Publ. Mat. **46** (2002), 327–352

EXTENSION D'HOMÉOMORPHISMES CR ENTRE VARIÉTÉS POLYNÔMIALEMENT RIGIDES

Patrick Lahondès

Abstract

Let $f\colon M \to M'$ be a CR homeomorphism between two minimal, rigid polynomial varieties of $\mathbb{C}^n$ without holomorphic curves. We show that f extends biholomorphically in a neighborhood of M if f extends holomorphically in a neighborghood of a point $p_0 \in M$ or if f is of class $\mathcal{C}^1$. In the other hand, in case M and M' are two algebraic hypersurfaces, we obtain the extension without supplementary conditions.

1. Introduction

Dans cet article, nous déterminons des conditions pour qu'un homéomorphisme de Cauchy-Riemann (notée CR) continu entre deux variétés de Cauchy-Riemann analytiques réelles (on s'intéressera uniquement à ce cas) se prolonge holomorphiquement au voisinage de la variété de départ. Les principaux résultats obtenus sont:

Théorème 1.1. *Soit $f\colon M \to M'$ un homéomorphisme CR entre deux variétés polynômialement rigides de $\mathbb{C}^n$, minimales, sans courbe holomorphe. Alors f s'étend biholomorphiquement sur un voisinage de la variété M s'il existe un point $p_0 \in M$ au voisinage duquel f s'étend holomorphiquement.*

Théorème 1.2. *Soit $f\colon M \to M'$ un homéomorphisme CR, entre deux hypersurfaces algébriques réelles de $\mathbb{C}^n$ ne contenant pas d'ensemble analytique complexe non trivial, alors f se prolonge biholomorphiquement sur un voisinage de l'hypersurface M.*

Dans le cas hypersurface, ce problème est fortement lié au prolongement des applications holomorphes propres entre domaines à bord analytique réel ([**DF88**], [**BR88**]). En effet, si les applications sont continues

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32D15, 32H35, 32V25.
Mots-clés. Correspondances holomorphes propres, variété polynômialement rigide, variété de Segre, principe de réflexion.

jusqu'au bord du domaine, l'étude se ramène à celle des applications CR entre hypersurfaces réelles analytiques. Inversement, une application CR entre deux hypersurfaces CR minimales se prolonge holomorphiquement d'un coté de la variété ([**Tum89a**]), et le problème est alors de montrer que cette extension est propre (localement). Cette situation a beaucoup été étudié, notamment, pour ne citer que les résultats récents, dans [**BHR96**] où il est demandé que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, et dans [**CPS99**] et [**CPS00**] avec f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sous la seule condition de continuité de f, Bell-Catlin [**BC88**] puis Huang [**Hua00**] donnent une condition suffisante pour que l'extension unilatérale de f soit propre quand les hypersurfaces sont pseudoconvexes. De même, Pinchuk-Tsyganov [**PT90**] montrent que f se prolonge holomorphiquement lorsque les hypersurfaces sont strictement pseudoconvexes. Enfin, Huang [**Hua96**] obtient un résultat similaire sans condition de pseudoconvexité mais valable dans $\mathbb{C}^2$ seulement.

En codimension supérieure, Baouendi-Jacobowitz-Trèves [**BJT85**] ont montré que tout difféomorphisme CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui s'étend holomorphiquement à un wedge d'edge M est analytique. En ce qui concerne les quadriques (qui sont le bord de domaines de Siegel), l'extension de f est obtenu par Tumanov-Henkin [**TH83**] avec une condition de stricte pseudoconvexité des variétés M et M', et par Tumanov [**Tum89b**], Forstnerič [**For92**] et Soukhov [**Suk94**] avec des conditions de Levi non-dégénérescence. Dans ces articles, la structure géométrique des quadriques est fortement utilisée. Mais ensuite, avec peu de régularité sur f (homéomorphisme, ou de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient une extension de f (biholomorphe ou rationnelle). Enfin, dans l'article [**For91**], Forstnerič montre que tout homéomorphisme CR local entre variétés réelles analytiques strictement pseudoconvexes et "over-extendable" (dont on donnera la définition à la fin de la section suivante) se prolonge en un biholomorphisme local. On peut remarquer que dans tous ces articles, une diminution de la régularité des applications est compensée par de plus fortes conditions sur les variétés et inversement.

Nous travaillons ici avec des variétés polynômialement rigides, ce qui généralise la notion de quadrique, et sans condition de pseudoconvexité. On demande peu de régularité à l'application, mais en revanche, on a besoin d'avoir déjà l'extension holomorphe de l'application au voisinage d'un point p_0. Un peu plus de régularité sur l'application assure l'existence d'un point d'extension holomorphe, ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Corollaire 1.3. *Soit $f: M \to M'$ un homéomorphisme CR de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux variétés polynômialement rigides de $\mathbb{C}^n$, minimales, sans courbe holomorphe. Alors f s'étend biholomorphiquement sur un voisinage de la variété M.*

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques situations où la condition d'extension holomorphe de f au voisinage d'un point de M est vérifiée sans avoir à supposer f de classe $\mathcal{C}^1$.

On a vu précédemment que [**For91**] nous donnait une condition suffisante pour que f s'étende biholomorphiquement au voisinage d'un point p_0, ce qui nous permet d'obtenir ensuite l'extension biholomorphe de f au voisinage de tout point de M. Mais il n'est pas toujours possible de trouver, sur une variété vérifiant les hypothèse du Théorème 1.1, des point strictements pseudoconvexes contrairement au cas hypersurface.

Exemple 1.4. La variété $M_0 \subset \mathbb{C}^4 \ni (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, w_1, w_2)$ définie par:

$$\begin{cases} x_1 = w_1\bar{w}_1 - w_2\bar{w}_2, \\ x_2 = w_1^2\bar{w}_2^2 + \bar{w}_1^2 w_2^2, \end{cases} \tag{1}$$

ne possède aucun point strictement pseudoconvexe.

Mais si, pour cet exemple, [**For91**] ne nous permet pas d'obtenir un point de prolongement holomorphe, on peut appliquer le Théorème 1.2 de Boggess-Polking [**BP82**] à la variété M_0 car l'enveloppe convexe de l'image de sa forme de Levi est $\mathbb{R}^d$ tout entier en tout point tel que $w_1 w_2 \neq 0$.

Enfin, on a vu que l'on pouvait obtenir un résultat général pour les homéomorphismes CR entre hypersurfaces algébriques réelles. En effet, dans ce cas, on sait que si f se prolonge en tant que correspondance au voisinage d'un point p, elle se prolonge holomorphiquement au voisinage de ce point (*cf.* [**DP98**]). Or en codimension supérieure, il n'existe pas de résultat équivalent. Néanmoins, si l'on considère M et M' polynômialement rigides, on a un bon contrôle de la géométrie de ces variétés ce qui nous permet d'obtenir ce résultat (*cf.* Proposition 8.1). De plus, il est toujours possible de trouver un point de prolongement holomorphe dans le cas hypersurface.

La démonstration du Théorème 1.1, inspirée d'un travail de Coupet-Pinchuk [**CP96**], repose sur l'utilisation des variétés de Segre introduites par Segre [**Seg31**] et développées par Webster [**Web77**]. La définition des variétés de Segre et quelques-unes de leurs propriétés élémentaires ainsi que la notion de correspondance holomorphe propre seront données dans la Section 3. Les Sections 4 et 5 seront consacrées à l'extension de f en tant qu'application algébrique puis en tant que correspondance holomorphe propre. Le passage de l'extension en tant que correspondance à celle de l'extension holomorphe repose sur deux propriétés importantes d'invariance dont la démonstration, assez technique, sera réalisée dans les Sections 6 et 7. Enfin, dans la Section 8, nous terminerons la démonstration du Théorème 1.1. en utilisant le Théorème des disques de Benhke-Sommer.

2. Définitions et notations

Une variété CR est dite *minimale* (au sens de Tumanov) si et seulement si elle ne contient pas de sous-variété CR propre de même dimension CR. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une variété CR. On dira que M est de *type fini en* $p \in M$ (au sens de Bloom-Graham) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(M, T^c M)$ tels que les X_i et leurs commutateurs d'ordre inférieurs à N engendrent $T_p M$. Lorsque les variétés sont réelles algébriques, on montre, grâce au Théorème de Nagano [**Nag66**], qu'il est équivalent de dire qu'elles sont de type fini (au sens de Bloom-Graham) ou de dire qu'elles sont minimales au sens de Tumanov (*cf.* [**BR90**]).

On dit que f est un *homéomorphisme CR* entre les variété M et M' lorsque f est un homéomorphisme et f est CR. Lorsque M et M' sont des hypersurfaces, Diederich-Pinchuk [**DP93**] montrent que f^{-1} est aussi CR. Dans notre situation, on établit un résultat similaire (*cf.* Proposition 4.3).

Soit p un point de $\mathbb{C}^n$, on notera par U_p un voisinage ouvert connexe de p dans $\mathbb{C}^n$. Lorsque nous travaillerons avec des applications entre variétés algébriques réelles, tout objet de l'espace d'arrivée sera noté avec un $'$.

