

SUR L'HOLONOMIE DES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES DE SIGNATURE $(2, 2 + n)$

A. IKEMAKHEN

Abstract

In this paper, we determinate a class of possible restricted holonomy groups for a non-irreducible indecomposable pseudo-riemannian manifold with signature $(2, 2 + n)$. In particular, we deduce that which associated to symmetric spaces; and give some examples of such spaces. Finally, we construct some examples of metrics whose restricted holonomy groups are not closed.

1. Introduction

Soit M une variété connexe de dimension m . Soit D une connection affine sans torsion sur le fibré tangent de M et soit θ un point de base pour M . Le groupe d'holonomie en θ , noté H_θ , est le sous-groupe de $GL(T_\theta M)$ engendré par le transport parallèle le long des lacets basés en θ . Si on change le point θ en un autre point δ , on montre facilement que H_θ et H_δ sont conjugués. Donc, par abus de langage, on parle sur H comme groupe d'holonomie et l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de H comme algèbre d'holonomie de (M, D) .

Pour simplifier, nous nous restreindrons ici au problème “local”, en ne considérant que le groupe d'holonomie “restreint”, qui est engendré par le transport parallèle le long des lacets homotopes au lacet constant. (Pour alléger les notations, dans le cours du texte nous omettrons parfois le mot restreint, mais nous n'étudions en fait ici que ce cas.) Les invariants de ce groupe correspondent aux tenseurs parallèles sur M et la classification des groupes linéaires qui peuvent apparaître ainsi est un problème important de géométrie différentielle. Ainsi la question de base de la théorie est la suivante:

Keywords. Restricted holonomy group, indecomposable pseudo-Riemannian manifold, cohomologie of Lie algebra.

1991 *Mathematics subject classifications:* Primary: 53B05, 53C10.

A une conjugaison près, quels sont tous les sous-groupes connexes de H de $GL(m, \mathbb{R})$ qui peuvent être réalisés comme groupe d'holonomie d'une connection affine sans torsion sur une variété de dimension m ?

L'outil clé de la réponse à cette question, dans le cas d'une variété pseudo-riemannienne, est le classique Théorème de G. De Rham (pour le cas riemannien, voir le chapitre 10 dans [7] par exemple), généralisé par H. Wu (dans le cas pseudo-riemannien, voir [25], [26]). Si la représentation du groupe d'holonomie H dans $T_\theta M$ est décomposable en une somme directe orthogonale de représentations dans des sous-espaces E_i ($i = 1, \dots, r$) de $T_\theta M$, non dégénérés pour g_θ , alors, au moins localement au voisinage de θ , il existe une décomposition de M en produit riemannien de sous-variétés pseudo-riemanniennes M_i telles que E_i soit l'espace tangent à M_i , et si H_i est le groupe d'holonomie de M_i , alors H est en fait le produit des H_i , et H_i est l'image de H dans $GL(E_i)$.

On est donc ainsi ramené, dans ce cas, à étudier les groupes d'holonomie "indécomposables", c'est à dire tels qu'il n'existe pas de sous-espace non-dégénéré propre dans $T_\theta M$, invariant par H . Dans le cas riemannien, on est donc ramené au cas où la représentation de H dans $T_\theta M$ est irréductible. Par contre, dans le cas pseudo-riemannien, il peut y avoir encore des sous-espaces invariants pour la représentation de H , à condition que ces sous-espaces soient dégénérés pour g_θ .

En utilisant deux critères qui dérivent du Théorème d'Ambrose-Singer [2], M. Berger a donné dans [5] une liste de groupes d'holonomie possibles dont la représentation est irréductible, pour une connection affine non localement symétrique. Sa classification est divisée en trois parties:

(1) La première liste est constituée de tous les sous-groupes irréductibles $H \subseteq SO_0(m)$, c'est à dire ceux qui peuvent être associés à une métrique définie positive. Après sept ans, J. Simons dans [24] a démontré que cette liste est celle des sous-groupes de $SO_0(m)$ qui agit transitivement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^m$, en se basant sur les travaux de D. Montgomery et H. Samelson [19]. D'autre part, il a fallu beaucoup de progrès pour réaliser ces groupes comme holonomies de variétés riemanniennes. Nous mentionnons dans ce contexte les travaux de Calabi, Alekseevskii, Brow-Gray, Salamon et Bryant [7], [15], [1], [8], [9], [21] et [11].

