

# SPECTRE DES LAPLACIENS DE LICHNEROWICZ SUR LES SPHÈRES ET LES PROJECTIFS RÉELS

MOHAMED BOUCETTA

*Abstract*

---

In this paper, we compute the spectrum of the Lichnerowicz laplacian on the symmetric forms of degree 2 on the sphere  $S^n$  and the real projective space  $\mathbb{R}P^n$ . This is obtained by generalizing to forms the calculations of the spectrum of the laplacian on functions done via restriction of harmonic polynomials on euclidean space.

---

## 1. Introduction

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on notera  $\Omega^p(M)$  l'espace des  $p$ -formes différentielles sur  $M$  et  $\mathcal{S}^p M$  l'espace des  $p$ -formes symétriques sur  $M$  avec  $\Omega^0(M) = \mathcal{S}^0 M = C^\infty(M)$ .

Pour tout  $0 \leq p \leq \dim M$ ,  $\Omega^p(M)$  est muni d'un opérateur elliptique  $\Delta^p$  à savoir le laplacien de Hodge-de Rham.  $\dim \text{Ker } \Delta^p$  étant le  $p$ -ième nombre de Betti de  $M$ , et pour d'autres propriétés, cet opérateur a été amplement étudié. Le spectre et les sous-espaces propres des  $\Delta^p$  sur la sphère  $S^n$ , munie de sa métrique canonique, ont été déterminés dans [Be-Ga-Ma], [Be-Mi], [Ga-Me], [Ik-Ta], [Iw-Ka].

L'espace des tenseurs le plus simple à considérer, après les  $\Omega^p(M)$ , est l'espace  $\mathcal{S}^2 M$ . Dans [Be-Eb], cet espace a été étudié et il a été démontré la décomposition suivante:

$$(H_1) \quad \mathcal{S}^2 M = \text{Ker } \delta_1 \oplus \delta_1^*(\Omega^1(M)),$$

où  $\delta_1^* : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathcal{S}^2M$  est l'opérateur différentiel défini par

$$\delta_1^*(\alpha) = L_{\#\alpha}g, \quad (\alpha \in \Omega^1(M)),$$

$\#\alpha$  est le champ de vecteurs associée à la 1-forme  $\alpha$  grâce à la métrique  $g$  et  $\delta_1 : \mathcal{S}^2M \longrightarrow \Omega^1(M)$  est l'adjoint formel de  $\delta_1^*$  pour les structures préhilbertiennes sur  $\Omega^1(M)$  et  $\mathcal{S}^2M$  définies par la métrique  $g$ .

Dans le même papier, il a été démontré que  $\text{Ker } \delta_1$  est l'espace tangent en  $g$  à l'espace des structures riemaniennes sur  $M$ . C'est l'espace des déformations infinitésimales non-triviales de  $g$ .

L'espace  $\mathcal{S}^2M$  admet aussi la décomposition (voir [Be2, p. 130])

$$(H_2) \quad \mathcal{S}^2M = \text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0) \bigoplus (\delta_1^*(\Omega^1(M)) + C^\infty(M)g),$$

où  $Tr : \mathcal{S}^2M \longrightarrow C^\infty(M)$  est la trace par rapport à  $g$ .  $\text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0)$  peut aussi être regardé comme l'espace des déformations infinitésimales non-triviales et non-conformes de  $g$ .

Dans [L, p. 27], Lichnerowicz a introduit, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , un laplacien  $\Delta_M^p : \mathcal{S}^pM \longrightarrow \mathcal{S}^pM$ ,  $\Delta_M^0$  et  $\Delta_M^1$  étant les laplaciens de Hodge-de Rham respectivement sur  $C^\infty(M)$  et sur  $\Omega^1(M)$ . Les laplaciens de Lichnerowicz possèdent des propriétés remarquables et se sont avérés très utiles pour l'étude de différents problèmes géométriques (voir [Be-Eb], [Be2], [M]). Il est à noter que le laplacien de Lichnerowicz  $\Delta_M^2 : \mathcal{S}^2M \longrightarrow \mathcal{S}^2M$  respecte les décompositions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  si la variété  $(M, g)$  est à courbure de Ricci parallèle.

Dans cet article, on se propose de calculer le spectre avec multiplicité et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^2$  sur la sphère de dimension  $n$  munie de sa métrique canonique. Par suite, on exhibe deux bases de vecteurs propres qui engendrent deux sous-espaces propres denses dans  $\text{Ker } \delta_1$  et dans  $\text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0)$ .

Pour illustrer l'intérêt que peuvent avoir ces bases dans la résolution de versions infinitésimales de différents problèmes géométriques, on retrouve des résultats bien connus à savoir le théorème de représentation conforme sur la sphère  $S^2$  [Be-Eb] et la rigidité de la structure d'Einstein canonique sur la sphère  $S^n$ .

Finalement, en utilisant le revêtement riemannien  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , on déduit le spectre et les sous-espaces propres de  $\Delta_{\mathbb{R}P^n}^1$  et de  $\Delta_{\mathbb{R}P^n}^2$ .

Le calcul du spectre de  $\Delta_{S^n}^2$  nécessitant la connaissance du spectre de  $\Delta_{S^n}^1$ , nous donnons le spectre avec multiplicité et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^1$  en utilisant une méthode qui diffère légèrement de celle utilisée dans [Ga-Me].

Pour ce travail, on généralise la méthode utilisée dans [Be-Ga-Ma] pour le calcul du spectre de  $\Delta_{S^n}^0$  alors que les décompositions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  nous servent de guides.

## 2. Laplaciens de Lichnerowicz sur les tenseurs symétriques

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $d$ . Soit  $D$  la connexion de Levi-Civita associée.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , le fibré vectoriel des  $p$ -tenseurs  $\otimes^p T^*M \rightarrow M$  est muni d'une structure de fibré vectoriel euclidien donnée par

$$\langle h, f \rangle_m = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^d h(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}),$$

où  $m \in M$ ,  $h, f \in \otimes^p T_m^*M$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  est une base orthonormée quelconque de  $T_mM$ .

Pour tout entier naturel  $p$ , la connexion de Levi-Civita définit un opérateur différentiel  $D_p : C^\infty(\otimes^p T^*M) \rightarrow C^\infty(\otimes^{p+1} T^*M)$ . On notera  $D_p^*$  son adjoint formel. Soit  $\mathcal{S}^p M$  le  $C^\infty(M)$ -module des formes symétriques sur  $M$ .

En symétrisant l'opérateur  $D$ , on obtient un opérateur différentiel  $\delta_p^* : \mathcal{S}^p M \rightarrow \mathcal{S}^{p+1} M$  défini par

$$\delta_p^* h(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} D_{X_i} h(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{p+1}).$$

Soit  $\delta_p : \mathcal{S}^{p+1} M \rightarrow \mathcal{S}^p M$  son adjoint formel.

L'adjoint formel de  $\delta_p^*$  est appelé divergence et est donné par

$$\delta_p f(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^d D_{Y_i} f(Y_i, X_1, \dots, X_p),$$

où  $f \in \mathcal{S}^{p+1}M$ ,  $(X_1, \dots, X_p)$  est une famille quelconque de champs de vecteurs sur  $M$  et  $(Y_1, \dots, Y_d)$  est une base orthonormée de champs de vecteurs (locaux) sur  $M$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathcal{S}^1M$ , on a (voir [Be2, p. 35])

$$(1) \quad \delta_1^*(\alpha) = L_{\# \alpha} g.$$

$\# : T^*M \rightarrow TM$  est l'inverse de l'homomorphisme musical  $\omega^b : TM \rightarrow T^*M$  qui à  $v \mapsto g(v, \cdot)$ .

Si la variété  $M$  est compacte, en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $C^\infty(\otimes^p T^*M)$  est muni d'un produit scalaire donné par

$$\langle h, f \rangle = \int_M \langle h(m), f(m) \rangle_m \mu_g,$$

où  $\mu_g$  est la mesure canonique de  $(M, g)$ .

Dans le cas où  $M$  est compacte,  $D_p$  et  $D_p^*$ ;  $\delta_p$  et  $\delta_p^*$  sont adjoints pour le produit scalaire  $\langle, \rangle$ .

**Définition 2.1 [L].** Le laplacien de Lichnerowicz sur les  $p$ -formes symétriques est l'opérateur  $\Delta_M^p : \mathcal{S}^p M \rightarrow \mathcal{S}^p M$  défini par

$$\Delta_M^p = D_p^* D_p + K_p,$$

où  $K_p$  est l'opérateur d'ordre 0 défini par

$$K_0 = 0$$

$$K_p(h)(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p r(X_i, \#^i_{X_1 \dots \widehat{X}_i \dots X_p} h)$$

$$- Tr_g[(U, V) \mapsto \sum_{i \neq j} h(R(X_i, U)X_j, V, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p)],$$

$R$  et  $r$  désignent respectivement la courbure tensorielle et la courbure de Ricci de  $g$ ,  $Tr_g$  désigne la trace par rapport à  $g$ ,  $\#$  l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme musical et  $i_{X_1 \dots \widehat{X}_i \dots X_p} h$  le produit intérieur de  $h$  par  $X_1 \dots \widehat{X}_i \dots X_p$ .