On notera les points $t \in \mathbb{C}^n$ par $t = (z, w)$, où $z \in \mathbb{C}^m$ et $w \in \mathbb{C}^d$ avec $m + d = n$. Soit M une variété CR, elle sera dite *polynômialement rigide* si elle est définie par:

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w + \rho(z) = 0\}, \tag{2}$$

avec ρ une application polynômiale réelle de la forme:

$$\rho(z) = (\rho_1(z), \ldots, \rho_d(z)) = \left(\sum_{j,k} a^1_{jk} z^j \overline{z}^k, \ldots, \sum_{j,k} a^d_{jk} z^j \overline{z}^k \right), \tag{3}$$

où $j = (j_1, \ldots, j_m)$, $k = (k_1, \ldots, k_m)$ sont des multi-indices et $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$ pour tout k, j (pour que $\rho(z)$ soit réelle). D'après la définition, il est clair que M est une variété CR générique de dimension complexe m.

Remarque 2.1. Pour tout point $p \in M$, il existe un changement de variables polynômial biholomorphe tel que la variété M soit définie au voisinage de p par des équations de la forme (2) avec $\rho(p) = 0$ et $d\rho(p) = 0$.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ un cône ouvert connexe de sommet 0 et $U_p \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de $p \in M$ sur lequel M est définie par des équations de la forme (2) avec $\rho(p) = 0$ et $d\rho(p) = 0$. Nous notons alors $W(\Gamma, U_p)$ le wedge d'edge M défini par

$$W(\Gamma, U_p) = \{(z, w) \in U_p / \operatorname{Re} w + \rho(z) \in \Gamma\}.$$

La condition d'"*over-extendability*" concerne l'extension des fonctions CR sur M. Soit $p \in M$, on demande que toute fonction CR sur M au voisinage de p s'étende près de p à un wedge $W(\Gamma, U_p)$ d'edge M tel que le cône Γ déterminant le wedge $W(\Gamma, U_p)$ soit strictement plus grand que le cône de Levi de M en p (voir [**For91**]).

3. Variétés de Segre, correspondances holomorphes propres

Dans un premier temps, nous allons introduire la notion de variété de Segre. Soit M une variété polynômialement rigide de la forme (2), comme $\operatorname{Re} w + \rho(z)$ est une application algébrique réelle, on peut considérer sa complexification $\frac{w+\overline{\xi}}{2} + \rho(z, \overline{\zeta})$, définie sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, qui est holomorphe en $t = (z, w)$ et antiholomorphe en $\tau = (\zeta, \xi)$. Soit $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^n$, on appelle alors la variété algébrique complexe fermée de dimension m définie par:

$$Q_\tau = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n : w + \overline{\xi} + 2\rho(z, \overline{\zeta}) = 0\},$$

la *variété de Segre* de M en τ. Cette variété de Segre est un graphe au dessus de $\mathbb{C}^n_z$. En effet, $Q_\tau = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n / z \in \mathbb{C}^m,\ w = -\overline{\xi} - 2\rho(z, \overline{\zeta})\} = \{(z, \sigma_\tau(z)) / z \in \mathbb{C}^m\}$ où $\sigma_\tau(z) = -\overline{\xi} - 2\rho(z, \overline{\zeta})$.

On appelle symétrique de $\tau = (\zeta, \xi)$, l'unique point noté ${}^s\tau$ de la forme $(\zeta, \sigma_\tau(\zeta))$ tel que ${}^s\tau \in Q_\tau$.

Pour $\tau \in \mathbb{C}^n$ on définit l'ensemble analytique A_τ par:

$$A_\tau = \{t \in \mathbb{C}^n : Q_t = Q_\tau\}.$$

Nous allons énoncer un certain nombre de propriétés élémentaires des variétés de Segre qui nous seront utiles par la suite (*cf.* [**DF88**], [**DP95**]).

Propriétés 3.1. *Pour tout* $t, \tau \in \mathbb{C}^n$ *on a:*

1. $t \in Q_\tau \iff \tau \in Q_t$.
2. $t \in Q_t \iff t \in M$.
3. $\tau \in A_\tau$.
4. *Si* $\tau \in M$, A_τ *est une sous-variété complexe de* M.

On dit que M est *essentiellement fini en* τ si $A_\tau = \{\tau\}$ dans un voisinage de τ. Donc, si M est supposée sans courbe holomorphe en τ, on déduit du quatrième point de la Propriété 3.1 précédente que M est alors essentiellement fini en τ.

La propriété suivante est la propriété d'invariance des variétés de Segre. De nombreux résultats d'extension reposent sur cette propriété d'invariance.

Propriété 3.2. *Soit* M, M' *deux variétés réelles algébriques de* $\mathbb{C}^n$ *et soit* $f\colon U_p \to U'_{p'}$ *une application holomorphe entre deux voisinages ouverts d'un point* $p \in M$ *et d'un point* $p' \in M'$ *avec* $p' = f(p)$ *telle que* $f(M \cap U_p) \subset M' \cap U'_{p'}$ *alors, pour tout* $t \in M \cap U_p$ *il existe un voisinage* $U_t \subset U_p$ *tel que pour tout* $\tau \in U_t$,

$$f(Q_\tau \cap U_t) \subset Q'_{f(\tau)}.$$

Propriété 3.3. *Soit* M *une variété polynômialement rigide de la forme* (2) *alors pour tout cône* $\Gamma \in \mathbb{R}^d$ *et pour tout* $\tau \in W(\Gamma, \mathbb{C}^n)$, ${}^s\tau \in W(-\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

Preuve des propriétés précédentes: Les premières propriétés résultent de l'identité $\rho(z, \bar{w}) = \overline{\rho(w, \bar{z})}$.

La Propriété 3.2 est une conséquence de la relation $f(M \cap U_p) \subset M' \cap U'_{p'}$ qui se traduit par $\forall\, t \in M \cap U_p$, $\rho(t, \bar{t}) = 0 \Rightarrow \rho'(f(t), \overline{f(t)}) = 0$, et du lemme de division des fonctions analytiques réelles.

Montrons la Propriété 3.3. Soit Γ un cône de $\mathbb{R}^d$ et $\tau = (\zeta, \xi) \in W(\Gamma, \mathbb{C}^n)$. Cela signifie que $\operatorname{Re}\xi + \rho(\zeta) \in \Gamma$. On veut alors montrer que ${}^s\tau \in W(-\Gamma, \mathbb{C}^n)$. Or $Q_\tau = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n : w + \overline{\xi} + 2\rho(z, \overline{\zeta}) = 0\}$ donc ${}^s\tau = (\zeta, -2\rho(\zeta, \overline{\zeta}) - \overline{\xi})$. Et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(-2\rho(\zeta, \overline{\zeta}) - \overline{\xi}) + \rho(\zeta) &= -2\rho(\zeta) - \operatorname{Re}\xi + \rho(\zeta),\\
&= -(\operatorname{Re}\xi + \rho(\zeta)),\\
&\in -\Gamma,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la dernière propriété. □

Proposition 3.4. *Soit M une variété polynômialement rigide de la forme* (2)*, $p \in M$ et Γ un cône de $\mathbb{R}^d$; Alors il existe un voisinage U_p et un point $\tau \in W(-\Gamma, U_p)$ tel que pour tout t dans un voisinage de τ, $Q_t \cap W(\Gamma, U_p)$ soit connexe.*

Preuve de la Proposition 3.4: Soit $p \in M$ et $U_p = U_{p,z} \times U_{p,w}$ un voisinage ouvert sur lequel M est définie par des équations de la forme (2) avec $\rho(p) = 0$ et $d\rho(p) = 0$. On peut aussi travailler, sans perdre de généralité, avec le cône $\Gamma = (\mathbb{R}^+)^d$. Soit $\tau = (\zeta, \xi) \in W(-\Gamma, U_p)$, regardons l'ensemble

$$U_\tau = \{z \in U_{p,z} : (z, \sigma_\tau(z)) \in W(\Gamma, \mathbb{C}^n)\},$$

où $\sigma_\tau(z) = -(\overline{\xi} + 2\rho(z, \overline{\zeta}))$. Regardons comment varie U_τ lorsque τ se promène dans une direction normale à M intérieure au cône Γ, c'est à dire lorsque τ est de la forme $\tau = \lambda u = (0, \lambda)$ avec $u = (0_m, 1_d)$ et $\lambda > 0$. On a

$$\frac{\partial \sigma_\lambda(z)}{\partial \lambda} = -1 \in \mathbb{R}^d.$$

Ceci entraîne que si $\lambda' > \lambda$, c'est à dire lorsque l'on s'éloigne de M suivant la normale u alors $U_{(0,\lambda)} \subset U_{(0,\lambda')}$, et la proposition découle de cette relation. □

Soit $p \in M$ et U_p un voisinage de p, notons $\mathcal{S} = \mathcal{S}(U_p)$ l'ensemble des variétés de Segre $\{Q_\tau : \tau \in U_p\}$ et λ l'application de Segre (*cf.* [**DW80**], [**DF88**], [**DFY94**] et [**DP95**]) définie par:

$$\begin{array}{rccc} \lambda\colon & U_p & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & \tau & \longrightarrow & Q_\tau. \end{array}$$

On peut définir une structure de variété analytique complexe de dimension finie sur $\mathcal{S}$ telle que l'application λ soit un revêtement ramifié fini antiholomorphe. En effet, l'équation $w + \overline{\xi} + 2\rho(z, \overline{\zeta}) = 0$ qui définie Q_τ est équivalente à

$$w = -\overline{\xi} + \sum b_k(\overline{\zeta}) z^k, \tag{4}$$

où la somme du terme de droite est finie et les b_k sont des polynômes. Les coefficients $b_k(\overline{\zeta})$ et $\overline{\xi}$ peuvent être considérés comme les coordonnées de Q_τ dans un certain $\mathbb{C}^N$.

