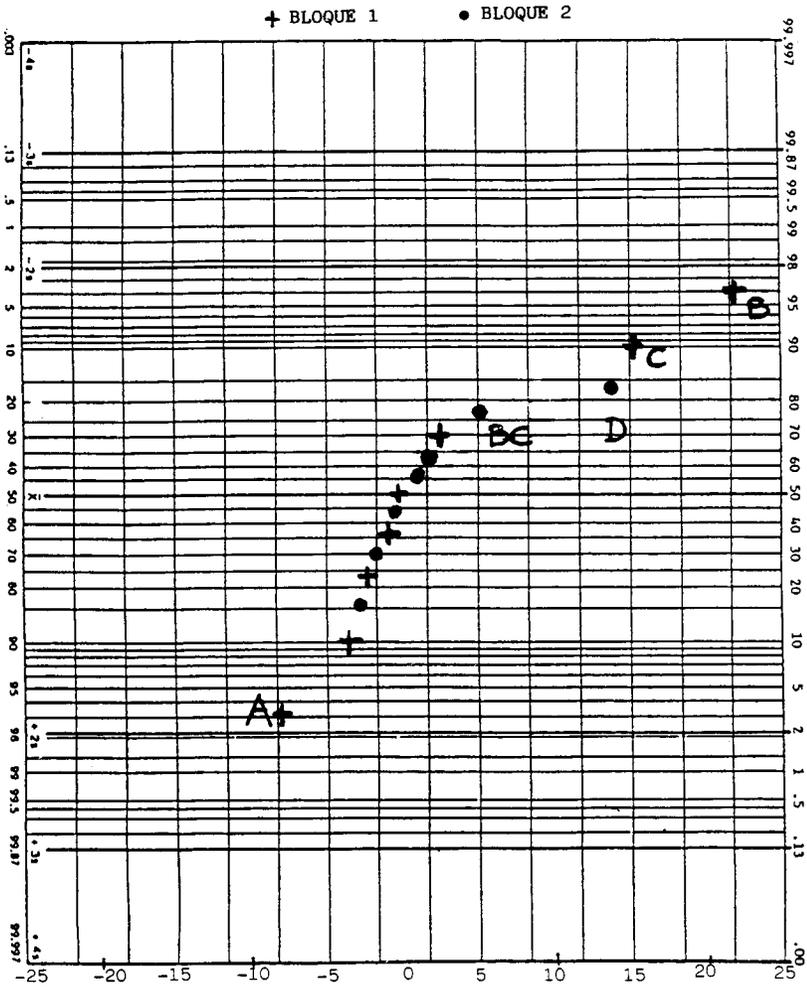


Figura 3. Representación gráfica de los efectos obtenidos.

Tabla 2
Cálculo de efectos mediante el algoritmo de Yates

A	B	C	D	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	DIV	ESTIM.	BLOQUE	EFECTO
-	-	-	-	7.1	12.1	66.1	198.9	509.9	16	31.8	2	MEDIA
+	-	-	-	5.0	54.0	132.8	311.0	-65.7	8	-8.2	1	A
-	+	-	-	32.0	38.5	127.2	-17.7	175.7	8	22.0	1	B
+	+	-	-	22.0	94.3	183.8	-48.0	-25.5	8	-3.2	2	AB
-	-	+	-	21.2	50.7	-12.1	97.7	123.3	8	15.4	1	C
+	-	+	-	17.3	76.5	-5.6	78.0	5.3	8	0.7	2	AC
-	+	+	-	48.0	65.8	-23.4	-5.7	40.3	8	5.0	2	BC
+	+	+	-	46.3	118.0	-24.6	-19.8	17.5	8	2.2	1	ABC
-	-	-	+	27.8	-2.1	41.9	66.7	112.1	8	14.0	2	D
+	-	-	+	22.9	-10.0	55.8	56.6	-30.3	8	-3.8	1	AD
-	+	-	+	47.5	-3.9	25.8	6.5	-19.7	8	-2.5	1	BD
+	+	-	+	29.0	-1.7	52.2	-1.2	-14.1	8	-1.8	2	ABD
-	-	+	+	37.5	-4.9	-7.9	13.9	-10.1	8	-1.3	1	CD
+	-	+	+	28.8	-18.5	-2.2	26.4	-7.7	8	-1.0	2	ACD
-	+	+	+	66.7	-9.2	-13.6	10.1	12.5	8	1.6	2	BCD
+	+	+	+	51.3	-15.4	-6.2	7.4	-2.7	8	-0.3	1	ABCD

En vista de los resultados obtenidos, decidimos realizar la siguiente simplificación: La estimación del efecto de tercer orden ABC, correspondiente por generación al efecto bloque que investigamos, no resulta ser significativo (Ver Tabla 2). Teniendo en cuenta que queda confundido con la interacción de segundo orden DE y que el valor obtenido es la suma de ambos ($ABC + DE$), tenemos suficientes razones a nuestro favor como para afirmar que no hay efecto bloque. En consecuencia, construiremos el patrón de confusión del diseño (Tabla 3) prescindiendo de la variable BL y no volveremos a tenerla en cuenta de aquí en adelante.

Observación: En la representación en papel probabilístico normal se han representado los valores correspondientes a cada bloque en distinta forma, lo que permite corroborar visualmente la argumentación anterior.