Dans le cas où  $M$  est compacte,  $\Delta_M^p$  est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Remarques.**

- i)  $\Delta_M^0$  et  $\Delta_M^1$  sont les laplaciens de Hodge-de Rham respectivement sur  $C^\infty(M)$  et  $\mathcal{S}^1 M$ . La formule

$$\Delta_M^1 = D_1^* D_1 + K_1$$

n'est rien d'autre que la fameuse formule de Bochner [**Boc**], puisque  $K_1(\alpha) = r(\#\alpha, \cdot)$ , pour tout  $\alpha \in \mathcal{S}^1 M$ .

- ii) On a clairement

$$\Delta_M^1 \circ d = d \circ \Delta_M^0.$$

**Théorème 2.1.** *Les définitions et notations sont celles ci-dessus. On a les propriétés suivantes:*

- i) *Si la métrique  $g$  est à courbure de Ricci parallèle, on a*

$$\Delta_M^2 \circ \delta_1^* = \delta_1^* \circ \Delta_M^1 \quad \text{et} \quad \Delta_M^1 \circ \delta_1 = \delta_1 \circ \Delta_M^2.$$

- ii)  $Tr_g \circ \Delta_M^2 = \Delta_M^0 \circ Tr_g$ .

- iii) *Pour toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ , on a  $\Delta_M^2(fg) = \Delta_M^0(f)g$ .*

*Preuve:* Pour i) et ii) voir [**L**, pp. 28–29]. Montrons, maintenant iii). Soit  $h \in \mathcal{S}^2 M$  quelconque. On a

$$\langle \Delta_M^2(fg), h \rangle = \langle fg, \Delta_M^2(h) \rangle = \int_M f Tr_g(\Delta_M^2(h)) \mu_g.$$

En utilisant ii), on obtient

$$\langle \Delta_M^2(fg), h \rangle = \int_M f \Delta_M^0(Tr_g h) \mu_g = \int_M Tr_g h \Delta_M^0(f) \mu_g = \langle h, \Delta_M^0(f)g \rangle.$$

D'où le résultat. ■

**Lemme 2.1.** *Pour tout entier  $p > 0$  et pour tout  $h \in \mathcal{S}^p M$ , on a*

$$\delta_p \circ \delta_p^* h - \delta_{p-1}^* \circ \delta_{p-1} h = D_p^* D_p h - K_p(h).$$

*Preuve:* Pour établir cette égalité, il suffit de la vérifier pour les formes pôlaires. Soit  $X$  un champs de vecteurs et soit  $(E_1, \dots, E_d)$  une base orthonormée de champs de vecteurs (locaux). On a

$$\begin{aligned} & \delta_p \circ \delta_p^* h(X, \dots, X) \\ &= - \sum_{i=1}^d D_{E_i} \delta_p^* h(E_i, X, \dots, X) \\ &= - \sum_{i=1}^d E_i \cdot \delta_p^* h(E_i, X, \dots, X) + \sum_{i=1}^d \delta_p^* h(D_{E_i} E_i, X, \dots, X) \\ & \quad + p \sum_{i=1}^d \delta_p^* h(E_i, D_{E_i} X, X, \dots, X) \\ &= - \sum_{i=1}^d E_i \cdot D_{E_i} h(X, \dots, X) - p \sum_{i=1}^d E_i \cdot D_X h(E_i, X, \dots, X) \\ & \quad + \sum_{i=1}^d D_{D_{E_i} E_i} h(X, \dots, X) + p \sum_{i=1}^d D_X h(D_{E_i} E_i, X, \dots, X) \\ & \quad + p \sum_{i=1}^d D_{E_i} h(D_{E_i} X, X, \dots, X) + p \sum_{i=1}^d D_{D_{E_i} X} h(E_i, X, \dots, X) \\ & \quad + p(p-1) \sum_{i=1}^d D_X h(E_i, D_{E_i} X, X, \dots, X) \\ &= - \sum_{i=1}^d E_i \cdot D_{E_i} h(X, \dots, X) - p \sum_{i=1}^d D_{E_i} D_X h(E_i, X, \dots, X) \\ & \quad + \sum_{i=1}^d D_{D_{E_i} E_i} h(X, \dots, X) + p \sum_{i=1}^d D_{E_i} h(D_{E_i} X, X, \dots, X) \\ & \quad + p \sum_{i=1}^d D_{D_{E_i} X} h(E_i, X, \dots, X) \\ &= D_p^* D_p h(X, \dots, X) - p \sum_{i=1}^d D_{(E_i, X)}^2 h(E_i, X, \dots, X). \end{aligned}$$

D'un autre côté et par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned} \delta_{p-1}^* \circ \delta_{p-1} h(X, \dots, X) &= -p \sum_{i=1}^d D_{(X, E_i)}^2 h(E_i, X, \dots, X) \\ &\quad - p \sum_{i=1}^d (D_{E_i} h(D_X E_i, X, \dots, X) \\ &\quad + D_{D_X E_i} h(E_i, X, \dots, X)). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Ricci, on obtient donc

$$\begin{aligned} \delta_p \circ \delta_p^* h(X, \dots, X) - \delta_{p-1}^* \circ \delta_{p-1} h(X, \dots, X) &= D_p^* D_p h(X, \dots, X) \\ &\quad - [pr(X, \#(i_X^{p-1} h)) - p(p-1) \sum_{i=1}^d h(R(E_i, X)X, E_i, X, \dots, X)] \\ &\quad + p \sum_{i=1}^d (D_{E_i} h(D_X E_i, X, \dots, X) + D_{D_X E_i} h(E_i, X, \dots, X)). \end{aligned}$$

Or, pour tout  $v$  vecteur tangent en un point  $m$ , il existe un champ de vecteurs  $X$  et une base orthonormée  $(E_1, \dots, E_d)$  tels que  $X(m) = v$  et  $(D_X E_i)_m = 0$  pour  $i = 1, \dots, d$ . Comme c'est une relation tensorielle, on a le lemme. ■

**Remarque importante.** En vertu ce lemme, on obtient une expression plus fine du laplacien de Lichnerowicz à savoir

$$(2) \quad \Delta_M^p = \delta_p \circ \delta_p^* - \delta_{p-1}^* \circ \delta_{p-1} + 2K_p.$$

Cette expression nous sera très utile par la suite.

**Proposition 2.1.** Soit  $h = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^d h_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$  une  $p$ -forme symétrique sur  $(\mathbb{R}^d, \text{can})$ . On a

$$\Delta_{\mathbb{R}^d}^p h = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^d \Delta_0 h_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

avec  $\Delta_0 = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

*Preuve:* Evidente. ■

### 3. Laplaciens de Lichnerowicz sur les sphères

#### 3.1. Préliminaires.

On se place maintenant dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de sa métrique canonique qu'on notera indifféremment  $\text{can}$  ou  $\langle, \rangle$ . On notera  $\tilde{D}$  la connexion de Levi-Civita associée,  $\vec{r}$  le champ de vecteurs radial et  $N = \frac{\partial}{\partial r}$  le champ de vecteurs unitaire radial.

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad N = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

avec  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$  et  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on a

$$(3) \quad \tilde{D}_X N = \frac{1}{r}(X - \langle X, N \rangle N).$$

En particulier  $\tilde{D}_N N = 0$ .

Soit  $D$  la connexion de Levi-Civita associée à la métrique canonique de  $S^n$ . Pour tout champs de vecteurs  $X, Y$  tangents à  $S^n$ , on a

$$(4) \quad \tilde{D}_X Y = D_X Y - \langle X, Y \rangle N.$$

**Proposition 3.1.** *Soit  $H \in S^p \mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $(X, X_1, \dots, X_p)$  une famille de champs de vecteurs tangents à  $S^n$ . Soit  $h$  la restriction de  $H$  à  $S^n$ . Alors, en restriction à  $S^n$ , les formules suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned} \tilde{D}_X H(X_1, \dots, X_p) &= D_X h(X_1, \dots, X_p) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \langle X, X_i \rangle H(N, X_1, \dots, \tilde{X}_i, \dots, X_p), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_N H(X_1, \dots, X_p) = L_N H(X_1, \dots, X_p) - p h(X_1, \dots, X_p),$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_N H(N, X_1, \dots, X_{p-1}) &= L_N \circ i_N H(X_1, \dots, X_{p-1}) \\ &\quad - (p-1) H(N, X_1, \dots, X_{p-1}). \end{aligned}$$

*Preuve:* La première formule est une conséquence immédiate de (3).

On a

$$\tilde{D}_N H(X_1, \dots, X_p) = N.H(X_1, \dots, X_p) - \sum_{i=1}^p H(X_1, \dots, \tilde{D}_N X_i, \dots, X_p).$$

Or  $\tilde{D}_N X_i = [N, X_i] + \tilde{D}_{X_i} N$  et, en restriction à  $S^n$ , on a en vertu de (3),  $\tilde{D}_{X_i} N = X_i$ . Ceci permet d'établir la deuxième formule.

Un calcul analogue donnerait la troisième formule. ■

Dans tout ce qui suit, on notera  $\tilde{\delta}^*$  et  $\tilde{\delta}$  respectivement la codivergence et la divergence de  $(\mathbb{R}^{n+1}, \text{can})$  et  $\delta^*$  et  $\delta$  ceux de  $(S^n, \text{can})$ .

