

CONDICIONES DE CONSISTENCIA EN LA ESTIMACIÓN DE MODELOS UNIECUACIONALES EN PRESENCIA DE RUIDO NO ESTACIONARIO: DEPÓSITOS Y DISPONIBILIDADES LÍQUIDAS COMO EJEMPLO ILUSTRATIVO

J. L. RAYMOND BARA (*), J. ANGULO IBÁÑEZ (+)

El objeto de esta nota es establecer las condiciones bajo las que se obtendrán estimadores consistentes en la estimación de modelos uniecuacionales en presencia de ruido no estacionario. Esta circunstancia puede darse con frecuencia cuando se estiman relaciones en "niveles" de series económicas crecientes en el tiempo. Los resultados se ilustran en un ejemplo, en el que se prueba que la sobrediferenciación de los datos sigue proporcionando estimadores -- consistentes, si bien ineficientes. Sin embargo, la posible no estacionariedad del ruido puede conducir a estimadores inconsistentes, aún a pesar de que se verifique la hipótesis de independencia entre la variable explicativa y el ruido.

CONDITIONS OF CONSISTENCE IN ESTIMATING UNIEQUATIONAL MODELS IN THE PRESENCE OF NON-STATIONARY NOISE: DEPOSITS AND MONEY SUPPLY AS AN ILUSTRATIVE EXAMPLE.

Keywords: STATIONARITY, CONSISTENCY, UNIECUATIONAL MODELS, ESTIMATION IN LEVELS, ESTIMATION IN DIFFERENCES, OVERDIFFERENCING.

1. INTRODUCCIÓN.

Es frecuente que al estimar modelos de regresión, los coeficientes obtenidos experimenten modificaciones sustanciales según que se opere en niveles o en incrementos. En ocasiones, un modelo de regresión altamente significativo en niveles pierde relevancia cuando se opera con series estacionarias. La respuesta acerca de la forma más correcta de proceder es analizar el proceso de generación de la parte aleatoria. La conveniencia de diferenciar los datos como fase previa al cálculo de la regresión, se deriva de la existencia de una raíz unitaria en el modelo correspondiente al proceso de generación de la parte aleatoria.

El objeto de esta nota es destacar que cuando se calculan regresiones en niveles de series no estacionarias, si la parte aleatoria es no estacionaria, existe un grave riesgo de obtener estimadores que no verifiquen ni tan siquiera la propiedad de consistencia. -

Para ilustrar estas ideas se ha seleccionado un sencillo modelo que relaciona directamente el nivel de los depósitos de las Cajas de Ahorro y de la Banca con las disponibilidades líquidas.

Es importante destacar que los estimadores Mínimo cuadrático Ordinarios pueden perder la propiedad de consistencia si el proceso de generación de la parte aleatoria no es estacionario, porque si bien la casi totalidad de libros de texto de econometría enfatizan la necesidad de que la variable explicativa se distribuya independientemente de la parte aleatoria para el logro de estimadores consistentes, es poco frecuente reconocer que la no estacionariedad de la perturbación puede también ocasionar la pérdida de consistencia. Y desgraciadamente es posible que esta última circunstancia pueda darse con relativa frecuencia cuando se opera en niveles de series no estacionarias.

(*) J.L. Raymond Bara - Dep. de Teoría Económica, Econometría de la Universidad Autónoma de Barcelona - Bellaterra.

(+) J. Angulo Ibañez - Servicio de Estudios CECA - Caballero de Gracia, 30 - Madrid.

- Article rebut el Juliol del 1983.

El ejemplo seleccionado (relación entre depósitos y disponibilidades líquidas) adolece de la importante limitación de que carece de base teórica firme que permita inferir que entre las dos variables deba darse una relación directa de causalidad, en la que los depósitos actúen como variable dependiente y las disponibilidades líquidas como explicativa, al tiempo que es discutible que la variable explicativa (las disponibilidades líquidas) pueda ser considerada como una variable propiamente exógena. No obstante, la drástica alteración que experimenta el correspondiente coeficiente de elasticidad estimado en el caso de los depósitos de las Cajas de Ahorro al utilizar series diferenciadas, es ilustrativa del tipo de problemas que se desea destacar.