Nous allons maintenant introduire la notion de correspondance holomorphe propre ainsi que celle d'extension d'application en une correspondance holomorphe propre.

Définition 3.5. Une *correspondance holomorphe propre* est un ensemble analytique complexe fermé $F \subset U \times U'$, de dimension n, avec U et U' deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, et avec la propriété que la projection $\pi\colon F \to U$ est propre. La correspondance F est dite *irréductible* si F est irréductible en tant qu'ensemble analytique.

Définition 3.6. Soit $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ deux domaines de $\mathbb{C}^n$, f une application holomorphe de D sur D' et $p \in \partial D$. On dit que f s'étend en une correspondance holomorphe propre à un voisinage U_p de p s'il existe un voisinage ouvert $U' \in \mathbb{C}^n$ et une correspondance holomorphe propre irréductible $F \subset U_p \times U'$, telle que $\Gamma_f \cap \{(D \cap U) \times D'\} \subset F$, où Γ_f est le graphe de f.

Une correspondance F associe à tout point $p \in U$ un nombre fini d'images, qui sont l'ensemble des points $\widehat{F}(z) = \pi'(\pi^{-1}(p)) \subset U'$, où π' est la projection de F sur U'. Le nombre de ces images, compté avec multiplicité, est égal au nombre k de feuillets du revêtement ramifié $\pi\colon F \to U$. On note E le *lieu de branchement* de F c'est à dire l'ensemble analytique complexe de dimension $n-1$ formé des points de U tels que $\pi_{|\pi^{-1}(U \setminus E)}$ soit une application localement biholomorphe.

4. Algébricité et résultats préliminaires

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème 1.1. On veut montrer que les applications f et f^{-1} s'étendent algébriquement à tout $\mathbb{C}^n$.

On rappelle qu'une application f s'étend en une application algébrique complexe si le graphe de f est une partie d'un ensemble algébrique complexe de dimension n. C'est à dire s'il existe un ensemble algébrique complexe $F \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de dimension n tel que $\Gamma_f \subset F$ où Γ_f est le graphe de f. Si F est un ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, on note F^{-1}, l'ensemble algébrique complexe $F^{-1} = \{(t', t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : (t, t') \in F\}$.

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, f et f^{-1} s'étendent en des applications algébriques complexes. De plus les graphes F et G de ces extensions sont tels que $G = F^{-1}$.*

L'hypothèse que M et M' soient des variétés polynômialement rigides n'est pas nécessaire ici, il suffit de supposer que les variétés soient réelles algébriques.

Preuve de la Proposition 4.1: Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il existe un point p proche de p_0 au voisinage duquel f se prolonge biholomorphiquement. Notons U_{p_0} un voisinage de p_0 sur lequel

f se prolonge holomorphiquement. Soit $N \leq n$ le rang maximal de la matrice jacobienne de f sur U_{p_0}. L'ensemble $J_0 = \{t \in U_{p_0}$: le rang de la matrice jacobienne de f en t est inférieur à $N\}$ est un ensemble analytique de U_{p_0} de dimension strictement inférieure à n. Donc $M \cap U_{p_0} \not\subset J_0$ car M est générique. Soit $p \in (M \cap U_{p_0}) \backslash J_0$ et U_p un voisinage de p tel que $U_p \cap J_0 = \emptyset$. Alors $f(U_p)$ est un ensemble analytique de dimension N par le théorème du rang constant et comme f est un homéomorphisme de M sur M', il existe un voisinage $U_{f(p)} \subset \mathbb{C}^n$ de $f(p)$ tel que $(M' \cap U_{f(p)}) \subset (M' \cap f(U_p)) \subset f(U_p)$. Or M' est générique, il est donc nécessaire que $N = n$, donc $J_0 = \{t \in U_p : \mathrm{Jac}(f)(t) = 0\}$ et f est un biholomorphisme au voisinage de p.

Pour prouver l'algébricité de f, il suffit maintenant d'appliquer le Théorème de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [**BER96**] suivant au voisinage du point $p \in M$ où f s'étend biholomorphiquement:

Théorème (Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [**BER96**]). *Soit $M, M' \in \mathbb{C}^n$ deux variétés génériques algébriques réelles. Supposons que M soit de type fini, holomorphiquement non-dégénérée. Si f est un biholomorphisme défini dans un voisinage de M, envoyant M sur M', alors f est algébrique.*

Remarque 4.2. Une variété M est dite holomorphiquement non-dégénérée en p si il n'existe pas de germe de champ de vecteurs holomorphe, avec coefficients holomorphe, tangent à M au voisinage de p, mais non identiquement nul sur M. Dans [**BER96**], il est montré que si M est essentiellement fini en un point p, alors M est holomorphiquement non-dégénérée en tout point de M.

On note F l'ensemble algébrique complexe irréductible de dimension complexe n de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tel que $\Gamma_{f_{|U_p}} \subset F$ où U_p est un voisinage ouvert de p sur lequel f se prolonge biholomorphiquement. On a alors que $\Gamma_{f_{|M}} \subset F$ et donc que F est un prolongement algébrique de f car f est une application CR. On note E le lieu de branchement de F.

Pour f^{-1}, on applique le Théorème de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [**BER96**] à $(f^{-1})_{|f(U_p)}$. On note ensuite G l'ensemble algébrique complexe irréductible de dimension complexe n de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tel que $\Gamma_{(f^{-1})_{|f(U_p)}} \subset G$. Mais on ne sait pas encore si G est un prolongement algébrique de f^{-1}.

Il nous reste donc à montrer que $F^{-1} = G$ et que $\Gamma_{(f^{-1})_{|M'}} \subset G$ pour prouver la Proposition 4.1. Or on peut voir que:

$$\begin{cases} \Gamma_{f_{|U_p}} \subset F \text{ donc que } (\Gamma_{f_{|U_p}})^{-1} \subset F^{-1}, \\ \Gamma_{(f^{-1})_{|f(U_p)}} = \Gamma_{(f_{|U_p})^{-1}} = (\Gamma_{f_{|U_p}})^{-1} \subset G. \end{cases}$$

Donc F^{-1} et G coïncident sur l'ouvert $U_p \times U'_{p'}$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ ce qui implique que $G = F^{-1}$ car ce sont deux ensembles algébriques complexes irréductibles.

Enfin, comme $\Gamma_{(f^{-1})_{|M'}} = (\Gamma_{f_{|M}})^{-1}$ et que $\Gamma_{f_{|M}} \subset F$, on en déduit que $\Gamma_{(f^{-1})_{|M'}} \subset G$. Donc G est bien un prolongement algébrique de f^{-1}. □

Après avoir prolonger f algébriquement, on peut déjà prolonger f holomorphiquement au voisinage d'un certain nombre de points de M. Si $p \in M$ n'appartient pas au lieu de branchement E de F, on peut prolonger f holomorphiquement au voisinage de p. En effet, soit U_p un voisinage de p tel que $U_p \cap E = \emptyset$ et regardons la composante irréductible de $F \cap (U_p \times \mathbb{C}^n)$. C'est une variété algébrique complexe qui est le graphe de l'extension holomorphe de f sur U_p. De plus E est un ensemble analytique donc $M \not\subset E$ car M est générique et $\dim_{\mathbb{R}}(M \cap E) = \dim_{\mathbb{R}} M - 2$ car M est minimale. Donc pour tout point $p \in M$, il existe un point $q \in M$ proche de p au voisinage duquel f se prolonge holomorphiquement.

La fin de la démonstration précédente nous permet de prouver le résultat suivant:

Proposition 4.3. *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, l'application f^{-1} est CR.*

Preuve de la Proposition 4.3: Le fait que $\Gamma_{f^{-1}} \subset G = F^{-1}$ montre tout d'abord que f^{-1} est CR sur $M' \backslash E'$, où E' est le lieu de branchement de F^{-1}. En effet, on vient de voir que sur cet ensemble f^{-1} est la trace sur M' d'une application holomorphe.

Enfin, comme M' est générique et minimale, on peut montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(M' \cap E') = \dim_{\mathbb{R}} M' - 2$. On en déduit donc, grâce à un Théorème de Harvey-Polking [**HP70**], que f^{-1} est CR sur M'. □

Dans le cas où $p \in E$, on ne sait pas encore si f s'étend holomorphiquement sur un voisinage de p tout entier, mais on sait qu'en même que f s'étend holomorphiquement sur un wedge d'edge M car M est minimale en p (*cf.* Tumanov [**Tum89a**]). On va alors s'intéresser à la nature de cette extension.

Pour cela, on va utiliser un Lemme de Chirka-Rea ([**CR94**, Lemme 2, p. 426]). Soit $p \in M$ et $U_p \cap M$ un voisinage de p sur M tel que le Théorème d'approximation de Baouendi-Trèves [**BT81**] puisse s'appliquer à $\overline{U_p \cap M}$ et à $\overline{f(U_p \cap M)}$ (*i.e. les fonctions CR de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* M *(resp.* M'*) sont limites uniformes de polynômes sur* $\overline{U_p \cap M}$ *(resp.* $\overline{f(U_p \cap M)}$*)*). Considérons $(U_p \cap M)^{\sim}$ l'enveloppe formée par les disques analytiques φ attachés à $U_p \cap M$. On rappelle qu'un disque analytique φ attaché à $U_p \cap M$ est une application $\varphi \colon \overline{D} \to \mathbb{C}^n$ qui est continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D telle que $\varphi(\partial D) \subset U_p \cap M$ où D est le disque unité de $\mathbb{C}$ et ∂D est le bord du disque D. $(U_p \cap M)^{\sim}$ est donc l'ensemble:

$$(U_p \cap M)^{\sim} = \{z \in U_p : \exists\, \varphi \text{ et } \gamma \in D \text{ tel que } \varphi(\gamma) = z\}.$$

De la même façon on définit $(f(U_p \cap M))^{\sim}$ l'enveloppe formée par les disques analytiques attachés à l'ouvert $f(U_p \cap M) \subset M'$.