**Proposition 3.2.** *Soit  $H \in S^{p+1}\mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $h$  sa restriction à  $S^n$ . Alors, la formule suivante est vérifiée en restriction à  $S^n$ :*

$$\tilde{\delta}_p H = \delta_p h - n i_N H - L_N \circ i_N H.$$

*Preuve:* Soit  $x \in S^n$  et soit  $(E_1, \dots, E_n)$  une base orthonormée de champs de vecteurs au voisinage de  $x$  et tangents en  $x$  à  $S^n$ . Soit  $(X_1, \dots, X_p)$  une famille de champs de vecteurs tangents à  $S^n$ . On a

$$\tilde{\delta}_p H(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^n \tilde{D}_{E_i} H(E_i, X_1, \dots, X_p) - \tilde{D}_N H(N, X_1, \dots, X_p).$$

Or, d'après la Proposition 2.1, on a

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{E_i} H(E_i, X_1, \dots, X_p) &= D_{E_i} h(E_i, X_1, \dots, X_p) \\ &\quad + \langle E_i, E_i \rangle H(N, X_1, \dots, X_p) \\ &\quad + \sum_{j=1}^p H(N, \langle E_i, X_j \rangle E_i, X_1, \dots, \tilde{X}_j, \dots, X_p), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_N H(N, X_1, \dots, X_p) = L_N \circ i_N H(X_1, \dots, X_p) - p H(N, X_1, \dots, X_p).$$

Ceci permet de conclure. ■

On pourrait, de la même manière, établir une formule reliant  $\tilde{\delta}_p^*$  et  $\delta_p^*$ ; mais pour ce qu'on envisage de faire, on se contentera d'une formule dans les cas  $p = 0, 1, 2$ .

**Proposition 3.3.** Soient  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1\mathbb{R}^{n+1}$  et  $H \in \mathcal{S}^2\mathbb{R}^{n+1}$ . Soient  $\alpha$  et  $h$  leurs restrictions à  $S^n$ . En restriction à  $S^n$ , on a

$$\tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} = \delta_1^* \alpha + 2\tilde{\alpha}(N) \text{ can},$$

$$\tilde{\delta}_2^* H = \delta_2^* h + 2R(H),$$

avec  $R(H)(X, Y, Z) = H(N, \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X + \langle Z, X \rangle Y)$ .

*Preuve:* Ces deux formules sont une conséquence immédiate de la Proposition 3.1. ■

### 3.2. Formule reliant $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0$ et $\Delta_{S^n}^0$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $F$  une fonction sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $f$  sa restriction à  $S^n$ . En restriction à  $S^n$ , on a

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0 F = \Delta_{S^n}^0 f - n \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

*Preuve:* On remarque que  $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0 F = \tilde{\delta}_0 dF$  et on applique la Proposition 3.2 pour  $p = 0$ . ■

### 3.3. Formule reliant $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1$ et $\Delta_{S^n}^1$ .

En vertu de (2) et du fait que  $(S^n, \text{can})$  est une variété d'Einstein dont la courbure de Ricci  $r_{\text{can}} = (n-1) \text{can}$ , on a

$$(5) \quad \Delta_{S^n}^1 = \delta_1 \circ \delta_1^* - \delta_0^* \circ \delta_0 + 2(n-1) \text{Id}.$$

Pour établir une relation entre  $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1$  et  $\Delta_{S^n}^1$ , on aura besoin des deux formules suivantes:

Soit  $\alpha \in \mathcal{S}^1\mathbb{R}^{n+1}$ , on a

$$(6) \quad i_N \tilde{\delta}_1^* \alpha = \tilde{\delta}_0^* i_N \alpha + L_N \alpha - \frac{2}{r} \alpha + \frac{2}{r} \alpha(N) i_N \text{ can}.$$

Soit  $f \in C^\infty(S^n)$ , on a

$$(7) \quad \delta_1(f \text{ can}) = -df.$$

Etablissons la formule (6). Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} i_N \tilde{\delta}_1^* \alpha(X) &= X \cdot \alpha(N) + N \cdot \alpha(X) - \alpha(\tilde{D}_N X) - \alpha(\tilde{D}_X N) \\ &= \tilde{\delta}_0^* i_N \alpha(X) + N \cdot \alpha(X) - \alpha([N, X]) - 2\alpha(\tilde{D}_X N). \end{aligned}$$

En appliquant (3), on obtient (6). Un calcul direct donnerait la formule (7).

**Proposition 3.5.** Soit  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\alpha$  sa restriction à  $S^n$ . En restriction à  $S^n$ , on a

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1 \tilde{\alpha} = \Delta_{S^n}^1 \alpha - L_N \circ L_N \tilde{\alpha} - (n-2)L_N \tilde{\alpha} - 2d\tilde{\alpha}(N).$$

Preuve: D'après les Propositions 3.2 et 3.3, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} &= \delta_1 \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} - ni_N \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} - L_N i_N \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} \\ &= \delta_1 \tilde{\delta}_1^* \alpha + 2\delta_1(\tilde{\alpha}(N) \text{ can}) - ni_N \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} - L_N i_N \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

D'après la formule (6)

$$\begin{aligned} L_N \circ i_N \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} &= L_N \tilde{\delta}_0^* i_N \tilde{\alpha} + L_N \circ L_N \tilde{\alpha} + \frac{2}{r^2} \tilde{\alpha} - \frac{2}{r} L_N \tilde{\alpha} \\ &\quad + N \left( \frac{2}{r} \tilde{\alpha}(N) \right) i_N \text{ can} + \frac{2}{r} \tilde{\alpha}(N) L_N \circ i_N \text{ can}. \end{aligned}$$

Puisque, en restriction à  $S^n$ ,  $L_N i_N \text{ can} = 0$  et  $i_N \text{ can} = 0$ , on obtient donc, en utilisant (7) et toujours en restriction à  $S^n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_1^* \tilde{\alpha} &= \delta_1 \tilde{\delta}_1^* \alpha - 2d\tilde{\alpha}(N) - L_N \circ L_N \tilde{\alpha} - (n-2)L_N \tilde{\alpha} \\ &\quad + 2(n-1)\alpha - n\tilde{\delta}_0^* i_N \tilde{\alpha} - L_N \tilde{\delta}_0^* i_N \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, toujours en vertu de la Proposition 3.2,

$$\tilde{\delta}_0^* \tilde{\delta}_0 \tilde{\alpha} = \delta_0^* \delta_0 \alpha - nd\tilde{\alpha}(N) - dL_N i_N \tilde{\alpha}.$$

Ceci permet de conclure, en remarquant que  $\tilde{\delta}_0^* = d$  et que celle-ci commute avec la restriction à  $S^n$  et la dérivée de Lie. ■

### 3.4. Formule reliant $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^2$ et $\Delta_{S^n}^2$ .

**Proposition 3.6.** On a

$$(8) \quad \Delta_{S^n}^2 h = \delta_2 \circ \delta_2^* h - \delta_1^* \circ \delta_1 h + 4(nh - Trh \text{ can}).$$

Preuve: C'est une conséquence de (2) et du fait que

$$K_2(h) = 2(nh - Trh \text{ can}).$$

Cette formule découle des deux formules suivantes:

$$r(X, Y) = (n - 1) \text{can}(X, Y),$$

$$R(X, Y)Z = \text{can}(Y, Z)X - \text{can}(X, Z)Y.$$

$R, r$  les courbures tensorielle et de Ricci sur  $(S^n, \text{can})$  et  $(X, Y, Z)$  un triple de champs de vecteurs quelconques sur  $S^n$ . ■

Pour trouver une formule reliant  $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^2$  et  $\Delta_{S^n}^2$ , le calcul sera identique au calcul fait dans le cas  $p = 1$ . On aura besoin de calculer  $\delta_2(R(H))$  où  $R(H)$  est la 3-forme définie dans la Proposition 3.3 et d'établir une relation entre  $i_N \tilde{\delta}_2^*$  et  $\tilde{\delta}_1^* i_N$ . En plus, contrairement au cas précédent, la dérivée de Lie ne commute pas avec  $\tilde{\delta}_1^*$ .

Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $R(H)$  la 3-forme définie dans la Proposition 3.3. On notera aussi  $R(H)$  sa restriction à  $S^n$ .

Un calcul direct donnerait

$$(9) \quad \delta_2(R(H)) = -\delta_1^*(i_N H) + \delta_0(i_N H) \text{can},$$

$$(10) \quad i_N \tilde{\delta}_2^* H = \tilde{\delta}_1^* i_N H + L_N H - \frac{4}{r} H + \frac{4}{r} i_N H \odot i_N \text{can}.$$

$\odot$  désigne le produit symétrique.