2. ESTACIONARIEDAD FRENTE A NO ESTACIONARIEDAD DE LA PARTE ALEATORIA Y CONDICIONES DE CONSISTENCIA DE LOS ESTIMADORES:

Con objeto de simplificar la exposición al máximo, se va a considerar el modelo de regresión simple:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$$

en donde "Y" es la variable dependiente y "X" y "U" son procesos independientes que corresponden, respectivamente, a la variable explicativa y al elemento de perturbación aleatoria. El estimador MCO de "β" puede expresarse como:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(U_t - \bar{U})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

en donde " $\bar{X}$ " y " $\bar{U}$ " son las medias muestrales de las variables.

A partir de esta expresión /1/ se demuestra que "β" es consistente en los tres casos siguientes:

- 1) Si " X_t " y " U_t " son procesos estacionarios. Como es obvio, si la variable dependiente y la explicativa son estacionarias, siempre se verificará esta condición.
- 2) Aun a pesar de la posible no estacionariedad de " X_t " y " U_t ", si el orden de inte-

gración de " X_t " es inferior al de " U_t ". A título de ejemplo, se daría tal circunstancia si los procesos de generación de " X_t " y " U_t " fuesen del tipo:

$$(1-B)^{d_x} X_t = \psi_x(B) \epsilon_{xt}$$

$$(1-B)^{d_u} U_t = \psi_u(B) \epsilon_{ut}$$

siendo $d_x > d_u$

en donde "B" es el operador de retardos, " $\psi(B)$ " es un polinomio de cualquier orden (incluido el infinito) en B, y " ϵ_{xt} " y " ϵ_{ut} " son dos ruidos blancos.

A este respecto cabe destacar que el método de los MCO exige que se verifique " $d_u = 0$ " y " $\psi_u(B) = 1$ " para que el estimador goce de buenas propiedades. En general, los libros de texto de econometría consideran sólo la hipótesis de que " $d_u = 0$ ". Y en tal caso, siempre que "U" se distribuya independientemente de "X", queda garantizada la consistencia del estimador MCO. En efecto, si "X" es estacionario, nos hallaríamos en el supuesto precedente. Si "X" es no estacionario, el orden de integración de "U" es inferior al de "X", con lo que sigue verificándose la propiedad de consistencia.

- 3) Si " X_t " y " U_t " son procesos integrados del mismo orden ($d_x = d_u = d$) con derivada del tipo:

$$(1-B)^d X_t = \mu_x + \psi_x(B) \epsilon_{xt}$$

$$(1-B)^d U_t = \mu_u + \psi_u(B) \epsilon_{ut}$$

en donde "μ" son las medias de los respectivos procesos, sólo queda garantizada la consistencia del estimador MCO si se verifica:

$$\mu_x \neq 0 ; \mu_u = 0.$$

Se presenta un problema de indeterminación si se da la circunstancia de que el orden de integración de los procesos de " X_t " y " U_t " es el mismo, y las medias de tales procesos son ambas nulas. De darse tal supuesto, el estimador MCO puede dejar de ser consistente (Véase Anexo).

El anterior supuesto es relevante a efectos de analizar los problemas de consistencia en la estimación de la elasticidad de los depó-

sitos con respecto a las disponibilidades líquidas, dado que al calcular una regresión en niveles entre las dos variables, la parte aleatoria sigue un proceso no estacionario - cuyo orden de integración puede considerarse coincidente con el de la variable explicativa. Adicionalmente, las medias de los dos procesos son nulas.

3. LA RELACIÓN ENTRE DEPÓSITOS Y DISPONIBILIDADES LÍQUIDAS.

Utilizando datos mensuales desde Enero de 1972 hasta Agosto de 1982 (128 observaciones), se estimó el modelo de regresión:

$$\ln(DC)_t = \alpha + \beta \ln(DL)_t + U_t$$

en donde "DC" son los depósitos de las Cajas de Ahorro y "DL" el valor de las disponibilidades líquidas a fin de mes. El modelo carece, como antes ya se ha destacado, de una clara justificación de tipo teórico. Por otro lado, es discutible que la variable explicativa pueda considerarse puramente exógena, y en consecuencia, distribuida independientemente del elemento de perturbación aleatoria. El punto que interesa destacar es, no obstante, que los residuos muestrales parecen indicar la no estacionariedad de la parte aleatoria. En particular, que su orden de integración es coincidente con el de la variable explicativa.