Lemme 4.4 ([**CR94**])**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, il existe un biholomorphisme* $\widetilde{f} \colon \operatorname{int}((U_p \cap M)^{\sim}) \to \operatorname{int}((f(U_p \cap M)^{\sim})$ *qui prolonge continûment* $f \colon U_p \cap M \to f(U_p \cap M)$*.*

Preuve du Lemme 4.4: D'après la construction de $(U_p \cap M)^{\sim}$, on obtient grâce au principe du maximum et au Théorème d'approximation de Baouendi-Trèves, une extension $\widetilde{f}$ de f à $(U_p \cap M)^{\sim}$ telle que:

$\widetilde{f} \colon (U_p \cap M)^{\sim} \to \mathbb{C}^n$ soit continue et $\widetilde{f} \colon \operatorname{int}((U_p \cap M)^{\sim}) \to \mathbb{C}^n$ soit holomorphe. De même, on construit une extension $\widetilde{g} \colon (f(U_p \cap M))^{\sim} \to \mathbb{C}^n$ de f^{-1}.

Montrons maintenant que $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} \equiv \mathrm{Id}$ et que $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} \equiv \mathrm{Id}$. Pour cela, il faut d'abord vérifier que $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ et $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ soient bien définies. Soit φ un disque analytique attaché à $U_p \cap M$, on peut alors regarder $(\widetilde{f} \circ \varphi)(\partial D)$ et on a $(\widetilde{f} \circ \varphi)(\partial D) \subset M'$. Donc $(\widetilde{f} \circ \varphi)$ est un disque analytique attaché à $f(U_p \cap M)$ et $(\widetilde{f} \circ \varphi)(D) \subset (f(U_p \cap M))^{\sim}$. On en déduit alors que $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ est bien définie car on a $\widetilde{f}((U_p \cap M)^{\sim}) \subset (f(U_p \cap M))^{\sim}$. De plus, $(\widetilde{g}(\widetilde{f} \circ \varphi))(\partial D) = \varphi(\partial D)$ c'est à dire que $\widetilde{f}(\widetilde{f} \circ \varphi)$ et φ coïncident sur le bord ∂D de D donc sur D. Donc $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{Id}$ sur $\varphi(D)$ pour tout φ, par conséquent $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{Id}$ sur $(U_p \cap M)^{\sim}$. De la même façon, on obtient que $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{Id}$ sur $(f(U_p \cap M))^{\sim}$. On a donc obtenu le résultat suivant:

Il existe une application biholomorphe $\widetilde{f} \colon \operatorname{int}((U_p \cap M)^{\sim} \to \operatorname{int}((f(U_p \cap M)^{\sim})$ qui prolonge continûment f. $\square$

Or d'après le Théorème de Tumanov [**Tum89a**], on sait qu'il existe un wedge que l'on notera W_p tel que $W_p \subset \mathrm{int}((U_p \cap M)^{\sim})$ et un wedge $W'_{f(p)} \subset \mathrm{int}((f(U_p \cap M))^{\sim}$.

Remarque 4.5. Donc $\widetilde{f}\colon W_p \to \mathbb{C}^n$ est un biholomorphisme sur son image (de même pour $\widetilde{g}$).

L'extension $\widetilde{f}$ de f obtenue précédemment sera maintenant encore noté f, de même, l'extension $\widetilde{g}$ de f^{-1} sera noté f^{-1}.

5. Extension en tant que correspondance holomorphe propre

Dans cette section, on va montrer que l'extension F précédente est en fait localement (après réduction) une correspondance holomorphe propre, mais on veut aussi que F^{-1} soit localement (après réduction) une correspondance holomorphe propre.

Proposition 5.1. *Soit f un homéomorphisme CR, entre deux variétés polynômialement rigides, de type fini, qui s'étend en une application algébrique complexe, alors f se prolonge localement en une correspondance holomorphe propre F_2.*

Plus précisément, cela signifie que pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage U_p de p tel que f se prolonge en une correspondance holomorphe propre sur U_p.

Si $p \notin E$, c'est évident car f s'étend holomorphiquement au voisinage de p.

Soit $p \in M \cap E$, U_p un voisinage ouvert de p et $U'_{p'}$ un voisinage ouvert de $p' = f(p)$. On regarde la composante irréductible F_1 de $F \cap (U_p \times \mathbb{C}^n)$ telle que $(p, p' = f(p)) \in F_1$ et $\Gamma_f \cap (U_p \times \mathbb{C}^n) \subset F_1$. On appelle ensuite F_2, la composante irréductible de $F_1 \cap (U_p \times U'_{p'})$ telle que $(p, p') \in F_2$ et $\Gamma_f \cap (U_p \times U'_{p'}) \subset F_2$. On veut montrer que $\pi_2^{-1}(p)$ est discret où $\pi_2\colon F_2 \to U_p$. En effet, si $\pi_2^{-1}(p)$ est discret, la projection $\pi_2\colon F_2 \to U_p$ sera localement propre en (p, p') donc il existera deux autres voisinages encore appelé U_p et $U'_{p'}$ tels que $\pi_2^{\star}\colon F_2^{\star} \to U_p$ soit propre avec $F_2^{\star}$ construit comme F_2 (avec les nouveaux voisinages U_p et $U'_{p'}$). On va en fait démontrer que:

Lemme 5.2. *L'ensemble $\pi_1^{-1}(p)$ est discret (où $\pi_1\colon F_1 \to U_p$).*

Ce lemme nous donne bien le résultat voulu *i.e.* $\pi_2^{-1}(p)$ est discret. Pour montrer ce résultat, on va introduire l'ensemble

$$F_1^{\triangledown} = F_1 \cap ({}^{s}W_p \times \mathbb{C}^n),$$

où ${}^sW_p$ est le wedge symétrique de W_p. Si W_p est défini par $W_p = W(\Gamma, U_p)$, ${}^sW_p$ est défini par ${}^sW_p = W(-\Gamma, U_p)$. Dans un premier temps, on va montrer que l'ensemble algébrique F_1^∇ est irréductible.

Lemme 5.3. *L'ensemble algébrique F_1^∇ est irréductible.*

Preuve du Lemme 5.3: Comme F_1^∇ est un ensemble algébrique, on peut, quitte à modifier le système de coordonnés dans $\mathbb{C}^n_{t'}$, le contenir dans un ensemble algébrique défini par un système d'équations de la forme:

$$a_{k0}(t)t_k'^m + \cdots + a_{km}(t) = 0,$$

où les coefficients a_{kj} sont des polynômes complexes. On utilise alors le Théorème de Tumanov [**Tum89a**] puis le théorème de l'edge of the wedge pour prolonger les applications a_{kj} à un voisinage de p tout entier. Donc si F_1^∇ est réductible, F_1 le serait aussi. Or par définition F_1 est irréductible d'où le résultat. □

Preuve de la Proposition 5.1: La démonstration de cette proposition va se réduire à la démonstration du Lemme 5.2.

On va d'abord montrer que:

$$f(Q_t \cap W_p) \subset Q'_{t'} \quad \forall\, (t, t') \in F_1^\nabla. \tag{5}$$

On sait qu'il existe un point $q \in M$ proche de p au voisinage V_q duquel l'application f se prolonge holomorphiquement (on appellera encore f cette extension). D'après la propriété d'invariance des variétés de Segre par une application holomorphe, on a:

$$f({}_{s_t}Q_t) \subset Q'_{f(t)} \quad \forall\, t \in {}^sW_q. \tag{6}$$

Pour $t \in {}^sW_q$ on a bien que ${}^st \in W_q$ d'après la Propriété 3.3 et ${}_{s_\tau}Q_\tau$ désigne la composante connexe de Q_τ contenant ${}^s\tau$.

Posons maintenant

$$\mathcal{K}_1 = \{(t, t') \in {}^sW_p \times \mathbb{C}^n : f({}_{s_t}Q_t) \subset Q'_{t'}\}.$$

C'est un ensemble analytique de $\mathbb{C}^n$ de dimension $n-1$ et pour tout point $\tau \in {}^sW_q$, $(\tau, f(\tau)) \in \mathcal{K}_1$. Soit $\tau \in {}^sW_q$, il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{V}_1$ de $(\tau, f(\tau))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tel que $F_1^\nabla \cap \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{K}_1$, or F_1^∇ est irréductible, on peut donc en déduire que $F_1^\nabla \subset \mathcal{K}_1$, c'est à dire que

$$f({}_{s_t}Q_t) \subset Q'_{t'} \quad \forall\, (t, t') \in F_1^\nabla.$$

De plus, d'après la Proposition 3.4, on sait qu'il existe un point $t \in M$ au voisinage duquel $Q_\tau \cap W_p$ soit connexe. Il existe donc un point $t \in {}^sW_p$ (t n'étant pas un point de branchement de F_1^∇), un point $t' \in \mathbb{C}^n$ et un voisinage $\mathcal{V}_2$ de $(t, t') \in F_1^\nabla$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tel que $\forall\, (\tau, \tau') \in F_1^\nabla \cap \mathcal{V}_2$,

$Q_\tau \cap W_p$ soit connexe. Comme f est une application holomorphe propre (d'après la Remarque 4.5), on en déduit que

$$f(Q_\tau \cap W_p) \subset Q'_{\tau'} \quad \forall\, (\tau, \tau') \in F_1^\nabla \cap \mathcal{V}_2.$$

Considérons alors

$$\mathcal{K}_2 = \{(\tau, \tau') \in {}^sW_p \times \mathbb{C}^n : f(Q_\tau \cap W_p) \subset Q'_{\tau'}\}.$$

C'est un ensemble irréductible de dimension $n-1$. Et de la même façon que précédemment, on montre que $F_1^\nabla \subset \mathcal{K}_2$. on a donc bien montré (5).