**Lemme 3.1.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, soit  $D$  sa connexion de Levi-Civita et soit  $R$  son tenseur de courbure. Soit  $\alpha \in \mathcal{S}^1 M$ . Pour tout champs de vecteurs  $X, Y, N$  de  $M$ , on a la formule*

$$L_N \delta_1^* \alpha(X, Y) = \delta_1^* L_N \alpha(X, Y) + \alpha(R^s(N, X, Y) - D_{X,Y}^{2,s} N),$$

avec

$$R^s(N, X, Y) = R(N, X, Y) + R(N, Y, X),$$

$$D_{X,Y}^{2,s} N = D_X D_Y N + D_Y D_X N - D_{D_X Y} N - D_{D_Y X} N.$$

*Preuve du lemme:* Un calcul direct et fastidieux. ■

Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs tangents à  $S^n$ . En restriction à  $S^n$ , on a

$$(11) \quad D_{X,Y}^{2,s} N = -2\langle X, Y \rangle N.$$

**Proposition 3.7.** *Soit  $H \in \mathcal{S}^2\mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $h$  sa restriction à  $S^n$ . On a, en restriction à  $S^n$ ,*

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 H &= \Delta_{S^n}^2 h - L_N \circ L_N H - (n-4)L_N H - 4h \\ &\quad - 2\delta_1^*(i_N H) - 2H(N, N) \text{ can} + 2Trh \text{ can}. \end{aligned}$$

*Preuve:* D'après les Propositions 3.2 et 3.3, on a

$$\tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_2^* H = \delta_2 \delta_2^* h + 2\delta_2(R(H)) - n i_N \tilde{\delta}_2^* H - L_N i_N \tilde{\delta}_2^* H.$$

En utilisant la formule (10), on obtient,

$$\begin{aligned} L_N i_N \tilde{\delta}_2^* H &= L_N \tilde{\delta}_1^* i_N H + L_N \circ L_N H + \frac{4}{r^2} H - \frac{4}{r} L_N H \\ &\quad + L_N \left( \frac{4}{r} i_N H \odot i_N \text{ can} \right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.2 et la formule (11), on a

$$L_N \tilde{\delta}_1^* i_N H = \tilde{\delta}_1^* L_N i_N H + 2H(N, N) \text{ can}.$$

On obtient, donc, en utilisant (9),

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_2^* H &= \delta_2 \delta_2^* h - L_N \circ L_N H - (n-4)L_N H + 4(n-1)H \\ &\quad - n \tilde{\delta}_1^* i_N H - \tilde{\delta}_1^* L_N i_N H + 2\delta_0(i_N H) \\ &\quad - 2\delta_1^*(i_N H) - 2H(N, N) \text{ can}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, en vertu des Propositions 3.2 et 3.3, on a

$$\tilde{\delta}_1^* \tilde{\delta}_1 H = \delta_1^* \delta_1 h - n \delta_1^*(i_N H) - \delta_1^*(L_N i_N H) + 2\tilde{\delta}_1 H(N) \text{ can}.$$

Or, d'après la Proposition 3.3, on a

$$\begin{aligned} \delta_1^*(i_N H) &= \tilde{\delta}_1^*(i_N H) - 2H(N, N) \text{ can}, \\ \delta_1^*(L_N i_N H) &= \tilde{\delta}_1^*(L_N i_N H) - 2N.H(N, N) \text{ can}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donnerait

$$\tilde{\delta}_1 H(N) = \delta_0(i_N H) - nH(N, N) - N.H(N, N) + Trh.$$

Finalement, on a

$$\tilde{\delta}_1^* \tilde{\delta}_1 H = \delta_1^* \delta_1 h - n \tilde{\delta}_1^* (i_n H) - \tilde{\delta}_1^* (L_N i_N H) + 2(\delta_0(i_N H) + Trh) \text{ can.}$$

Ceci permet de conclure. ■

Dans tout ce qui suit, on notera:

$\tilde{P}_k$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$\tilde{H}_k$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes et harmoniques de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$S^p \tilde{P}_k$  (resp.  $S^p \tilde{H}_k$ ) l'espace vectoriel des  $p$ -formes symétriques sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont toutes les composantes, dans la base canonique, sont dans  $\tilde{P}_k$  (resp. dans  $\tilde{H}_k$ ).

Pour toute  $p$ -forme symétrique sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $h = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n+1} h_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ ,

on pose

$$N.h = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^{n+1} N.h_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

La propriété ii) de la proposition suivante va jouer un rôle très important par la suite.

**Proposition 3.8.** i) Pour tout  $Q \in \tilde{P}_k$ , et tout  $s$  réel, on a

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0 r^s Q = r^s \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0 Q - s(s + n - 1 + 2 \deg Q) r^{s-2} Q.$$

ii) Soit  $Q \in \tilde{H}_k$ . Pour tout  $j = 1 \dots n + 1$ , il existe un couple unique  $(Q_0, Q_1)$  de polynômes homogènes harmoniques tels que

$$x_j Q = Q_0 + r^2 Q_1.$$

Plus précisément, on a  $Q_0 \in \tilde{H}_{k+1}$  et  $Q_1 \in \tilde{H}_{k-1}$ .

Preuve: i) C'est un calcul direct.

ii) Il suffit de prendre

$$Q_0 = x_j Q - \frac{1}{2k + n - 1} r^2 \frac{\partial Q}{\partial x_j},$$

$$Q_1 = \frac{1}{2k + n - 1} \frac{\partial Q}{\partial x_j}$$

et d'appliquer i) pour vérifier que  $Q_0$  est harmonique. ■

### 3.5. Spectre et sous-espaces propres de $\Delta_{S^n}^0$ .

**Proposition 3.9.** *Soit  $f$  la restriction à  $S^n$  d'un élément de  $\tilde{H}_k$ . On a*

$$\Delta_{S^n}^0 f = k(k-1+n)f.$$

*En plus, la multiplicité de la valeur propre est égale à la dimension de  $\tilde{H}_k$  qui est égale à*

$$\frac{n(n+1)\dots(n+k-3)(n+k-2)}{k!}(n+2k-1).$$

*Preuve:* Découle immédiatement de la Proposition 3.4. Pour la multiplicité voir [Be-Ga-Ma, p. 162]. ■

Cette proposition permet d'avoir le spectre et tous les sous-espace propres de  $\Delta_{S^n}^0$  puisque les fonctions polynômes sont denses dans  $C^0(S^n)$  et on a la décomposition orthogonale ([Be-Ga-Ma, p. 160])

$$(12) \quad \tilde{P}_k = \bigoplus_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} r^{2l} \tilde{H}_{k-2l}.$$

### 3.6. Spectre et sous-espaces propres de $\Delta_{S^n}^1$ .

Il est connu, d'après un théorème de Hodge et puisque  $\text{Ker } \Delta_{S^n}^1 = 0$ , que

$$(H_3) \quad \mathcal{S}^1 S^n = dC^\infty(S^n) \bigoplus \text{Ker } \delta_0.$$

Cette décomposition est orthogonale et invariante par  $\Delta_{S^n}^1$ .

**Proposition 3.10.** *Soit  $\alpha \in \mathcal{S}^1 \mathbb{R}^{n+1}$ . On a*

$$L_N \alpha = N.\alpha + \frac{1}{r}\alpha - \frac{1}{r}\alpha(N)i_N \text{ can,}$$

$$L_N \circ L_N \alpha = N.N.\alpha + \frac{2}{r}N.\alpha - \frac{2}{r}N.\alpha(N)i_N \text{ can.}$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} L_N \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= N.\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \alpha \left( \left[ N, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right) \\ &= N.\alpha_i - \alpha \left( \tilde{D}_N \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \alpha \left( \tilde{D}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} N \right) \\ &= N.\alpha_i + \frac{1}{r} \left( \alpha_i - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \alpha(N) \right), \end{aligned}$$

et ce en vertu de (3).

La deuxième formule est une application de la première. ■

**Proposition 3.11.** *Soit  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1 \tilde{P}_k$  et soit  $\alpha$  sa restriction à  $S^n$ . On a, en restriction à  $S^n$ ,*

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1 \tilde{\alpha} = \Delta_{S^n}^1 \alpha - (k(k+n-1) + n - 2)\alpha - 2d\tilde{\alpha}(\vec{r}).$$

*Preuve:* D'après la Proposition 3.10, on a, en restriction à  $S^n$ ,

$$L_N \tilde{\alpha} = (k+1)\tilde{\alpha} \quad \text{et} \quad L_N \circ L_N \tilde{\alpha} = k(k+1)\tilde{\alpha}.$$

La proposition découle alors de la Proposition 3.5 et du fait, qu'en restriction à  $S^n$ ,  $d\tilde{\alpha}(N) = d\tilde{\alpha}(\vec{r})$ . ■

**Proposition 3.12.** *Soit  $f$  la restriction à  $S^n$  d'un élément de  $\tilde{H}_k$ . On a*

$$\Delta_{S^n}^1 df = k(k+n-1)df.$$

*Preuve:* Découle de la Proposition 3.9 et du fait que  $\Delta_{S^n}^1$  et  $\Delta_{S^n}^0$  commutent avec  $d$ . ■

D'après  $(H_3)$ , cette proposition nous donne le spectre et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^1$  restreint à  $dC^\infty(S^n)$ . On va, dans ce qui suit, donner le spectre et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^1$  restreint à  $\text{Ker } \delta_0$ .

Soit  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k$ . Contrairement au cas du  $\Delta_{S^n}^0$ , la restriction  $\alpha$  de  $\tilde{\alpha}$  à  $S^n$  n'est pas un vecteur propre de  $\Delta_{S^n}^1$ . Dans ce qui suit, on va donner la décomposition de  $\alpha$  suivant  $(H_3)$ .

On a, d'après la Proposition 3.8 ii),

$$\tilde{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = Q_0 + r^2 Q_1 \quad \text{avec} \quad Q_l \in \tilde{H}_{k+1-2l}.$$

On pose

$$(13) \quad \omega_k(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} - \frac{1}{k+1} dQ_0 - \frac{1}{2-k-n} dr^2 Q_1.$$

$\omega_k(\tilde{\alpha}) \in \mathcal{S}^1 \tilde{P}_k$  et on notera  $\omega_k(\alpha)$  sa restriction à  $S^n$ .