Tabla 3
Estructura de alias

$$E = ABCD; \quad I = ABCDE$$

$A = AI = AABCDE = BCDE$	\longrightarrow	$A = A + BCDE$
$B = BI = BABCDE = ACDE$	\longrightarrow	$B = B + ACDE$
$C = CI = CABCDE = ABDE$	\longrightarrow	$C = C + ABDE$
$D = DI = DABCDE = ABCE$	\longrightarrow	$D = D + ABCE$
$E = ABCD$		
$AB = ABABCDE = CDE$	\longrightarrow	$AB = AB + CDE$
$AC = ACABCDE = BDE$	\longrightarrow	$AC = AC + BDE$
$AD = ADABCDE = BCE$	\longrightarrow	$AD = AD + BCE$
$BC = BCABCDE = ADE$	\longrightarrow	$BC = BC + ADE$
$BD = BDABCDE = ACE$	\longrightarrow	$BD = BD + ACE$
$CD = CDABCDE = ABE$	\longrightarrow	$CD = CD + ABE$
$AE = AEABCDE = BCD$	\longrightarrow	$AE = AE + BCD$
$CE = CEABCDE = ABD$	\longrightarrow	$CE = CE + ABD$
$DE = DEABCDE = ABC$	\longrightarrow	$DE = DE + ABC$
$BE = BEABCDE = ACD$	\longrightarrow	$BE = BE + ACD$

Los efectos que más se apartan de la recta sobre la que se alinean la mayoría de las estimaciones, son B, C y D. Si bien no es tan evidente como en estos últimos, también parece claro que serán significativos los efectos A y BC.

Queda por decir que el valor estimado de cada efecto, es la suma de éste y aquellos con los que pueda confundirse ya que el diseño utilizado estaba fraccionado. Así pues, al hablar, por ejemplo del efecto B, estamos despreciando la interacción de cuarto orden ACDE frente al efecto principal real de B. Para afirmar con toda seguridad que esta simplificación es correcta deberíamos realizar otros 16 experimentos, lo que supondría mucho tiempo y trabajo frente al poco riesgo que corremos. Veamos pues con qué se confunde cada uno de los efectos tomados como significativos:

$$\begin{aligned}
B &= BABCDE = ACDE \longrightarrow B = B + ACDE \approx B \\
C &= CABCDE = ABDE \longrightarrow C = C + ABDE \approx C \\
D &= DABCDE = ABCE \longrightarrow D = D + ABCE \approx D \\
A &= AABCDE = BCDE \longrightarrow A = A + BCDE \approx A \\
BC &= BCABCDE = ADE \longrightarrow BC = BC + ADE \approx BC
\end{aligned}$$

5. CONCLUSIONES

- a) Los factores que más influyen en el tiempo de giro de las peonzas son el material (B), el diámetro (C), así como el hecho de que lleven chinchetas en su contorno (D).
Dado que los valores de los efectos correspondientes a estas variables son positivos, el tiempo de giro se verá incrementado al encontrarse estas variables en el nivel +.
- b) No hay efecto bloque, lo que permite pensar que los prototipos tienen una cierta robustez, pues en principio no se deterioran demasiado con el uso.
- c) El efecto principal de E es totalmente despreciable, por lo que podremos fabricar grandes cantidades del producto de forma más económica (soporte inferior cuadrado).
- d) El factor altura (A) también posee una influencia significativa sobre la respuesta medida, pero en este caso deberemos situarla en el nivel - para mejorar el producto.
- e) Los factores diámetro y material interaccionan entre sí, es decir, dependen una de otra.

A partir de estas conclusiones, decidimos fabricar la siguiente peonza:

- A = 13 mm. (Nivel -)
- B = Carton (Nivel +)
- C = 100 mm. (Nivel +)
- D = Chinchetas (Nivel +)
- E = Soporte inferior cuadrado (Nivel +)

Según los resultados obtenidos hasta el momento, ésta nos parecería la mejor peonza que podríamos fabricar si nuestro criterio de calidad es el tiempo de giro.

6. COMPARACIÓN ENTRE RESULTADOS ESPERADOS Y OBTENIDOS

- a) En primer lugar nos ha sorprendido que no fuera significativa la interacción entre los factores altura y diámetro, tal y como habíamos previsto anteriormente. Probablemente esto se deba a que las peonzas se mantenían en posición vertical hasta que perdían prácticamente toda su energía; esto provocaba que la peonza no se detuviera nunca debido a choques del disco con el suelo, tal y como se sospechaba en apartados anteriores.
- b) También esperábamos que el factor altura tuviese por sí solo un efecto más relevante que el obtenido experimentalmente. Tal vez se deba al buen equilibrado de las peonzas, y a la poca diferencia entre los niveles + y - de ese factor.
- c) Por último, comentar que no esperábamos que existiera la interacción BC, ni que fuera tan importante el efecto del material, ya que el cartón y la madera de balsa tenían propiedades muy similares.

7. FUTURO DE LA INVESTIGACIÓN

Los aspectos que intentaríamos aclarar en caso de querer mejorar aún más el producto serían los siguientes:

- a) Experimentar con los factores que han resultado ser significativos a unos niveles distintos de los utilizados a fin de optimizar aún más las características de calidad. Especialmente, nos interesaría saber hasta qué punto podemos disminuir el factor altura (A), para que siga aumentando el tiempo de giro, pues en los niveles utilizados el efecto no ha sido muy importante.
- b) Intentaríamos explicar la relación entre los efectos de los factores B y C que han resultado ser dependientes uno del otro. En particular nos interesaría saber si la función que describe a uno respecto del otro presenta algún máximo, para poder trabajar en él.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **George, E., Box, P., William, G., Hunter, J. y Stuart Hunter** (1989). “Estadística para investigadores. Introducción al diseño de experimentos, análisis de datos y construcción de modelos”. Editorial Reverté, 1989.
- [2] **Entrega 7 y 8** (1990). “Estadística teórica y aplicada”. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Sección de Técnicas Cuantitativas de Gestión (E.T.S.E.I.B.-U.P.C.). C.P.D.A. 1990.