Regardons maintenant un couple $((\tau, {\tau'}^1), (\tau, {\tau'}^2)) \in F_1^\nabla$, il est clair que $Q'_{\tau'^1} = Q'_{\tau'^2}$ d'après (5). Or F_1 est irréductible, donc par prolongement analytique, on obtient que la relation précédente reste vraie pour tout couple $((\tau, {\tau'}^1), (\tau, {\tau'}^2)) \in F_1$ ce qui donne la propriété suivante:

Propriété 5.4. *Pour tout couple* $((\tau, {\tau'}^1), (\tau, {\tau'}^2)) \in F_1$*, on a* $Q'_{\tau'^1} = Q'_{\tau'^2}$.

Preuve de la Propriété 5.4: Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{\tau \in U_p \backslash \pi_1(E_1) : \exists\, \mathcal{V}_\tau \text{ tel que } \forall\, u \in \mathcal{V}_\tau,\ \forall\, u'^1,\ u'^2 \in \mathbb{C}^n \\ \text{tels que } (u, u'^i) \in F_1 \text{ alors } Q_{u'^1} = Q_{u'^2}\}.$$

Il est clair que $\mathcal{F}$ est ouvert et non vide, et comme F_1 est connexe, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est fermé pour prouver que $\mathcal{F} = U_p \backslash \pi_1(E_1)$. Soit $(\tau_j)_j$ une suite dans $\mathcal{F}$ qui tend vers $\tau \in U_p \backslash \pi_1(E_1)$ et $\mathcal{V}_\tau$ un voisinage de τ tel que $\mathcal{V}_\tau \cap \pi_1(E_1) = \emptyset$. Supposons qu'il y ait μ fibres au dessus de $\mathcal{V}_\tau$ notées $E_{1,k}$, $1 \le k \le \mu$. Notons $\mathcal{V}'^k_\tau = \pi'_1(E_{1,k})$ et $\pi_{1,k}$ la restriction de π_1 à $E_{1,k}$. Regardons alors

$$\pi'_1 \circ \pi_{1,k}^{-1} \colon \mathcal{V}_\tau \longrightarrow \mathcal{V}'^k_\tau. \tag{7}$$

C'est un biholomorphisme. Il faut donc montrer que pour tout couple $k, l \in \{1, \ldots, \mu\}$ on ait

$$\varphi \circ \pi'_1 \circ \pi_{1,k}^{-1}(u) = \varphi \circ \pi'_1 \circ \pi_{1,l}^{-1}(u) \text{ pour tout } u \in \mathcal{V}_\tau. \tag{8}$$

Or il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_k \in \mathcal{V}_\tau$ donc il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\tau_k}$ de τ_k sur lequel l'égalité (8) est vérifiée car $\tau_k \in \mathcal{F}$, ce qui prouve bien (8). On obtient enfin la Propriété 5.4 par continuité. □

Or cette propriété est aussi valable pour $\tau = p$. Et comme M' est *essentiellement finie* (car M' est sans courbe holomorphe), on sait qu'il n'existe qu'un nombre fini de points τ' au voisinage de $f(p)$ ayant la même variété de Segre, ce qui termine la démonstration du Lemme 5.2 et de ce fait de la Proposition 5.1. □

On peut aussi appliquer cette proposition à F^{-1} et f^{-1} ce qui permet de montrer que f^{-1} se prolonge aussi localement en une correspondance holomorphe propre F_2^{-1}. Pour terminer, on peut remarquer que la Propriété 3.3 et la Proposition 3.4 se généralisent pour des variétés algébriques réelles moyennant un contrôle des wedges. On peut donc généraliser la Proposition 5.1 à des variétés algébriques réelles.

6. Invariance des variétés de Segre

Le but de cette section, est de montrer que les variétés de Segre sont invariantes par $\widehat{F_2}$ et $\widehat{F_2}^{-1}$. On rappelle que $\widehat{F_2} = \pi_2' \circ \pi_2^{-1}$.

Proposition 6.1. *Soit $p \in M$ et $f\colon M \cap U_p \to M' \cap U'_{p'}$ un homéomorphisme CR local, entre deux variétés polynômialement rigides, de type fini, qui s'étend en une correspondance holomorphe propre F_2, alors les variétés de Segre sont invariantes par $\widehat{F_2}$ c'est à dire*

$$\widehat{F_2}(Q_t) \subset Q'_{\widehat{F_2}(t)} \quad \forall\, t \in U_p.$$

Preuve de la Proposition 6.1: Si $p \notin E$, c'est évident d'après la propriété d'invariance des variétés de Segre.

Soit $p \in M \cap E$. On regarde le Théorème 4.1 de Diederich-Pinchuk [**DP95**] et on essaye de faire marcher la démonstration dans notre situation. L'équation (5) et la Propriété 5.4 de la Section 5 nous donnent déjà les deux premiers points de cette démonstration. Il nous reste donc à vérifier le troisième point. Rappelons que $\widehat{F_2}$ est l'application $\widehat{F_2} = \pi_2' \circ \pi_2^{-1}$ et écrivons $\widehat{F_2}$ sous la forme $\widehat{F_2} = \{f^1, \dots, f^s\}$ où les f^j sont des applications continues, holomorphes par morceaux (*cf.* [**DP95**]). Posons $t'^j = f^j(t)$, on veut alors montrer que:

$$\forall\, k, j \in \{1, \dots, s\}, \quad f^k(Q_t) \subset Q'_{t'_j}. \tag{9}$$

Pour cela, on a besoin de quelques résultats préliminaires. Soit

$$\mathcal{E} = \{t \in U_p : Q_t \in E_2\}.$$

On montre alors que:

Lemme 6.2. *Le lieu de branchement E_2 de F_2 ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$ sont des ensembles algébriques complexes. De plus, la dimension complexe de $\mathcal{E}$ est strictement inférieure à n.*

Preuve du Lemme 6.2: Comme F_2 est un ensemble algébrique, il existe un polynôme $Q(t,t') = a_{k0}(t)t_k'^m + \cdots + a_{km}(t) = 0$ tel que $F \subset \{(t,t') \in U_p \times U'_{p'}/Q(t,t') = 0\}$. Le lieu de branchement E_2 de F_2 est alors inclus dans l'ensemble des points $t \in U_p$ tel qu'il existe $t' \in U_{p'}$ avec $Q(t,t')=0$ et $\frac{\partial Q}{\partial t'}(t,t')=0$ donc

$$E_2 \subset \{t \in U_p : D_Q(t)=0\},$$

où $D_Q(t)$ est le discriminant de Q en t, $D_Q(t)$ est un polynôme et par conséquent E_2 est un ensemble algébrique.

Soit $\tau \in U_p$, $Q_\tau = \{(z,\sigma_\tau(z))/z \in \mathbb{C}^n\}$ où $\sigma_\tau(z) = -\overline{\xi} - 2\rho(z,\overline{\zeta})$. Notons $\psi_\tau(z) = (z,\sigma_\tau(z))$. Alors

$$\mathcal{E} = \{\tau / D_Q(\psi_\tau^{(k)}(z)) = 0 \,\forall\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } |k| < N\},$$

pour N assez grand. C'est donc bien un ensemble algébrique. Pour montrer que la dimension de $\mathcal{E}$ est strictement inférieure à n, il suffit de trouver un point τ de U_p n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. Soit $t \in M \cap U_p$, on sait, d'après Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [**BER96**], que la réunion des variétés de Segre de M forme un voisinage de t car M est minimale en t. Or $\dim E_2 < n$ donc il existe nécessairement un point $\tau \in U_p$ tel que $Q_\tau \not\subset E_2$, et $\tau \notin \mathcal{E}$. □

Revenons maintenant à la démonstration de notre proposition. Considérons d'abord le cas où $t \in {}^sW_p \backslash \mathcal{E}$. Soit $\tau \in W_p \cap Q_t$ et $j,k \in \{1,\ldots,s\}$, on sait d'après (5) que $f(\tau) \in Q'_{t'^j}$, donc $t'^j \in Q_{f(\tau)}$. Or d'après la Propriété 5.4 de la section précédente, $Q_{f(\tau)} = Q_{f^k(\tau)}$ donc $t'^j \in Q_{f^k(\tau)}$ et $f^k(\tau) \in Q'_{t'^j}$. On en déduit donc que $f^k(Q_t \cap W_p) \subset Q'_{t'^j}$. On va ensuite montrer par prolongement analytique que $f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}$.