**Proposition 3.13.** *On a*

$$\Delta_{S^n}^1 \omega_k(\alpha) = (k(k+n-1) + n - 2)\omega_k(\alpha).$$

Preuve: D'après (13), on a

$$\begin{aligned}\omega_k(\tilde{\alpha})(\vec{r}) &= \frac{1-2k-n}{2-k-n} r^2 Q_1, \\ \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1 \omega_k(\tilde{\alpha}) &= -\frac{1}{2-k-n} d\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^0(r^2 Q_1) \\ &= -2\frac{1-2k-n}{2-k-n} dQ_1,\end{aligned}$$

d'après i) Proposition 2.8. On aura donc

$$2d\omega_k(\tilde{\alpha})(\vec{r}) = -\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^1 \omega_k(\tilde{\alpha}) = 2\frac{1-2k-n}{2-k-n} dQ_1,$$

et la Proposition 3.11 permet de conclure. ■

Si  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k$  et si  $\alpha$  est sa restriction à  $S^n$ , la décomposition de  $\alpha$  selon  $(H_3)$  est donnée par

$$(14) \quad \alpha = \omega_k(\alpha) + \frac{1}{k+1} dQ_0 + \frac{1}{2-k-n} dQ_1.$$

En plus,  $\omega_k(\alpha)$ ,  $dQ_0$  et  $dQ_1$  sont des vecteurs propres de  $\Delta_{S^n}^1$ .

On notera

$$\begin{aligned}\lambda_k^0 &= k(k+n-1), \\ \lambda_k^1 &= k(k+n-1) + n - 2, \\ E_{\lambda_k^0} &= \{df/f = F/S^n \text{ et } F \in \tilde{H}_k\}, \\ E_{\lambda_k^1} &= \{\omega_k(\alpha)/\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k\}, \\ \mathcal{P}^1(S^n, \text{can}) &= \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_{\lambda_k^0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_{\lambda_k^1} \right).\end{aligned}$$

**Proposition 3.14.**

$$\dim E_{\lambda_k^0} = \dim \tilde{H}_k \quad \text{pour } k \geq 1,$$

$$\dim E_{\lambda_k^1} = (n+1) \dim \tilde{H}_k - (\dim \tilde{H}_{k+1} + \dim \tilde{H}_{k-1}).$$

*Preuve:* La première égalité est triviale.

Soit  $\Phi_k : \tilde{H}_{k+1} \times \tilde{H}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k$  définie par

$$\Phi_k(Q_0, Q_1) = \frac{1}{k+1} dQ_0 + \frac{1}{2-k-n} dr^2 Q_1 + \frac{1-2k-n}{2-k-n} Q_1 i_{\vec{r}} \text{ can.}$$

Il est facile de voir que  $\Phi_k(Q_0, Q_1) \in \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k$ .

Soit

$$\begin{aligned} \omega_k : \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k &\longrightarrow E_{\lambda_k^1} \\ \tilde{\alpha} &\mapsto \omega_k(\alpha). \end{aligned}$$

Pour avoir la proposition il suffit de montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{k+1} \times \tilde{H}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k \longrightarrow E_{\lambda_k^1} \longrightarrow 0$$

est exacte. Ceci découle immédiatement du fait que

$$\Phi_k(Q_0, Q_1)(\vec{r}) = Q_0 + r^2 Q_1. \quad \blacksquare$$

**Théorème 3.1.** i)  $\mathcal{P}^1(S^n, \text{can})$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\mathcal{S}^1 S^n$ .

ii) Le spectre de  $\Delta_{S^n}^1$  avec ( $n > 2$ ) est donné par

$$\text{Spec } \Delta_{S^n}^1 = \{k(k+n-1) \quad k \geq 1, k(k+n-1) + n - 2/ \quad k \geq 1\}.$$

Les multiplicités des valeurs propres sont données par

$$\text{multp}(\lambda_1^0) = n + 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_k^0) = \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)(n+k-2)}{k!} (n+2k-1), \quad k > 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_1^1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{multp}(\lambda_2^1) = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{3},$$

$$\text{multp}(\lambda_k^1) = \frac{(n-1)n(n+1) \dots (n+k-3)}{(k+1)!} k(2k^2 + 3(n-1)k + (n-1)^2)$$

pour  $k \geq 3$ .

*Preuve:* i) Découle du fait que l'espace des polynômes homogènes est dense dans  $C^\infty(S^n)$  de (12) et (14).

ii) Découle des Propositions 3.12, 3.13 et 3.14. Il reste à calculer  $\text{multp}(\lambda_k^1)$ . On a

$$\dim \tilde{H}_k = \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)(n+k-2)}{k!} (n+2k-1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (n+1) \dim \tilde{H}_k - (\dim \tilde{H}_{k+1} + \dim \tilde{H}_{k-1}) \\ = \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)}{(k+1)!} (A(n, k) - B(n, k) - C(n, k)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A(n, k) &= (n+1)(n+k-2)(k+1)(n+2k-1), \\ B(n, k) &= (n+k-2)(n+k-1)(n+2k+1), \\ C(n, k) &= (n+2k-3)k(k+1). \end{aligned}$$

Un calcul simple donnerait

$$\begin{aligned} A(n, k) &= 2(n+1)k^3 + 3(n+1)(n-1)k^2 \\ &\quad + (n+1)(n^2-3)k + (n-1)(n-2)(n+1), \\ B(n, k) &= 2k^3 + 5(n-1)k^2 + (4n^2-7n+1)k + (n+1)(n-2)(n-1), \\ C(n, k) &= 2k^3 + (n-1)k^2 + (n-3)k. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. ■

**Remarque.**  $\text{Spec } \Delta_{S^2}^1 = \{k(k+1) \mid k \geq 1\}$ , et  $\text{multp}(k(k+1)) = 2(2k+1)$ .

**Proposition 3.15.** *On a*

- i)  $\#E_{\lambda_1^1}$  est l'algèbre des champs de Killing de  $(S^n, \text{can})$ .
- ii)  $\bigoplus_{k=1}^{\infty} E_{\lambda_k^1}$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{Ker } \delta_0$ .

*Preuve:* i) Soit  $X$  un champ de Killing de  $(S^n, \text{can})$  et soit  $\alpha = \omega^b(X)$ . On a, d'après (1),  $\delta_1^*(\alpha) = 0$ . D'un autre côté, un calcul simple donne que

$$\delta_0(\alpha) = -\frac{1}{2}Tr\delta_1^*(\alpha) = 0.$$

Donc d'après (5), on aura

$$\Delta_{S^n}^1(\alpha) = 2(n-1)\alpha.$$

Or  $\lambda_1^1 = 2(n-1)$  et donc, si  $\mathcal{G}_1$  désigne l'algèbre des champs de Killing de  $(S^n, \text{can})$ ,  $\omega^b(\mathcal{G}_1)$  est contenu dans  $E_{\lambda_1^1}$  et, puisque ils ont la même dimension, ils sont égales.

ii) Découle de  $(H_3)$  et de la Proposition 3.13. ■

### 3.7. Spectre et sous-espaces propres de $\Delta_{S^n}^2$ .

Comme pour  $\Delta_{S^n}^1$ , notre calcul sera guidé par les deux décompositions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  données dans l'introduction et que nous rappelons ici.

$$(H_1) \quad \mathcal{S}^2 S^n = \text{Ker } \delta_1 \bigoplus \delta_1^*(\Omega^1(S^n)),$$

$$(H_2) \quad \mathcal{S}^2 S^n = \text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0) \bigoplus (\delta_1^*(\Omega^1(S^n)) + C^\infty(S^n) \text{can}).$$

**Proposition 3.16.** *Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \mathbb{R}^{n+1}$ . On a*

$$\begin{aligned} L_N H &= N.H + \frac{2}{r}H - 2(i_N H \odot i_N \text{can}), \\ L_N \circ L_N H &= N.N.H + \frac{4}{r}N.H + \frac{2}{r^2}H - \frac{2}{r}N.(i_N H \odot i_N \text{can}) \\ &\quad - \frac{4}{r}(i_N H \odot i_N \text{can}) - 2(i_N L_N H \odot i_N \text{can}). \end{aligned}$$

*Preuve:*

$$L_N H \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = N.H_{ij} - H \left( \left[ N, \frac{\partial}{\partial x_i} \right], \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - H \left( \left[ N, \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Or, d'après (3),

$$\left[ N, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = -\tilde{D}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} N = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right) N.$$

Ce qui permet d'avoir la première formule. La deuxième est une application de la première. ■

**Proposition 3.17.** Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \tilde{P}_k$  et soit  $h$  sa restriction à  $S^n$ . On a, en restriction à  $S^n$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 H &= \Delta_{S^n}^2 h - (k(k+n-1) + 2(n-1))h \\ &\quad - 2\delta_1^*(i_{\vec{r}}H) - 2H(\vec{r}, \vec{r}) \text{ can} + 2Trh \text{ can}. \end{aligned}$$

*Preuve:* D'après la Proposition 3.16, on a, en restriction à  $S^n$ ,

$$\begin{aligned} L_N H &= (k+2)h, \\ L_N \circ L_N H &= (k(k+3) + 2)h. \end{aligned}$$

La Proposition 3.7 permet alors de conclure. ■

**Proposition 3.18.** Soit  $F \in \tilde{H}_k$ , soit  $f$  sa restriction à  $S^n$  et soit  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1 \tilde{H}_k$ . On a

$$\begin{aligned} \Delta_{S^n}^2 (f \text{ can}) &= k(k+n-1)f \text{ can}, \\ \Delta_{S^n}^2 \delta_1^*(df) &= k(k+n-1)\delta_1^*(df), \\ \Delta_{S^n}^2 \delta_1^*(\omega_k(\alpha)) &= (k(k+n-1) + n-2)\delta_1^*(\omega_k(\alpha)). \end{aligned}$$

*Preuve:* Ces égalités découlent du Théorème 2.1 et des Propositions 3.9, 3.12 et 3.13. ■

Cette proposition nous donne le spectre et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^2$  en restriction à  $\text{Im } \delta_1^* + C^\infty(S^n) \text{ can}$ . Dans ce qui suit, on va donner le spectre et les sous-espaces propres de  $\Delta_{S^n}^2$  en restriction à  $\text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0)$  et ce en vertu de  $(H_2)$ .

Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k$  et soit  $h$  sa restriction à  $S^n$ . Comme pour le calcul du spectre de  $\Delta_{S^n}^1$ ,  $h$  n'est pas un vecteur propre de  $\Delta_{S^n}^2$ . On se propose, dans ce qui suit, de décomposer  $h$  suivant  $(H_2)$  et trouver un vecteur propre de  $\Delta_{S^n}^2$  pour la valeur propre  $\lambda_k^2 = k(k+n-1) + 2(n-1)$ .

Pour cela, si  $H \in \mathcal{S}^2 \tilde{P}_k$  et si  $h$  est sa restriction à  $S^n$ , on pose

$$\Phi(H) = \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 H + 2\delta_1^*(i_{\vec{r}}H) + 2H(\vec{r}, \vec{r}) \text{ can} - 2Trh \text{ can}.$$

$\phi(H)$  est une 2-forme symétrique sur  $S^n$ .

Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k$  et soit  $h$  sa restriction à  $S^n$ . On a

$$i_{\vec{r}}H = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} H_{ij} x_j dx_i.$$

Or, d'après la Proposition 3.8, on a, pour tout  $i = 1 \dots n + 1$

$$\sum_{j=1}^{n+1} H_{ij} x_j = \alpha_i^0 + r^2 \alpha_i^1,$$

avec  $\alpha_i^0 \in \tilde{H}_{k+1}$  et  $\alpha_i^1 \in \tilde{H}_{k-1}$ .

On pose

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^0 dx_i, \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^1 dx_i.$$

Toujours d'après la Proposition 3.8, on a

$$\alpha_0(\vec{r}) = P_0^0 + r^2 P_1^0 \quad \text{et} \quad \alpha_1(\vec{r}) = P_0^1 + r^2 P_1^1,$$

avec  $P_0^0 \in \tilde{H}_{k+2}$ ,  $P_1^0 \in \tilde{H}_k$ ,  $P_0^1 \in \tilde{H}_k$  et  $P_1^1 \in \tilde{H}_{k-2}$ .

On a, d'après (13),

$$\begin{aligned} i_{\vec{r}} H &= \alpha_0 + r^2 \alpha_1 \\ &= \omega_{k+1}(\alpha_0) + r^2 \omega_{k-1}(\alpha_1) \\ &\quad + \frac{1}{k+2} dP_0^0 + \frac{1}{1-k-n} dr^2 P_1^0 + \frac{r^2}{k} dP_0^1 + \frac{r^2}{3-k-n} dr^2 P_1^1, \end{aligned}$$

$$H(\vec{r}, \vec{r}) = P_0^0 + r^2(P_1^0 + P_0^1) + r^4 P_1^1.$$

En remarquant que, en restriction à  $S^n$ ,  $TrH = Trh + H(\vec{r}, \vec{r})$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \Phi(H) &= 2\delta_1^*(\omega_{k+1}(\alpha_0)) + 2\delta_1^*(\omega_{k-1}(\alpha_1)) \\ &\quad + \frac{2}{k+2} \delta_1^*(dP_0^0) + \frac{2}{1-k-n} \delta_1^*(dr^2 P_1^0) \\ &\quad + \frac{2}{k} \delta_1^*(dP_0^1) + \frac{2}{3-k-n} \delta_1^*(dr^2 P_1^1) \\ &\quad + 4(P_0^0 + P_1^0 + P_0^1 + P_1^1) \text{ can} - 2TrH \text{ can}. \end{aligned}$$

On pose, maintenant

$$\begin{aligned}
\Omega_k(H) &= h - \frac{1}{k} \delta_1^*(\omega_{k+1}(\alpha_0)) + \frac{1}{k+n-1} \delta_1^*(\omega_{k-1}(\alpha_1)) \\
&\quad - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \delta_1^*(dP_0^0) + \frac{1}{(n-1)(1-k-n)} \delta_1^*(dP_1^0) \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)k} \delta_1^*(dP_0^1) + \frac{1}{2(k+n-2)(3-k-n)} \delta_1^*(dP_1^1) \\
&\quad + \left( -\frac{1}{k+1} P_0^0 + \frac{2}{n-1} (P_1^0 + P_0^1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k+n-2} P_1^1 + \frac{1}{1-n} \text{Tr}H \right) \text{can}, \\
(15) \quad \tilde{\Omega}_k(H) &= H - \frac{1}{k} \tilde{\delta}_1^*(\omega_{k+1}(\alpha_0)) + \frac{r^2}{k+n-1} \tilde{\delta}_1^*(\omega_{k-1}(\alpha_1)) \\
&\quad - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \tilde{\delta}_1^*(dP_0^0) + \frac{r^2}{(n-1)(1-k-n)} \tilde{\delta}_1^*(dP_1^0) \\
&\quad + \frac{r^2}{k(n-1)} \tilde{\delta}_1^*(dP_0^1) + \frac{r^4}{2(k+n-2)(3-k-n)} \tilde{\delta}_1^*(dP_1^1) \\
&\quad - 2 \frac{k^2 + 3(n-1)k + (n^2-1)}{k(n-1)(1-k-n)} P_1^0 \text{can} + \frac{1}{1-n} \text{Tr}H \text{can} \\
&\quad + \frac{2k^2 + (3n-7)k + n^2 - 4n + 7}{(3-k-n)(k+n-1)(k+n-2)} r^2 P_1^1 \text{can}.
\end{aligned}$$

Un calcul direct utilisant la Proposition 3.3 permet de vérifier que  $\tilde{\Omega}_k(H) \in \mathcal{S}^2 \tilde{P}_k$  et que sa restriction à  $S^n$  est exactement  $\Omega_k(H)$ .

**Proposition 3.19.** *Soit  $H \in \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k$ . On a*

$$\Delta_{S^n}^2 \Omega_k(H) = (k(k+n-1) + 2(n-1)) \Omega_k(H).$$

*Preuve:* D'après la Proposition 3.17, il suffit de vérifier que  $\Phi(\tilde{\Omega}_k(H)) = 0$ .

Or  $\Omega_k(H) - h$ , restriction de  $\tilde{\Omega}_k(H) - H$ , est la somme de vecteurs propres de  $\Delta_{S^n}^2$  dont les coefficients ont été déterminée pour que justement  $\Phi(\tilde{\Omega}_k(H))$  soit égale à 0. La vérification peut se faire, en remarquant que, si  $\phi$  est un vecteur propre de  $\Delta_{S^n}^2$  pour la valeur propre  $\lambda$  et  $\tilde{\phi}$  est une 2-forme homogène de degré  $k$  qui prolonge  $\phi$ , on a, en vertu de la Proposition 3.17, que

$$\Phi(\tilde{\phi}) = (\lambda - (k(k+n-1) + 2(n-1)))\phi. \quad \blacksquare$$

**Proposition 3.20.** *Soit  $H \in \mathcal{S}^2\tilde{H}_k$ . On a*

$$\text{Tr}\Omega_k(H) = 0 \quad \text{et} \quad \delta_1(\Omega_k(H)) = 0.$$

*Preuve:* D'après la proposition précédente,  $\Omega_k(H)$  est un vecteur propre de  $\Delta_{S^n}^2$  pour la valeur propre  $k(k+n-1) + 2(n-1)$  et donc, d'après la Proposition 3.18, on a

$$\langle \Omega_k(H), f \text{ can} \rangle = \langle \Omega_k(H), \delta_1^*(df) \rangle = \langle \Omega_k(H), \delta_1^*(\omega_k(\alpha)) \rangle = 0$$

pour tout  $f \in \tilde{H}_k$  et tout  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1\tilde{H}_k$ . Par un argument de densité, on déduit que  $\Omega_k(H)$  est orthogonal à  $C^\infty(S^n) \text{ can}$  et à  $\delta_1^*(\mathcal{S}^1S^n)$ , ce qui prouve la proposition.  $\blacksquare$

Soit  $H \in \mathcal{S}^2\tilde{H}_k$  et si  $h$  est sa restriction à  $S^n$ , la décomposition de  $h$  suivant  $(H_2)$  est donnée par

$$(16) \quad \begin{aligned} h = & \Omega_k(H) + \frac{1}{k}\delta_1^*(\omega_{k+1}(\alpha_0)) - \frac{1}{k+n-1}\delta_1^*(\omega_{k-1}(\alpha_1)) \\ & + \frac{1}{2(k+1)(k+2)}\delta_1^*(dP_0^0) - \frac{1}{(n-1)(1-k-n)}\delta_1^*(dP_1^0) \\ & - \frac{1}{(n-1)k}\delta_1^*(dP_0^1) - \frac{1}{2(k+n-2)(3-k-n)}\delta_1^*(dP_1^1) \\ & + \left( +\frac{1}{k+1}P_0^0 - \frac{2}{n-1}(P_1^0 + P_0^1) - \frac{1}{k+n-2}P_1^1 - \frac{1}{1-n}\text{Tr}H \right) \text{can}. \end{aligned}$$