(2) La deuxième liste est constituée de tous les sous-groupes irréductibles $H \subseteq SO_0(p, m-p)$, pour $p \neq 0$. C'est à dire ceux qui peuvent être associés à une métrique de signature quelconque $(p, m-p)$ non définie positive. Dans ce cas la question est ce que ces candidats sont réalisés ou non comme holonomies de métriques pseudo-riemanniennes est résolue (voir [9] et [10]).

(3) La troisième liste est constituée de tous les sous-groupes irréductibles $H \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ mais H est non inclus dans $SO_0(p, m-p)$, c'est à dire ceux qui peuvent être associés à une connexion affine sans torsion et ne laissent invariante aucune 2-forme bilinéaire symétrique non dégénérée. La liste de Berger dans ce cas est incomplète. Bryant l'a complétée par d'autres sous-groupes et il les a appelés les groupes d'holonomie "exotiques" (voir la revue de synthèse [10]). La réalisation de ces groupes comme groupes d'holonomie a été faite ces dernières années. Nous mentionnons dans ce contexte les travaux de R. L. Bryant, S. Merkulov, L. Schwachhöfer [10], [16], [18], [22] et [23].

Malgré tous ces travaux, le cas des groupes d'holonomie indécomposables et non-irréductibles n'a été que peu abordé jusqu'à présent, et même la classification des espaces symétriques pseudo-riemanniens n'est pas terminée. Cette classification n'est faite que dans le cas lorentzien (signature $(1, m-1)$, voir M. Cahen et N. Wallach [14]) et dans le cas de la signature $(2, m-2)$, voir M. Cahen et M. Parker [12], [13] et [20].

L'auteur et L. Berard Bergery ont commencé l'étude des groupes d'holonomie indécomposables et non-irréductibles par le cas lorentzien, dans les articles [3] et [17]. Récemment, ils ont étudié le cas "nentre" de la signature (n, n) dans l'article [4]. Le but de ce papier est d'étendre les résultats de [3], [17] et [4] pour les variétés pseudo-riemanniennes de signature $(2, 2+n)$. Le résultat principal est la détermination d'une classe de sous-groupes connexes de $SO_0(2, 2+n)$ qui peuvent être holonomie d'une variété pseudo-riemannienne de signature $(2, 2+n)$ indécomposable non irréductible. Plus précisément, nous déterminons une classe de sous-groupes connexes de $SO_0(2, 2+n)$ qui ne laissent invariant aucun sous-espace non trivial non dégénéré, mais qui laissent invariant au moins un plan totalement isotrope (Théorème 3.19). La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur le premier Lemme de Whitehead. Au paragraphe 4, on rappelle les résultats généraux de Cahen et Parker pour les espaces pseudo-riemanniens symétriques et on précise les groupes d'holonomie restreints possibles de ces espaces, en comparant aux résultats du Théorème 3.19 (voir les Propositions 4.21 et 4.24). Dans le paragraphe 5, on montre que si l'holonomie d'une métrique pseudo-riemannienne laisse invariant un sous-espace isotrope maximal, alors il existe un système de coordonnées dans lequel la métrique a une forme réduite (Théorème 5.27). Enfin, dans le paragraphe 6, en se basant sur les résultats du paragraphe 5, nous construisons d'autres exemples de métriques dont les groupes d'holonomie restreints sont non fermés (Théorème 6.28).

Je tiens à remercier les professeurs L. Berard Bergery et M. Sarih pour les nombreuses suggestions qu'ils m'ont faites au cours de ce travail.

2. Une classification algébrique

Nous rappelons d'abord les définitions principales.

Définition 1. Soit V un espace vectoriel réel, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré. Un sous-groupe connexe H de $GL(V)$ est dit *indécomposable* s'il ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de V . Une sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $gl(V)$ est dite indécomposable si son sous-groupe connexe associé l'est.