Notons $Q_t^0 = Q_t \backslash E_2$ et posons

$$\underline{Q_t^0} = \{\tau \in Q_t^0 : \exists\, V_\tau \in V(\tau) \text{ tel que } f^k(V_\tau \cap Q_t^0) \subset Q'_{t'_j}\}.$$

L'ensemble $\underline{Q_t^0}$ est bien un ouvert dans Q_t^0 et il est non vide. Il suffit donc de montrer que $\underline{Q_t^0}$ est fermé pour montrer que $\underline{Q_t^0} = Q_t^0$. Considérons une suite $(\tau_l)_l$ de $\underline{Q_t^0}$ qui converge vers $\tau \in Q_t^0$. Comme $\tau \in Q_t^0$, il existe un voisinage V_τ de τ sur lequel $df^k \neq 0$. Donc, quitte à réduire V_τ, l'application $f^k \colon V_\tau \to f(V_\tau)$ est propre. Or, pour l assez grand, il existe $\tau_l \in V_\tau$ et un voisinage $V_{\tau_l} \subset V_\tau$ tels que $f^k(V_{\tau_l} \cap Q_t^0) \subset Q'_{t'_j}$ donc par prolongement analytique on a $f^k(V_\tau \cap Q_t^0) \subset Q'_{t'_j}$ et $\underline{Q_t^0}$ est bien fermé. Donc $\underline{Q_t^0} = Q_t^0$ car Q_t^0 est connexe. Enfin, par continuité, on obtient que $f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}$ pour tout $t \in {}^sW_p \backslash \mathcal{E}$ car E_2 est petit dans Q_t.

Montrons maintenant que cette relation reste vraie pour tout $t \in U_p$. Soit

$$\mathcal{P} = \{\tau \in U_p \backslash \mathcal{E} : \exists\, V_\tau \in V(\tau) \text{ tel que } \forall\, t \in V_\tau,\, \forall\, k,j \quad f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}\}.$$

C'est un ensemble ouvert non vide. Montrons qu'il est aussi fermé. Considérons $(\tau_l)_l$ une suite de $\mathcal{P}$ qui converge vers $\tau \in U_p \backslash \mathcal{E}$. Soit V_τ un voisinage de τ tel que $V_\tau \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Pour l assez grand, $\tau_l \in V_\tau$ et il existe un voisinage $V_{\tau_l} \in V_\tau$ sur lequel $f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}$ pour tout $k, j \in \{1, \dots, s\}$. On obtient par prolongement analytique puis par continuité que $f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}$ pour tout $k, j \in \{1, \dots, s\}$ et pour tout $t \in V_\tau$. Donc $\mathcal{P} = U_p \cap \mathcal{E}$ et par continuité on a que pour tout $t \in U_p$ et pour tout $k, j \in \{1, \dots, s\}$, $f^k(Q_t) \subset Q'_{t'^j}$. Ce qui termine la démonstration de la proposition. $\square$

Pour montrer l'invariance des variétés de Segre par $\widehat{F_2^{-1}}$, il suffit d'appliquer la proposition à f^{-1} et F_2^{-1}.

7. w-invariance du lieu de branchement

On démontre ici que si M et M' sont des variétés polynômialement rigides, de type fini, et $f\colon M \to M'$ est un homéomorphisme CR qui s'étend au voisinage de tout point $p \in M$ en une correspondance holomorphe propre F_2 telle que F_2^{-1} soit aussi une correspondance holomorphe propre alors

Proposition 7.1. *Au voisinage de $p \in M \cap E_2$, l'ensemble E_2 des points de branchements de F_2 est w-invariant.*

Preuve de la Proposition 7.1: D'après le Proposition 6.1, il existe une application bijective $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ telle que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathcal{S}' \\ \lambda \big\uparrow & & \big\uparrow \lambda' \\ U_p & \xrightarrow[\widehat{F_2}]{} & U'_{f(p)} \end{array} \tag{10}$$

soit commutatif.

Soit Σ, (*resp.* Σ') l'ensemble des points critiques de λ (*resp.* λ'), c'est à dire l'ensemble des points de U_p (*resp.* $U'_{f(p)}$) où λ (*resp.* λ') n'est pas localement bijective. Il est facile de voir que cet ensemble est w-invariant (*resp.* w'-invariant) en regardant l'équation (4) de la Section 3.

Soit $p \in M \cap E_2$. Il existe deux voisinages U_p et $U'_{p'=f(p)}$ et une correspondance holomorphe propre irréductible $F_2 \subset U_p \times U'_{p'}$ qui prolonge f. De plus, on peut supposer que ${F_2}^{-1}$ est aussi une correspondance holomorphe propre. Ce qui veut dire que les projections $\pi\colon F_2 \to U_p$ et $\pi'\colon F_2 \to U'_{p'}$ sont propres et donc $\pi(F_2) = U_p$ et $\pi'(F_2) = U'_{p'}$. Donc l'application multivaluée $\widehat{F_2} = \pi' \circ \pi^{-1}$ est aussi surjective. Aussi, on a vu que l'on pouvait écrire $\widehat{F_2}$ sous la forme $\widehat{F_2} = \{f^1, \dots, f^s\}$ où les f^i sont les applications dont les graphes sont les différentes feuilles de la correspondance F_2. Ce sont donc des applications continues, holomorphes par morceaux et d'après la remarque précédente, elles sont surjectives.

On va montrer dans un premier temps que $E_2 \subset \widehat{F_2}^{-1}(\Sigma')$. Soit $t \in E_2$, il existe alors, par définition de E_2, une suite $(t_n)_n \xrightarrow{n\to\infty} t$ et deux autres suites $(t'_{1n})_n$, $(t'_{2n})_n$ tendant vers $t' \in \widehat{F_2}(t)$ telles que $t'_{1n} \in \widehat{F_2}(t_n)$ et $t'_{2n} \in \widehat{F_2}(t_n)$ avec $t'_{1n} \neq t'_{2n}$. D'après le diagramme (10), on a $\varphi \circ \lambda(t_n) = \lambda' \circ \widehat{F_2}(t_n)$, on en déduit donc que $\lambda'(t'_{1n}) = \lambda'(t'_{2n})$. Au voisinage de t', λ' n'est donc pas une bijection ce qui signifie que $t' \in \Sigma'$ et donc $t \in \widehat{F_2}^{-1}(\Sigma')$.

Montrons maintenant que $\Sigma' \subset \widehat{F_2}(\Sigma)$. Soit $t' \in \Sigma'$, il existe $t \in U_p$ tel que $t' \in \widehat{F_2}(t)$ car $\widehat{F_2}$ est surjective. Il existe donc $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que $f^i(t) = t'$. Supposons que $f^1(t) = t'$. Or $t' \in \Sigma'$, donc il existe deux suites $(t'_{1n})_n$, $(t'_{2n})_n$ tendant vers t' telles que $\lambda'(t'_{1n}) = \lambda'(t'_{2n})$ avec $t'_{1n} \neq t'_{2n}$. On peut donc construire deux suites

$$\begin{tikzcd}
(t_{1n})_n \arrow[r, "n\to\infty"] \arrow[d, phantom, "\neq"] & t \\
(t_{2n})_n \arrow[ur, "n\to\infty"'] &
\end{tikzcd}$$

telles que $f^1(t_{1n}) = t'_{1n}$ et $f^1(t_{2n}) = t'_{2n}$ car f^1 est surjective. Or $\lambda(t_{1n}) = \lambda(t_{2n})$ car $\varphi \circ \lambda(t_{1n}) = \lambda' \circ f_1(t_{1n}) = \lambda'(t'_{1n}) = \lambda'(t'_{2n}) = \varphi \circ \lambda(t_{2n})$ et car φ est bijective. On voit donc que λ n'est pas bijective au voisinage de t donc $t' = f^1(t) \in \widehat{F_2}(\Sigma)$, ce qui nous donne le résultat.

On montre enfin que $E_2 \subset \lambda^{-1} \circ \lambda(\Sigma)$. En effet,

$$\begin{aligned} E_2 &\subset \widehat{F_2}^{-1}(\Sigma'), \\ &\subset \widehat{F_2}^{-1}(\widehat{F_2}(\Sigma)). \end{aligned}$$

Or le diagramme (10) est commutatif donc $\widehat{F_2}^{-1} = \lambda^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \lambda'$. Donc

$$\begin{aligned} \widehat{F_2}^{-1}(\widehat{F_2}(\Sigma)) &= \lambda^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ (\lambda' \circ \widehat{F_2})(\Sigma), \\ &= \lambda^{-1} \circ \varphi^{-1}(\varphi \circ \lambda)(\Sigma), \\ &= \lambda^{-1} \circ \lambda(\Sigma). \end{aligned}$$

Or $\lambda^{-1} \circ \lambda(\Sigma)$ est w-invariant, et E_2 est un ensemble analytique de dimension complexe $n-1$ comme Σ, donc E_2 peut s'écrire comme une réunion de composante connexe de $\lambda^{-1} \circ \lambda(\Sigma)$, ce qui nous donne le résultat voulu. □

8. Extension

On va enfin pouvoir terminer la démonstration du Théorème 1.1 grâce à la proposition suivante:

Proposition 8.1. *Soit $f\colon M \to M'$ un homéomorphisme CR, entre deux variétés polynômialement rigides qui s'étend au voisinage d'un point $p \in M$ en une correspondance holomorphe propre F_2 telle que F_2^{-1} est aussi une correspondance holomorphe propre, alors f s'étend biholomorphiquement au voisinage de p.*

Preuve de la Proposition 8.1: Soit $p \in M$ comme dans la proposition. Si $p \notin E_2$ le lieu de branchement de F_2, il est clair que l'on peut étendre f au voisinage de p. On va donc s'intéresser au cas où $p \in E_2$. On va utiliser, comme dans Coupet-Pinchuk [**CP96**], le théorème du disque pour montrer que l'on peut étendre holomorphiquement f au voisinage de p.