D'un autre côté et puisque  $Tr\Omega_k(H) = 0$ ,  $TrH$  ne dépend que de  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ . Pour calculer la multiplicité des valeurs propres, on définit alors

(17)

$$\begin{aligned} \Psi_k(\alpha_0, \alpha_1) = & -\frac{1}{k}\tilde{\delta}_1^*(\omega_{k+1}(\alpha_0)) + \frac{r^2}{k+n-1}\tilde{\delta}_1^*(\omega_{k-1}(\alpha_1)) \\ & - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}\tilde{\delta}_1^*(dP_0^0) + \frac{r^2}{(n-1)(1-k-n)}\tilde{\delta}_1^*(dP_1^0) \\ & + \frac{r^2}{k(n-1)}\tilde{\delta}_1^*(dP_0^1) + \frac{r^4}{2(k+n-1)(3-k-n)}\tilde{\delta}_1^*(dP_1^1) \\ & - 2\frac{k^2+3(n-1)k+(n^2-1)}{k(n-1)(1-k-n)}P_1^0 \text{ can} + \frac{1}{1-n}TrH \text{ can} \\ & + \frac{2k^2+(3n-7)k+n^2-4n+7}{(3-k-n)(k+n-1)(k+n-2)}r^2P_1^1 \text{ can}. \end{aligned}$$

On notera

$$\lambda_k^0 = k(k+n-1),$$

$$\lambda_k^1 = k(k+n-1) + n - 2,$$

$$\lambda_k^2 = k(k+n-1) + 2(n-1),$$

$$G_{\lambda_k^0} = \{f \text{ can} + \delta_1^*(dq)/f = F/S^n, \quad q = Q/S^n \quad \text{et} \quad F, Q \in \tilde{H}_k\},$$

$$G_{\lambda_k^1} = \{\delta_1^*(\omega_k(\alpha))/\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}^1\tilde{H}_k\},$$

$$G_{\lambda_k^2} = \{\Omega_k(H)/H \in \mathcal{S}^2\tilde{H}_k\},$$

$$\mathcal{P}^2(S^n, \text{can}) = \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_{\lambda_k^0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^1} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^2} \right).$$

**Proposition 3.21.** *On a*

$$\dim G_{\lambda_0^0} = 1,$$

$$\dim G_{\lambda_1^0} = n + 1,$$

$$\dim G_{\lambda_k^0} = 2 \dim \tilde{H}_k \quad \text{pour} \quad k \geq 2,$$

$$\dim G_{\lambda_k^1} = (n+1) \dim \tilde{H}_k - (\dim \tilde{H}_{k+1} + \dim \tilde{H}_{k-1}) \quad \text{pour} \quad k \geq 2,$$

$$\dim G_{\lambda_k^2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \dim \tilde{H}_k - (n+1)(\dim \tilde{H}_{k+1} + \dim \tilde{H}_{k-1}).$$

*Preuve:* Les deux premières égalités sont triviales. Montrons la troisième. Soient  $F, Q \in \tilde{H}_k$  et soient  $f, q$  leurs restrictions à  $S^n$ . Supposons que

$$(*) \quad f \text{ can} + \delta_1^*(dq) = 0.$$

D'après (7) et (19), on a

$$\begin{aligned} \delta_1(f \text{ can}) &= -df, \\ \delta_1 \delta_1^*(dq) &= 2(k(k+n-1) - (n-1))dq. \end{aligned}$$

On en déduit que  $f = 2(k(k+n-1) - (n-1))q$  et par homogénéité  $F = 2(k(k+n-1) - (n-1))Q$ .

D'un autre côté, un calcul direct donne

$$\text{Tr} \delta_1^*(dq) = -2\delta_0(dq) = -2k(k+n-1)q$$

et en prenant la trace dans (\*), on déduit que  $q = 0$  et par homogénéité on aura  $F = Q = 0$ . Ceci prouve la troisième égalité.

Soit  $\Phi_k : \mathcal{S}^1 \tilde{H}_{k+1} \times \mathcal{S}^1 \tilde{H}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k$  définie par

$$\Phi_k(\alpha_0, \alpha_1) = -\Psi_k(\alpha_0, \alpha_1) + \beta \odot i_{\tilde{r}} \text{ can},$$

où  $\beta$  est définie de manière unique pour que  $i_{\tilde{r}} \Phi_k(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 + r^2 \alpha_1$ . Et soit

$$\begin{aligned} \Omega_k : \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k &\longrightarrow G_{\lambda_k^2} \\ H &\mapsto \Omega_k(H). \end{aligned}$$

Pour avoir la proposition il suffit de montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^1 \tilde{H}_{k+1} \times \mathcal{S}^1 \tilde{H}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{S}^2 \tilde{H}_k \longrightarrow G_{\lambda_k^2} \longrightarrow 0$$

est exacte. Ce qui est très simple à vérifier. ■

**Théorème 3.2.** i)  $\mathcal{P}^2(S^n, \text{can})$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\mathcal{S}^2 S^n$ .

ii) Le spectre de  $\Delta_{S^n}^2$  ( $n > 2$ ) est donné par

$$\text{Spec } \Delta_{S^n}^2 = \{k(k+n-1) \quad k \geq 0, k(k+n-1)+n-2 \quad k \geq 2, \\ k(k+n-1)+2(n-1) \quad k \geq 2\}.$$

Les multiplicités des valeurs propres sont données par

$$\text{multp}(\lambda_0^0) = 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_1^0) = n + 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_k^0) = 2 \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)(n+k-2)}{k!} (n+2k-1), \quad k \geq 2,$$

$$\text{multp}(\lambda_2^1) = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{3},$$

$$\text{multp}(\lambda_k^1) = \frac{(n-1)n(n+1) \dots (n+k-3)}{(k+1)!} k \\ \times (2k^2 + 3(n-1)k + (n-1)^2) \quad k \geq 3,$$

$$\text{multp}(\lambda_2^2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n-2)}{12},$$

$$\text{multp}(\lambda_k^2) = \frac{1}{2} \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)}{(k+1)!} (n+1)(n-2) \\ \times (2k^3 + 3(n-1)k^2 + (n^2 - 4n + 1)k - n(n-1)) \quad k \geq 3.$$

*Preuve:* i) Découle du fait que l'espace des polynômes homogènes est dense dans  $C^\infty(S^n)$  de (12) et (16).

ii) Découle des Propositions 3.18, 3.19 et 3.21. Il reste à vérifier  $\text{multp}(\lambda_k^1)$  et  $\text{multp}(\lambda_k^2)$ .

La relation (1), la Proposition 3.15 et le Théorème 3.1 permettent de donner la multiplicité de  $\text{multp}(\lambda_k^1)$ .

$$\dim \tilde{H}_k = \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)(n+k-2)}{k!} (n+2k-1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \dim \tilde{H}_k - (n+1)(\dim \tilde{H}_{k+1} + \dim \tilde{H}_{k-1}) \\ &= \frac{(n+1)}{2} \frac{n(n+1) \dots (n+k-3)}{(k+1)!} \left( \frac{n+2}{n+1} A(n, k) - 2B(n, k) - 2C(n, k) \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A(n, k) &= (n+1)(n+k-2)(k+1)(n+2k-1), \\ B(n, k) &= (n+k-2)(n+k-1)(n+2k+1), \\ C(n, k) &= (n+2k-3)k(k+1). \end{aligned}$$

Avec (voir la preuve du Théorème 3.1)

$$\begin{aligned} A(n, k) &= 2(n+1)k^3 + 3(n+1)(n-1)k^2 \\ &\quad + (n+1)(n^2-3)k + (n-1)(n-2)(n+1), \\ B(n, k) &= 2k^3 + 5(n-1)k^2 + (4n^2-7n+1)k + (n+1)(n-2)(n-1), \\ C(n, k) &= 2k^3 + (n-1)k^2 + (n-3)k. \end{aligned}$$

Ceci permet de donner la multiplicité de  $\text{mult}(\lambda_k^2)$ . ■

**Remarque.**  $\text{Spec } \Delta_{S^2}^2 = \{k(k+1) \mid k \geq 1\}$ , et  $\text{mult}(k(k+1)) = 3(2k+1)$ .

Soit  $F \in \tilde{\mathcal{H}}_k$  et soit  $f$  sa restriction à  $S^n$ . On pose

$$(18) \quad N(f) = \delta_1^*(df) + 2(k(k+n-1) - (n-1))f \text{ can.}$$

**Proposition 3.22.** Soit  $F \in \tilde{\mathcal{H}}_k$  et soit  $f$  sa restriction à  $S^n$ . On a

$$\delta_1(N(f)) = 0.$$

Preuve: D'après la Proposition 3.12, on a

$$\Delta_{S^n}^1 df = k(k+n-1)df.$$

Soit, en vertu de (5),

$$\delta_1 \delta_1^*(df) = (k(k+n-1) - 2(n-1))df + d\delta_0 df.$$

Or, d'après la Proposition 3.9,  $\delta_0 df = k(k+n-1)f$ . On obtient donc que

$$\delta_1 \delta_1^*(df) = 2(k(k+n-1) - (n-1))df.$$

On peut conclure, en remarquant que  $\delta_1(f \text{ can}) = -df$ . ■

On note

$$N(\tilde{\mathcal{H}}_k) = \{\delta_1^*(df) + 2(k(k+n-1) - (n-1))f \text{ can} \\ f = F/S^n \text{ et } F \in \tilde{\mathcal{H}}_k\},$$

$$N = \bigoplus_{k=0}^{\infty} N(\tilde{\mathcal{H}}_k).$$

Comme annoncé dans l'introduction, on obtient:

**Théorème 3.3.** i)  $N \bigoplus \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^2} \right)$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{Ker } \delta_1$ .

ii)  $\left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^2} \right)$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0)$ .