En efecto, al calcular la anterior regresión los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$(I) \ln(DC)_t = -1,692 + 1,057 \ln(DL)_t + \hat{U}_t$$

(58,96) (323,20)

$$\hat{\sigma} = 0,0198 ; Q = 596,52 (G.L. = 15)$$

en donde "Q" es el estadístico de Box-Pierce distribuido en este caso bajo la hipótesis nula como una Chi-Cuadrado con 15 grados de libertad. El análisis de los residuos es claramente indicativo de que la perturbación aleatoria no es estacionaria y que el orden de integración de "U" es coincidente con el de la variable explicativa " $\ln(DL)$ "⁽¹⁾. En efecto, el modelo ARIMA univariante de "DL" viene dado por:

$$(1-B)(1-B^{12})\ln(DL)_t = (1-0,519B^{12})a_{1t}$$

(6,31)

$$\hat{\sigma} = 0,00413; Q = 12,89 (G.L. = 14)$$

mientras que el modelo ARIMA que se deduce de los residuos del modelo (I) da lugar a los siguientes resultados:

$$(1-B)(1-B^{12})\hat{U}_t = (1-0,472B^{12})a_{2t}$$

(4,28)

$$\hat{\sigma} = 0,00557; Q = 9,60 (G.L. = 14)$$

Ello es indicativo de que la estimación del coeficiente de elasticidad " β " a partir del modelo de regresión en niveles (I) puede adolecer de un problema de falta de consistencia, tal como en el Anexo de este trabajo se demuestra. Y efectivamente, al estimar el modelo con el grado de diferenciación adecuado - se obtiene:

$$(II) (1-B)(1-B^{12})\ln(DC)_t =$$

$$= 0,401(1-B)(1-B^{12})\ln(DL)_t +$$

(3,49)

$$+ (1-0,483B^{12})\varepsilon_{1t}$$

(5,29)

$$\hat{\sigma} = 0,00499; Q = 11,12 (G.L. = 14)$$

Puede comprobarse que al estimar (II) en lugar de (I) el coeficiente de elasticidad se divide por "2,64", pasando de valer "1,06" a "0,40", lo que representa un cambio drástico en cuanto a los efectos estimados de la evolución de las disponibilidades líquidas sobre el comportamiento de los depósitos⁽²⁾. Adicionalmente, a un nivel de confianza del 95%, utilizando (II) se deduce que este coeficiente de elasticidad está situado entre "0,62" y "0,18". Ello es indicativo de que tal elasticidad es significativamente inferior a la unidad.

Por otro lado, es conveniente destacar que una vez alcanzado el grado de diferenciación adecuado para la conversión de las series en estacionarias, o para convertir el ruido en estacionario, la sobrediferenciación dará lugar a estimadores no eficientes, pero éstos seguirán siendo consistentes. Así, estimando el modelo (II) pero sin modelizar el ruido, el coeficiente de elasticidad que se obtiene

es de "0,45, y sobrediferenciando las series a través de los operadores " $(1-B)^2(1-B^{12})$ ", " $(1-B)^3(1-B^{12})$ " y " $(1-B)^4(1-B^{12})$ ", aun a pe sar de que el modelo se estime por MCO, la - elasticidad obtenida sigue estando situada - en el entorno de "0,4", tal como el Cuadro 1 refleja. Este resultado es plenamente acorde con la teoría, dado que la consistencia exige, en el ejemplo que estamos considerando, la estacionariedad del ruido, y los modelos que operan con series sobrediferenciadas si- guen satisfaciendo tal condición.

Con respecto a los depósitos de la Banca, el modelo estimado adopta la forma ⁽³⁾:

$$\begin{aligned}
 (1-B)(1-B^{12})\ln(DB)_t = & 1,248(1-B)(1-B^{12})\ln(DL)_t + \\
 & \begin{matrix} (15,35) & (4,92) \\ + \frac{(1-0,449B^{12})}{(1-0,144B^3)} & \varepsilon_{2t} \\ & (2,56) \end{matrix} \\
 \hat{\sigma} = 0.00362; \quad Q = 11,92(G.L.=13)
 \end{aligned}$$

siendo "DB" los depósitos de la Banca.

En este caso,empero, la no diferenciación de los datos tiene consecuencias menos graves - que con relación a los depósitos de las Ca- - jas, tal como el Cuadro 1 permite comprobar.