On regarde la correspondance holomorphe propre comme une application multivaluée $\widehat{F_2}\colon U_p \to U'_{f(p)}$. Comme E_2 est w-invariante d'après la Proposition 7.1, on peut écrire E_2 au voisinage de p sous la forme $E_2 = \widetilde{E_2} \times \mathbb{C}^d$ où $\widetilde{E_2}$ est un ensemble analytique de $\mathbb{C}^m$ de codimension complexe supérieure ou égale à 1 car $\dim_{\mathbb{C}} E_2 \leq n-1$. On peut donc trouver une courbe complexe $\gamma \subset \mathbb{C}^m$ telle que $\gamma \cap \widetilde{E_2} = \{p_z\}$ où p_z est le point de $\mathbb{C}^m$ de coordonnée z_p.

Supposons, pour simplifier les notations, que $p = (0,0)$. Soit maintenant, le disque analytique

$$\Delta_\mu = \{(z,w) : z \in \gamma,\, |z| < r,\, w = -\mu v\},$$

où v est un vecteur normal à M tel que $p - \mu v \in W$.

Pour tout $\mu > 0$, le centre du disque Δ_μ appartient à W et est le seul point de Δ_μ qui peut appartenir à E_2. Or le seul point d'intersection entre Δ_μ et E_2 est $(z_p, -\mu v)$ et ce point appartient à W. Il est donc clair, qu'à l'aide du prolongement F_2 de f en tant que correspondance, on peut étendre f à un voisinage $\Delta_\mu^\star$ de Δ_μ.

De plus, chaque voisinage $\Delta_\mu^\star$ peut être choisi de tel façon qu'on puisse trouver un $\varepsilon > 0$ indépendant de μ tel que pour tout $t = (z,w) \in \partial\Delta_\mu$, (*i.e.* $|z| = r$), $B(t,\varepsilon) \subset \Delta_\mu^\star$. En effet, il suffit de se donner un μ et de trouver un ε tel que $B(t,\varepsilon)\cap E_2=\emptyset$ pour tout $t\in\partial\Delta_\mu$. Comme E_2 est w-invariant, cela reste vrai quelque soit μ. Il est ensuite possible de trouver, pour tout μ, un voisinage $\Delta_\mu^\star$ de tel façon que pour tout $t=(z,w)\in\partial\Delta_\mu$, ($i.e.$ $|z|=r$), $B(t,\varepsilon)\subset\Delta_\mu^\star$.

En regardant $\mathcal{L}=\cup_t\Delta_\mu^\star$ et les disques Δ_μ, et en faisant tendre μ vers 0, on peut utiliser le théorème des disques pour prolonger f au voisinage de p, ce qui termine la démonstration de la Proposition 8.1.

De la même façon, on peut étendre holomorphiquement f^{-1} au voisinage de $f(p)$. Au voisinage de p, f est donc bien un biholomorphisme car M est générique et donc un ensemble d'unicité. $\square$

Ceci termine aussi la démonstration du Théorème 1.1. Il suffit de recoller les extensions de f au voisinage de tout point de M. En effet, il n'y a pas de problème de recollement car f et f^{-1} sont CR sur M et M' qui sont des variétés génériques et donc des ensembles d'unicité. $\square$

Preuve du Corollaire 1.3: Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur M, on en déduit par le Théorème de Sard que l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle sur M'. Or f est un homéomorphisme de M sur M', donc il existe des points de M au voisinage duquel f est un difféomorphisme. De plus, M' est Levi non dégénérée presque partout car sinon M' aurait un noyau non vide et d'après Freeman [**Fre76**] (voir aussi [**Chi91**], [**Bog91**]), M' serait feuilletée par des variétés holomorphes, ce qui est impossible car on a supposé que M' était sans courbe holomorphe. Soit $p_0\in M$ tel que f est un difféomorphisme au voisinage de p_0 et tel que la forme de Levi de M' est non-dégénérée au voisinage de $f(p_0)$. On peut donc appliquer le Théorème de Tumanov [**Tum94**], qui nous dit que f est alors un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme au voisinage de p_0, puis le Théorème de Baouendi-Jacobowitz-Trèves [**BJT85**] pour montrer que f s'étend holomorphiquement au voisinage de p_0. Enfin, grâce au Théorème 1.1, on prouve le Corollaire 1.3. $\square$

9. Le cas hypersurface

On suppose dans cette section que M et M' sont des hypersurfaces réelles algébriques. On rappelle qu'une hypersurface M est dite réelle algébrique si elle est définie localement par $M=\{t\in\mathbb{C}^n:\rho(t)=0\}$ où ρ est une fonction réelle algébrique telle que $d\rho(t)\neq 0$. Nous allons montrer que, sous les hypothèses du Théorème 1.2, il existe un point p_0 au voisinage duquel f se prolonge holomorphiquement. Pour cela, nous avons d'abord besoin du résultat suivant:

Proposition 9.1. *Soit M, M' deux hypersurfaces algébriques réelles de $\mathbb{C}^n$, avec M minimale en p et soit $f\colon M \to M'$ un homéomorphisme CR. Alors il existe deux ouverts V_p, $V'_{p'=f(p)}$ tels que f se prolonge en un biholomorphisme de $V_p^{-(ou+)}$ sur $V'^{-(ou+)}_{p'}$.*

Preuve de la Proposition 9.1: On peut remarquer que le Lemme 4.4 reste vrai ici. En effet, pour prouver ce lemme, on n'utilise pas l'existence d'un point p_0 au voisinage duquel f se prolonge, ni le fait que M et M' soient polynômialement rigides. On peut donc dire qu'il existe un biholomorphisme $\widetilde{f}\colon \mathrm{int}((U_p \cap M)^\sim) \to \mathrm{int}((f(U_p \cap M))^\sim)$ qui prolonge continûment $f\colon U_p \cap M \to f(U_p \cap M)$ où U_p est un voisinage bien choisi du point p. Pour ne pas surcharger les notations notons par U le voisinage de p sur M défini par $U = U_p \cap M$.

Comme M est minimale en p, on sait d'après le Théorème de Tumanov [**Tum89a**] qu'il existe un voisinage V_p de p tel que $V_p^{-(ou+)} \subset \widetilde{U}$ (on supposera par la suite que $V_p^- \subset \widetilde{U}$, *i.e.* on supposera que le côté d'extension est le côté "négatif"). Donc $\widetilde{f}$ est un biholomorphisme de V_p^- sur $\widetilde{f}(V_p^-)$. Mais à quoi ressemble l'ouvert $\widetilde{f}(V_p^-)$? Est-ce un voisinage unilatéral de $p' = f(p)$?

A priori, cela n'est pas vrai si on ne contrôle pas la taille du voisinage V_p. On va donc regarder le voisinage unilatéral de p défini par $(B_n \cap V_p^-)$, où B_n est la boule ouverte de $\mathbb{C}^n$ de centre p et de rayon $1/n$. Et on va maintenant chercher un N tel que $\widetilde{f}(B_N \cap V_p^-)$ soit un voisinage unilatéral de $p' = f(p)$.

Cas 1: Supposons qu'il existe N_0 tel que $\forall\, q \in (V_p^- \cap B_{N_0})$, $f(q) \notin M'$. Il est alors clair que $\widetilde{f}(V_p^-)$ "reste d'un côté de M'" et c'est donc bien un voisinage unilatéral de p', donc de la forme $V'^{-(ou+)}_{p'}$.

Cas 2: Supposons au contraire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, q_n \in (B_n \cap V_p^-)$ tel que $\widetilde{f}(q_n) \in M'$. Par continuité de la fonction $\widetilde{f}$, il va exister un N tel que $\forall\, n > N$, $q'_n = \widetilde{f}(q_n) \in f(U)$. Soit V_{q_n} un voisinage de q dans $(B_n \cap V_p^-)$, $f(V_{q_n}) = V'_{q'_n}$ est alors un voisinage ouvert de q', car $\widetilde{f}$ est un biholomorphisme. Mais $\widetilde{f}\colon \widetilde{U} \to (f(U))^\sim$ est une application continue et $\widetilde{f}\colon \mathrm{int}(\widetilde{U}) \to (f(U))^\sim$ est injective. Soit $q_0 = f^{-1}(q'_n)$. Par continuité, $\forall\, x \in \widetilde{U}$ proche de q_0, $\widetilde{f}(x) \in V'_{q'_n} = \widetilde{f}(V_{q_n})$, ce qui contredit l'injectivité de $\widetilde{f}$. Le cas 2 est donc impossible.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 9.1. □

On suppose maintenant que sous les hypothèses de la Proposition 9.1, l'application f se prolonge en un biholomorphisme de V_p^- sur $V'^-_{p'}$.