Définition 2. Une variété pseudo-riemannienne (M, g) connexe est dite *irréductible* si sa représentation d'holonomie restreint H_θ° en un point $\theta \in M$ est irréductible.

(M, g) est dite *indécomposable* si H_θ° ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $T_\theta M$.

Maintenant, soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe de dimension $m = n + 2r$, ($r \geq 2$) avec g de signature $(r, n + r)$. On suppose que (M, g) est indécomposable et non irréductible donc la représentation d'holonomie restreint H_θ° en un point $\theta \in M$ ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $T_\theta M$ et laisse invariant au moins un sous-espace propre E dégénéré de $T_\theta M$, donc aussi son orthogonal $E^\perp$ et l'intersection $E \cap E^\perp$ qui est un sous-espace totalement isotrope. Par conséquent $H = H_\theta^\circ$ est un sous-groupe connexe de $SO(T_\theta M, g_\theta)$ qui laisse invariant un sous-espace $\mathfrak{R}$ totalement isotrope de dimension $\leq r$, mais ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $T_\theta M$.

Nous classifions certaines possibilités de tels sous-groupes H qui laissent invariant un sous-espace totalement isotrope $\mathfrak{R}$ maximal. On notera $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H .

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et considérons sur $\mathbb{R}^m$ la 2-forme symétrique $\langle \rangle$ de signature $(r, n + r)$ définit par:

$$\langle (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \sum_{i=1}^r (x_i y_{n+r+i} + y_i x_{n+r+i}) - \sum_{j=r+1}^{r+n} x_j y_j.$$

Si on identifie $(T_\theta M, g_\theta)$ à $(\mathbb{R}^m, \langle \rangle)$, alors $\mathfrak{R} \simeq \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_r$. Et si on note $\mathbf{G}$ le sous-groupe connexe de $SO(\langle \rangle)$ engendré par les matrices qui laissent invariant $\mathfrak{R}$, alors l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $\mathbf{G}$ est formée par les matrices "bloc":

$$\begin{pmatrix} U & {}^t X & B \\ 0 & A & X \\ 0 & 0 & -{}^t U \end{pmatrix}$$

où $U \in gl(r, \mathbb{R})$, $X \in \mathbb{R}^{r \times n}$ vu comme une matrice (r, n) , tX sa matrice transposée, $A \in so(n, \mathbb{R})$, $B \in so(r, \mathbb{R})$. Pour simplifier les notations, on identifie l'élément ci-dessus à (U, A, X, B) et $\mathcal{G}$ à $\mathcal{U} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$, avec

$\mathcal{B} = \{(0, 0, 0, B) / B \in so(r, \mathbb{R})\}$ un idéal abélien de $\mathcal{G}$,

$\mathcal{N} \oplus \mathcal{B} = \{(0, 0, X, B) / X \in \mathbb{R}^{r \times n}, B \in so(r, \mathbb{R})\}$ un idéal de $\mathcal{G}$,

$\mathcal{K} = \{(0, A, 0, 0) / A \in so(n, \mathbb{R})\}$ une sous-algèbre isomorphe à $so(n, \mathbb{R})$ et

$\mathcal{U} = \{(U, 0, 0, 0) / U \in gl(r, \mathbb{R})\}$ une sous-algèbre isomorphe à $gl(r, \mathbb{R})$. Si on identifie $X = (X_1, \dots, X_r)$ à $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$, le crochet dans $\mathcal{G}$ est défini par:

$$(1) \quad [(U, A, X, B), (U', A', X', B')] = \left([U, U'], [A, A'], (\tilde{U} + \tilde{A})X' - (\tilde{U}' + \tilde{A}')X, ({}^tX X' - {}^tX' X) + (UB' - U'B) - {}^t(UB' - U'B) \right)$$

avec $\tilde{U}$ la matrice bloc $(u_{ij} I_n)_{1 \leq i, j \leq r}$ pour $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$, et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A \end{pmatrix}$, (où I_n est la matrice identité d'ordre n). Pour $r = 2$, on peut identifier $\mathcal{B}$ à $\mathbb{R}$ et (1) devient

$$(2) \quad [(U, A, X, b), (U', A', X', b')] = \left([U, U'], [A, A'], (\tilde{U} + \tilde{A})X' - (\tilde{U}' + \tilde{A}')X, b' \text{ trace } U - b \text{ trace } U' + \langle X, X' \rangle_J \right)$$

avec $\langle X, X' \rangle_J = \langle X_1, X'_2 \rangle - \langle X_2, X'_1 \rangle$ pour $X = (X_1, X_2)$ et $X' = (X'_1, X'_2)$.