Por último, es preciso señalar que un modelo de este tipo está afectado por el sesgo (y - la consistencia) de simultaneidad. Por ello, la propiedad de consistencia pierde en este contexto relevancia desde una óptica estric- ta. El aspecto que se desea destacar es, no obstante, que la no estacionariedad de la -- parte aleatoria, al estimar el modelo por Mí- nimos Cuadrados Ordinarios, conduce a un va- lor de " $\lim_{n \rightarrow \infty}(\hat{\beta})$ " indeterminado. Tal proble- ma de indeterminación se soluciona al operar con series que conduzcan a la estacionarie- dad de la parte aleatoria, si bien, en la me- dida en que el regresor no sea independiente de la perturbación, el límite probabilístico del estimador seguirá siendo distinto del hi- potético parámetro poblacional desconocido. El objeto del ejemplo no es defender un mode- lo, sino probar la posible indeterminación - del límite probabilístico del estimador si - el ruido es no estacionario y del mismo or- den de integración que el del regresor.

Cuadro 1

Modelo estimado	Coeficientes de elasticidad	
	Depósitos Cajas	Depósitos Banca
Series no diferenciadas	1,06	1,03
Diferenciación correcta con modelización de la parte aleatoria ($\Delta_1 \Delta_{12}$)	0,40	1,25
Diferenciación correcta sin modelización de la parte aleatoria ($\Delta_1 \Delta_{12}$)	0,45	1,19
Series sobrediferenciadas ($\Delta_1^2 \Delta_{12}$)	0,37	1,09
Series sobrediferenciadas ($\Delta_1^3 \Delta_{12}$)	0,37	1,08
Series sobrediferenciadas ($\Delta_1^4 \Delta_{12}$)	0,38	1,05

En resumen, unas elasticidades próximas a la unidad cuando los modelos se estiman en niveles, se traducen en unas elasticidades "depósitos-disponibilidades líquidas" de "0,40" - para las Cajas de Ahorro y de "1,25" para la Banca. Dado que según datos referidos a Septiembre de 1982 la estructura porcentual de las disponibilidades líquidas se descompone en:

Depósitos Cajas	32%
Depósitos Banca	59%
Efectivo en poder del público	9%
	100%

la suma ponderada de elasticidades de los depósitos de las Cajas de Ahorro y de la Banca da una elasticidad total de los depósitos -- con respecto a las disponibilidades líquidas de "0,87", porcentaje próximo a la participación de los depósitos en el total de las disponibilidades líquidas, lo que prueba que -- los resultados obtenidos son plausibles.

4. CONCLUSIONES.

Este trabajo trata de poner de manifiesto -- las graves consecuencias que en determinados casos puede tener operar con series que den lugar a un proceso de generación no estacionario de la parte aleatoria del modelo. La -- relación entre depósitos y disponibilidades líquidas se utiliza como ilustrativa de este tipo de problemas. A este respecto cabe destacar que es muy posible que el modelo esté mal especificado con lo cual la propiedad de consistencia que se utiliza como marco de referencia sería discutible en tal contexto. -- En particular, nada garantiza que las disponibilidades líquidas sean una variable -- piamente exógena distribuida independientemente de la parte aleatoria. No obstante, el ejemplo es ilustrativo de que al utilizar un grado de diferenciación inadecuado, en el caso de los depósitos de las Cajas de Ahorro, el coeficiente de elasticidad estimado difiere sensiblemente del que se deduce cuando se opera con series que garantizan la estacionariedad del ruido. Por otro lado, al sobrediferenciar las series el estimador se estabiliza alrededor de "0,4", tal como cabía esperar en función de los desarrollos analíticos.

Sin duda, de haberse utilizado series simuladas, el comportamiento del estimador habría podido ser objeto de un análisis más preciso, dado que el parámetro poblacional sería "a priori" conocido. No obstante, utilizar series reales tiene la ventaja de permitir -- destacar la importancia del problema desde -- una óptica operativa, ya que ante unos nuevos objetivos de política monetaria, es de -- interés determinar --aunque sólo sea de forma imperfecta y aproximada, puesto que se carece de la información necesaria para desarrollar un estudio en profundidad-- la posible -- incidencia de tales objetivos sobre la evolución de los depósitos. De hecho, la menor dependencia de los depósitos de las Cajas de Ahorro que de los depósitos de la Banca con respecto al grado de expansividad o contractividad de la política monetaria que de estas estimaciones se desprende, es congruente con el hecho de que en las Cajas de Ahorro -- tienen un mayor peso que en la Banca los depósitos de particulares. En este orden de ideas, de acuerdo con otros estudios realizados al respecto, parece que el multiplicador del crédito sobre los depósitos es inferior para las Cajas de Ahorro que para la Banca, y ello puede explicar la menor sensibilidad de la evolución de los depósitos de las Cajas con relación a la política monetaria seguida.