D'après la Proposition 9.1 on sait que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage V_p de p et un voisinage $V'_{f(p)}$ de $f(p)$ tel que f se prolonge holomorphiquement à V_p^- et tel que $f(V_p^-) = V'^-_{f(p)}$. On va maintenant essayer de trouver un point p de l'hypersurface M où il y a extension holomorphe de f à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de p. Pour cela, on a besoin de regarder la géométrie CR locale de M. On note:

$$\mathcal{L}_\rho(t)(W) = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t_j \partial \bar{t_k}}(t)\tau_j\bar{\tau}_k\right)_{j,k} \quad \text{avec } W = \sum_{j=1}^{n} \tau_j \frac{\partial}{\partial t_j} \in T_t^c M,$$

la *forme de Levi* de M en t appliquée à $W \in T_t^c M$ où $T_t^c M$ est l'espace tangent complexe à M en t (on notera de même $\mathcal{L}'_{\rho'}(t')(W')$ la forme de Levi de M' en t' appliquée à $W' \in T_{t'}^c M'$). Ce qui nous amène à décomposer M et M' de la façon suivante:

$$M = M^- \cup M^+ \cup M^0,$$

où

$$\begin{cases} M^0 = \{t \in M / \mathcal{L}\rho(t) \equiv 0\}, \\ M^- = \{t \in M / \mathcal{L}_\rho(t) \text{ possède une valeur propre strictement négative}\}, \\ M^+ = M \backslash (M^0 \cup M^-). \end{cases}$$

On remarque que M^- est un ouvert de M et que M^0 est un ensemble analytique réel de $\mathbb{C}^n$ de dimension $2n-2$. On décompose de la même façon M'.

On regarde maintenant les différents cas possibles: S'il existe un point $p \in M^-$ on peut alors utiliser le Théorème de Levi pour obtenir une extension holomorphe à un voisinage $\mathcal{U}$ de p. On peut donc (quitte à déplacer un petit peu le point p sur M de telle façon que $\mathrm{Jac}(f)(p) \neq 0$) obtenir une extension biholomorphe de f au voisinage de p. De plus, comme f est un homéomorphisme et que son extension est un biholomorphisme d'un voisinage unilatéral de p sur un voisinage unilatéral de $f(p)$, on peut indifféremment travailler avec f ou f^{-1}. Donc s'il existe un point $p' \in M'^-$ on aura de même une extension biholomorphe de f^{-1} au voisinage de p' et par conséquent aussi de f au voisinage de $f^{-1}(p')$.

Supposons maintenant que $M^- = \emptyset$ et $M'^- = \emptyset$. On peut maintenant conclure grâce au lemme suivant:

Lemme 9.2. *Si $M^- = \emptyset$ et $M'^- = \emptyset$, il existe un point $p \in M$ au voisinage duquel f se prolonge biholomorphiquement.*

Preuve du Lemme 9.2: Comme $M^- = \emptyset$ et $M'^- = \emptyset$, il est clair que les deux hypersurfaces M et M' sont pseudoconvexes. On est donc dans la situation de Bell-Catlin [**BC88**], ce qui nous donne une extension holomorphe de f au voisinage de tout point p de M. On peut donc, quitte à déplacer un petit peu le point p, (de telle façon que $\mathrm{Jac}(f)(p) \neq 0$) obtenir une extension biholomorphe de f au voisinage de p. □

Nous avons donc montré qu'il existe toujours un point au voisinage duquel f se prolonge holomorphiquement. Pour terminer la preuve du Théorème 1.2, on doit, dans un premier temps, montrer l'algébricité de l'application f. Pour cela, il suffit ici d'utiliser le Théorème de Baouendi-Rothschild [**BR95**].

On doit ensuite montrer que f s'étend en fait en correspondance. La preuve de la Proposition 5.1 peut facilement être reproduite ici avec quelques simplifications.

Enfin, une fois que l'on a montré que f s'étend en correspondance, on peut utiliser le Théorème de Diederich-Pinchuk [**DP98**], pour montrer que f se prolonge holomorphiquement au voisinage de tout point de M, ce qui conclut la preuve du Théorème 1.2. □

Références

[BER96] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt et L. P. Rothschild, Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in $\mathbb{C}^n$, *Acta Math.* **177(2)** (1996), 225–273.

[BHR96] M. S. Baouendi, X. Huang et L. P. Rothschild, Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces, *Invent. Math.* **125(1)** (1996), 13–36.

[BJT85] M. S. Baouendi, H. Jacobowitz et F. Trèves, On the analyticity of CR mappings, *Ann. of Math. (2)* **122(2)** (1985), 365–400.

[BR88] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces, *Invent. Math.* **93(3)** (1988), 481–500.

[BR90] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, Cauchy-Riemann functions on manifolds of higher codimension in complex space, *Invent. Math.* **101(1)** (1990), 45–56.

[BR95] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, Mappings of real algebraic hypersurfaces, *J. Amer. Math. Soc.* **8(4)** (1995), 997–1015.

[BT81] M. S. Baouendi et F. Trèves, A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields, *Ann. of Math. (2)* **113(2)** (1981), 387–421.

[BC88] S. Bell et D. Catlin, Regularity of CR mappings, *Math. Z.* **199(3)** (1988), 357–368.

[Bog91] A. Boggess, *"CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex"*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.

[BP82] A. Boggess et J. C. Polking, Holomorphic extension of CR functions, *Duke Math. J.* **49(4)** (1982), 757–784.

[Chi91] E. M. Chirka, An introduction to the geometry of CR manifolds, (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **46(1-277)** (1991), 81–164, 240; translation in: *Russian Math. Surveys* **46(1)** (1991), 95–197.

[CR94] E. M. Chirka et C. Rea, Normal and tangent ranks of CR mappings, *Duke Math. J.* **76(2)** (1994), 417–431.

[CP96] B. Coupet et S. I. Pinchuk, Holomorphic equivalence problem for weighted homogeneous rigid domains in $\mathbb{C}^{n+1}$, in: *"Complex analysis in modern mathematics"*, (Russian), FAZIS, Moscow, 2001, pp. 57–70.

[CPS99] B. Coupet, S. I. Pinchuk et A. Sukhov, Analyticité des applications CR, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329(6)** (1999), 489–494.

[CPS00] B. Coupet, S. I. Pinchuk et A. Sukhov, On partial analyticity of CR mappings, *Math. Z.* **235(3)** (2000), 541–557.

[DF88] K. Diederich et J. E. Fornæss, Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* **282(4)** (1988), 681–700.

[DFY94] K. Diederich, J. E. Fornæss et Z. Ye, Biholomorphisms in dimension 2, *J. Geom. Anal.* **4(4)** (1994), 539–552.

[DP93] K. Diederich et S. I. Pinchuk, The inverse of a CR-homeomorphism is CR, *Internat. J. Math.* **4(3)** (1993), 379–394.

[DP95] K Diederich et S. I. Pinchuk, Proper holomorphic maps in dimension 2 extend, *Indiana Univ. Math. J.* **44(4)** (1995), 1089–1126.

[DP98] K. Diederich et S. I. Pinchuk, Reflection principle in higher dimensions, in: *"Proceedings of the International Congress of Mathematicians"*, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, pp. 703–712 (electronic).

[DW80] K. Diederich et S. M. Webster, A reflection principle for degenerate real hypersurfaces, *Duke Math. J.* **47(4)** (1980), 835–843.

[For91] F. FORSTNERIČ, Mappings of strongly pseudoconvex Cauchy-Riemann manifolds, in: *"Several complex variables and complex geometry"*, Part 1 (Santa Cruz, CA, 1989), Proc. Sympos. Pure Math. **52**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 59–92.

[For92] F. FORSTNERIČ, Mappings of quadric Cauchy-Riemann manifolds, *Math. Ann.* **292(1)** (1992), 163–180.

[Fre76] M. FREEMAN, The Levi form and local complex foliations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **57(2)** (1976), 369–370.

[HP70] R. HARVEY ET J. C. POLKING, Removable singularities of solutions of linear partial differential equations, *Acta Math.* **125** (1970), 39–56.

[Hua96] X. HUANG, Schwarz reflection principle in complex spaces of dimension two, *Comm. Partial Differential Equations* **21(11–12)** (1996), 1781–1828.

[Hua00] X. HUANG, A removable singularity property for CR mappings between real analytic hypersurfaces, *Comm. Partial Differential Equations* **25(1–2)** (2000), 299–317.

[Nag66] T. NAGANO, Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 398–404.

[PT90] S. I. PINCHUK ET SH. I. TSYGANOV, Smoothness of CR-mappings between strictly pseudoconvex hypersurfaces, (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **53(5)** (1989), 1120–1129, 1136; translation in: *Math. USSR-Izv.* **35(2)** (1990), 457–467.

[Seg31] B. SEGRE, Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme, *Rend. Accad. d.L. Roma* **13** (1931), 676–683.

[Suk94] A. SUKHOV, On CR mappings of real quadric manifolds, *Michigan Math. J.* **41(1)** (1994), 143–150.

[Tum89a] A. E. TUMANOV, Extension of CR-functions into a wedge from a manifold of finite type, (Russian), *Mat. Sb. (N.S.)* **136(178)(1)** (1988), 128–139; translation in: *Math. USSR-Sb.* **64(1)** (1989), 129–140.

[Tum89b] A. E. TUMANOV, Finite-dimensionality of the group of CR-automorphisms of a standard CR-manifold, and characteristic holomorphic mappings of Siegel domains, (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **52(3)** (1988), 651–659, 672; translation in: *Math. USSR-Izv.* **32(3)** (1989), 655–662.

[Tum94] A. E. TUMANOV, Analytic discs and the regularity of CR mappings in higher codimension, *Duke Math. J.* **76(3)** (1994), 793–807.

[TH83] A. E. TUMANOV ET G. M. KHENKIN, Local characterization of holomorphic automorphisms of Siegel domains, (Russian), *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **17(4)** (1983), 49–61.

[Web77] S. M. WEBSTER, On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces, *Invent. Math.* **43(1)** (1977), 53–68.

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
Centre de Mathématiques et d'Informatique
39 rue Joliot Curie
13453 Marseille cedex 13
France
E-mail address: patrick.lahondes@cmi.univ-mrs.fr

Rebut el 31 de juliol de 2001.