*Preuve:* D'après les Propositions 3.22 et 3.20, on a

$$N \bigoplus \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^2} \right) \subset \text{Ker } \delta_1, \quad \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_k^2} \right) \subset \text{Ker } \delta_1 \cap Tr^{-1}(0).$$

i) et ii) découlent alors des décomposition  $(H_1)$  et  $(H_2)$ . ■

Pour finir cette section, on va donner deux applications du Théorème 2.2 pour retrouver deux résultats bien connus.

**Théorème 3.4 [Be-Eb].** *Pour toute 2-forme symétrique  $h$  sur  $S^2$ , il existe un couple  $(f, X)$  où  $f$  est une fonction différentiable et  $X$  un champ de vecteurs, tels que*

$$h = L_X \text{ can} + f \text{ can}.$$

*Preuve:* Découle de i) du Théorème 3.2 et du fait que, pour  $n = 2$ ,  $\dim G_{\lambda_k^2} = 0$ . ■

**Proposition 3.23.** *La structure d'Einstein canonique sur  $S^n$  est rigide.*

*Preuve:* Soit  $h$  une déformation d'Einstein infinitésimale. D'après [Be2, p. 347] et un calcul simple,  $h$  vérifie

$$\text{Tr}h = 0, \delta_1(h) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{S^n}^2(h) = 4(n-1)h.$$

D'après le Théorème 3.2  $h = 0$ . ■ (Voir [Be2, p. 355] pour plus de détails.)

#### 4. Laplaciens de Lichnerowicz sur les projectifs réels

On notera  $P : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  le revêtement canonique du projectif réel de dimension  $n$  par la sphère  $S^n$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n)$ ,  $\alpha \in \mathcal{S}^1\mathbb{R}P^n$  et  $h \in \mathcal{S}^2\mathbb{R}P^n$ . On a*

$$\begin{aligned} \Delta_{S^n}^0(P^*f) &= P^*\Delta_{\mathbb{R}P^n}^0(f), \\ \Delta_{S^n}^1(P^*\alpha) &= P^*\Delta_{\mathbb{R}P^n}^1(\alpha), \\ \Delta_{S^n}^2(P^*h) &= P^*\Delta_{\mathbb{R}P^n}^2(h). \end{aligned}$$

*Preuve:* Pour la première relation voir [Be-Ga-Ma, p. 129]. Les deux dernières découlent du fait que le revêtement  $P : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  est une isométrie locale. ■

On identifiera  $C^\infty(\mathbb{R}P^n)$  au sous-espace vectoriel de  $C^\infty(S^n)$  des fonctions paire pour l'antipodie,  $\mathcal{S}^1\mathbb{R}P^n$  au sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}^1S^n$  des 1-formes invariante par l'antipodie et  $\mathcal{S}^2\mathbb{R}P^n$  au sous-espace vectoriel des 2-formes symétriques invariantes par antipodie.

Les notations sont celles la section précédente. On notera

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1(\mathbb{R}P^n, \text{can}) &= \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_{\lambda_{2k}^0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_{\lambda_{2k+1}^1} \right), \\ \mathcal{P}^2(\mathbb{R}P^n, \text{can}) &= \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_{\lambda_{2k}^0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_{2k+1}^1} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} G_{\lambda_{2k}^2} \right), \\ N^+ &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} N(\tilde{\mathcal{H}}_{2k}). \end{aligned}$$

Les résultats suivants sont une conséquence immédiates des Théorèmes 3.1, 2.2, 2.3, la Proposition 3.15 et la Proposition 4.1.

**Théorème 4.1.** i)  $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}P^n, \text{can})$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\mathcal{S}^1\mathbb{R}P^n$ .

ii) Le spectre de  $\Delta_{\mathbb{R}P^n}^1$  avec  $(n > 2)$  est donné par

$$\text{Spec } \Delta_{\mathbb{R}P^n}^1 = \{2k(2k+n-1) \quad k \geq 1, (2k+1)(2k+n)+n-2/ \quad k \geq 0\}.$$

Les multiplicités des valeurs propres sont données par

$$\text{multp}(\lambda_{2k}^0) = \frac{n(n+1) \dots (n+2k-3)(n+2k-2)}{(2k)!} (n+4k-1), \quad k \geq 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_1^1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{multp}(\lambda_{2k+1}^1) &= \frac{(n-1)n(n+1) \dots (n+2k-2)}{(2k+2)!} \\ &\times (2k+1)(8k^2 + 2(3n+1)k + (n+1)n) \end{aligned}$$

pour  $k \geq 1$ .

**Théorème 4.2.** i)  $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}P^n, \text{can})$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\mathcal{S}^2\mathbb{R}P^n$ .

ii) Le spectre de  $\Delta_{\mathbb{R}P^n}^2$  ( $n > 2$ ) est donné par

$$\begin{aligned} \text{Spec } \Delta_{\mathbb{R}P^n}^2 &= \{2k(2k+n-1) \quad k \geq 0, (2k+1)(2k+n)+n-2 \quad k \geq 1, \\ &2k(2k+n-1) + 2(n-1) \quad k \geq 2\}. \end{aligned}$$

Les multiplicités des valeurs propres sont données par

$$\text{multp}(\lambda_0^0) = 1,$$

$$\text{multp}(\lambda_{2k}^0) = 2 \frac{n(n+1) \dots (n+2k-3)(n+2k-2)}{(2k)!}$$

$$\times (n+4k-1), \quad k \geq 1,$$

$$\begin{aligned} \text{multp}(\lambda_{2k+1}^1) &= \frac{(n-1)n(n+1) \dots (n+2k-2)}{(2k+2)!} \\ &\times (2k+1)(8k^2 + 2(3n+1)k + (n+1)n), \end{aligned}$$

$$\text{multp}(\lambda_2^2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n-2)}{12},$$

$$\text{multp}(\lambda_{2k}^2) = \frac{1}{2} \frac{n(n+1) \dots (n+2k-3)}{(2k+1)!} (n+1)(n-2)$$

$$\times (16k^3 + 12(n-1)k^2 + 2(n^2 - 4n + 1)k - n(n-1)) \quad k \geq 2.$$

**Proposition 4.2.** *On a*

- i)  $\#E_{\lambda_1}$  est l'algèbre des champs de Killing de  $(\mathbb{R}P^n, \text{can})$ .
- ii)  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} E_{\lambda_{2k+1}}$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{Ker } \delta_0$ .

**Théorème 4.3.** i)  $N^+ \bigoplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} G_{\lambda_{2k}} \right)$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{Ker } \delta_1$ .

- ii)  $\left( \bigoplus_{k=2}^{\infty} G_{\lambda_{2k}} \right)$  est dense au sens de la convergence uniforme dans  $\text{ker } \delta_1 \cap \text{Tr}^{-1}(0)$ .

### Références

- [Be1] A. BESSE, “*Manifolds all of whose geodesics are closed,*” Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- [Be2] A. BESSE, “*Einstein manifolds,*” Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
- [Be-Eb] M. BERGER ET D. EBIN, Some decomposition of the space of symmetric tensors on riemannian manifold, *J. Differential Geom.* **3** (1969), 379–392.
- [Be-Ga-Ma] M. BERGER, P. GAUDUCHON ET E. MAZET, “*Le spectre d'une variété riemannienne,*” Lecture Notes in Math. **194**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [Be-Mi] B. L. BEERS ET R. S. MILLMAN, The spectra of the Laplace-Beltrami operator on compact, semisimple Lie groups, *Amer. J. Math.* **99(4)** (1975), 801–807.
- [Ga-Me] S. GALLOT ET D. MEYER, Opérateur de courbure et laplaciens des formes différentielles d'une variété riemannienne, *J. Math. Pures Appl.* **54** (1975), 259–289.
- [Ik-Ta] A. IKEDA ET Y. TANIGUCHI, Spectra and eigenforms of Laplacian on  $S^n$  and  $P^n(\mathbb{C})$ , *Osaka J. Math.* **15(3)** (1978), 515–546.
- [Iw-Ka] I. IWASAKI ET K. KATASE, On the spectrum of the Laplace operator on  $\bigwedge^*(S^n)$ , *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), 141–145.
- [L] A. LICHNEROWICZ, Propogateurs et commutateurs en relativité générale, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **10** (1961).

- [M] R. MICHEL, Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 17–69.

Faculté des Sciences et Techniques  
Université Cadi-Ayyad  
Gueliz, BP 618  
Marrakech  
MAROC

*e-mail*: fstg@cybernet.net.ma

Primera versió rebuda el 19 de gener de 1998,  
darrera versió rebuda el 16 de desembre de 1998