En cualquier caso, no obstante, los resultados obtenidos deben entenderse, fundamentalmente, como ilustrativos de un problema econométrico. El grado en que finalmente un -- cambio en la política monetaria seguida afecta a los depósitos de las Cajas de Ahorro o de la Banca, depende de los instrumentos a través de los que se implemente la nueva política monetaria. Y las elasticidades que de este trabajo se desprenden, no son más que -- el reflejo de la respuesta "promedio" durante el período analizado (Enero de 1972 hasta Agosto de 1982) de las tasas de variación de los depósitos con respecto a las tasas de variación de las disponibilidades líquidas. Nada garantiza la estabilidad de los respectivos coeficientes de elasticidad y su independencia de los instrumentos de política monetaria utilizados. Tal dosis de cautela es imprescindible para pasar de unos desarrollos analíticos a la interpretación de unos resultados cuantitativos obtenidos utilizando series económicas reales.

5. ANEXO: CONDICIONES DE CONSISTENCIA EN LA ESTIMACIÓN POR MCO DE UN MODELO LINEAL CON CAUSALIDAD INSTANTÁNEA:

Consideremos un modelo lineal con un regresor " X_t " que explica el comportamiento de una variable " Y_t " de tal modo que

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$$

donde " X_t " y el término de perturbación " U_t " son mutuamente independientes.

Supongamos además que " Y_t " y " X_t " son procesos de la forma

$$(1-B)(1-B^{12})Y_t = \mu_Y + \psi_Y(B)\varepsilon_{Yt}$$

$$(1-B)(1-B^{12})X_t = \mu_X + \psi_X(B)\varepsilon_{Xt}$$

siendo

$$\psi_Y(B) = \frac{1 - \theta_{Y1}B \dots \dots \dots \theta_{Yq_Y}B^{q_Y}}{1 - \phi_{Y1}B \dots \dots \dots \phi_{Yp_Y}B^{p_Y}}$$

$$\psi_X(B) = \frac{1 - \theta_{X1}B \dots \dots \dots \theta_{Xq_X}B^{q_X}}{1 - \phi_{X1}B \dots \dots \dots \phi_{Xp_X}B^{p_X}}$$

El estimador mínimo cuadrático " $\hat{\beta}$ " verifica

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t^* U_t^*}{\sum_{t=1}^T (X_t^*)^2}$$

donde el símbolo "*" indica que las variables tienen origen en su media.

Suponemos que " U_t " es un proceso del tipo

$$(1-B)(1-B^{12})U_t = \mu_U + \psi_U(B)\varepsilon_{Ut}$$

donde

$$\psi_U(B) = \frac{1 - \theta_{U1}B \dots \dots \dots \theta_{Uq_U}B^{q_U}}{1 - \phi_{U1}B \dots \dots \dots \phi_{Up_U}B^{p_U}}$$

Como puede verse en /2/ se tendrá

$$\lim \hat{\beta} = \beta + \frac{\mu_U}{\mu_X}$$

con lo que la consistencia de " $\hat{\beta}$ " sólo está asegurada cuando: $\mu_X \neq 0$; $\mu_U = 0$.

En el caso que estamos analizando se verifica que ambas derivas son nulas con lo cual no está garantizada la consistencia, dado que se plantea un problema de indeterminación.

6. BIBLIOGRAFÍA.

- /1/ RAYMOND Y ANGULO "Niveles vs. Diferencias en la Estimación de Modelos", Estudios, Asesoramiento y Programación de la CECA, Documento de Trabajo nº 5. --- (1982).
- /2/ ANGULO, RAYMOND Y REPILADO "Relaciones de Causalidad en Economía y Tests para Detectar su Existencia", Instituto de Estudios Fiscales, Monografía nº 16. -- (1982).

7. NOTAS.

- (1) Ello es indicativo de que existe al menos una variable omitida, cuyo efecto es recogido por la perturbación, que sigue un proceso integrado de igual orden que el regresor.
- (2) Aplicando las técnicas del análisis de series temporales se comprueba que la causalidad de " ℓ (DL)" sobre " ℓ_n (DC)" es instantánea y que la estructura dinámica que el modelo estimado implica es la adecuada. El estadístico "S" de Pierce que se calcula a través de las correlaciones cruzadas entre el imput preblanqueado y los residuos (véase Box-Jenkins 1976), - pág. 395), no resulta significativo a un nivel de confianza del 90% y 15 grados de libertad.
- (3) También en este caso se comprueba que la causalidad es instantánea y que la estructura dinámica del modelo es la adecuada, según se desprende del estadístico de Pierce.