Dans la suite, on considère les sous-algèbres $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ qui contiennent $\mathcal{B}$. L'idéal $\mathcal{B}$ n'est pas indécomposable, mais il a la propriété suivante:

Proposition 2.1. *Tout sous-espace propre non dégénéré E de $\mathbb{R}^m$ invariant par $\mathcal{B}$ est*

- a) *soit contenu dans l'orthogonal de $\mathfrak{R}$ (relativement à $\langle \rangle$)*
- b) *soit son orthogonal vérifie a).*

Autrement dit, on peut supposer que $E = \{(-{}^tV_0 Z, Z, 0), Z \in F\}$ avec F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $V_0 \in F^r$.

Corollaire 2.2. *Toute sous-algèbre qui contient $\mathcal{B}$ a la même propriété ci-dessus.*

Preuve de la proposition: On identifie $\mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{r*}$ avec $\mathbb{R}^{r*}$ le dual de $\mathbb{R}^r$ relativement à $\langle \cdot \rangle$. Soit E un sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^m$, invariant par $\mathcal{H}$. Soit $V = (T, Z, S) \in E$. Pour $(0, 0, 0, B) \in \mathcal{B}$, on a:

$$(3) \quad (0, 0, 0, B) \cdot V = (B \cdot S, 0, 0) \in E.$$

Supposons qu'il existe $(T_0, Z_0, S_0) \in E$ avec $S_0 = (t_1, \dots, t_r) \neq 0$. Alors il existe $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ telle que $t_\alpha \neq 0$. Pour $B = (b_{i,j})$ avec $b_{1,\alpha} = -b_{\alpha,1} = 1$ et les autres $b_{i,j} = 0$, d'après (3), on a $t_\alpha e_1 - t_1 e_\alpha \in E$. Donc il existe $V'_0 = (T'_0, Z'_0, S'_0) \in E$ isotrope tel que $\langle t_\alpha e_1 - t_1 e_\alpha, V'_0 \rangle = t_\alpha x_1 - t_1 x_\alpha = 1$ avec $S'_0 = (x_1, \dots, x_r)$. Or $x_\alpha e_1 - x_1 e_\alpha \in E$. D'où $e_1, e_{r+1-\alpha} \in E$. A nouveau pour e_1 , il existe $V_1 = (T_1, Z_1, S_1) \in E$, isotrope tel que $S_1 = (t_1, \dots, t_{r-1}, 1)$. En appliquant (3) à V_1 et avec des choix convenables de B , on trouve $\mathbb{R}^r \subset E$. D'où la proposition quitte à prendre $E^\perp$. ■

Corollaire 2.3. *Si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ qui contient l'idéal $\mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$, alors elle est indécomposable.*

Preuve: Il suffit de montrer que $\mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$ est indécomposable. Soit donc E un sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^m$ invariant par $\mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$. D'après la proposition, on peut supposer que $E = \{(-^t V_0 Z, Z, 0), Z \in F\}$. Pour $(0, 0, X, 0) \in \mathcal{N}$ et $(-^t V_0 Z, Z, 0) \in E$ on a:

$$(4) \quad (0, 0, X, 0) \cdot (-^t V_0 Z, Z, 0) = (^t X Z, 0, 0) \in E.$$

Ce qui implique que $^t X Z = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. D'où $E = 0$. ■

Maintenant, on cherche s'il y'a d'autres sous-algèbres $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ qui sont indécomposables.

Pour cela, on considère $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \cap (\mathcal{N} \oplus \mathcal{B})$. Puisque $\mathcal{B}$ est supposée contenue dans $\mathcal{H}$, on peut écrire $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$, où $\mathcal{P} = \mathcal{H} \cap \mathcal{N}$.

Nous supposons dans toute la suite que $\mathcal{P}$ est inclus strictement dans $\mathcal{N}$. On note $\mathcal{Q}$ l'orthogonal de $\mathcal{P}$ relativement au produit scalaire canonique de $\mathcal{N}$ identifié à $\mathbb{R}^{r \times n}$. $\mathcal{Q}$ est donc non nul. On note $\mathcal{P}_i$ la i -ème projection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}^n$ (pour $i = 1, \dots, r$) et R l'orthogonal de $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$ relativement au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \oplus R^r$ avec $\mathcal{Q}'$ l'orthogonal de R^r dans $\mathcal{Q}$, relativement au produit scalaire canonique de $\mathcal{N}$.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ qui contient $\mathcal{B}$. Alors si $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}$ est indécomposable. Et si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, c'est à dire $\mathcal{H} \subset \mathcal{B} \oplus \mathcal{N}$ cette condition est nécessaire et suffisante.*

Preuve: Soit $E = \{(-{}^tV_0Z, Z, 0), Z \in F\}$ un sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^m$ invariant par $\mathcal{H}$, avec F un sous-espace non nul de $\mathbb{R}^n$ et $V_0 \in F^r$. Pour $(0, 0, X, 0) \in \mathcal{P}$, on a:

$$(0, 0, X, 0) \cdot (-{}^tV_0 \cdot Z, Z, 0) = ({}^tX \cdot Z, 0, 0) \in E.$$

Ce qui implique que ${}^tX_i \cdot Z = 0$ pour $X = (X_1, \dots, X_r)$. C'est à dire Z est orthogonal à $\mathcal{P}_i$, donc aussi à $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$. Par suite $E = 0$.

Maintenant, si $\mathcal{H} \subset \mathcal{B} \oplus \mathcal{N}$ et si $\mathcal{H}$ est indécomposable, alors nécessairement $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r = \mathbb{R}^n$. Sinon $\{(0, Z, 0), Z \in (\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r)^\perp\}$ est un sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^m$ $\mathcal{H}$ -invariant. ■

Nous supposons désormais que l'espace $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$ est inclus strictement dans $\mathbb{R}^n$ et on note R l'orthogonal de $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$ dans $\mathbb{R}^n$ relativement au produit scalaire ordinaire. Pour chercher d'autres possibilités de $\mathcal{H}$, on a besoin de certaines notations.

Notations. On note $\mathcal{U}'$ (resp. $\mathcal{K}'$) la projection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{U}$ (resp. sur $\mathcal{K}$).

On pose $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{K}' \text{ tel que } (0, A, X, 0) \in \mathcal{H}\}$, et on note $\mathcal{K}_1$ (resp. $\mathcal{K}_2$) la sous-algèbre de $\mathcal{K}$ qui laisse invariant $R^\perp$ (resp. R) et qui annule R (resp. $R^\perp$). On note $\mathcal{D}_2$ la projection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{K}_2$. On note aussi $\mathcal{D}'$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{K}'$ relativement à la forme de Killing de $\mathcal{K}$. Par définition, il existe une application linéaire $\varphi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{D}'$.

On note $\mathcal{L} = \{(U, A, X, 0) \in \mathcal{H} / X \in \mathcal{Q}\}$ et $\mathcal{L}_1 = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{K}'$. Par définition, il existe deux applications linéaires $\psi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{Q}'$ et $\phi : \mathcal{L}_1 \rightarrow R^r$ telles que si on pose $\omega = \psi + \phi$, $\mathcal{L} = \{(U, A, \omega(U, A), 0) \in \mathcal{H} \text{ tel que } (U, A) \in \mathcal{L}_1\}$. Clairement, $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}_D$ avec $\mathcal{L}' = \{(U, \varphi(U), \omega(U, \varphi(U)), 0) \in \mathcal{H} \text{ tel que } U \in \mathcal{U}'\}$ et $\mathcal{L}_D = \{(0, A, \omega(0, A), 0) \in \mathcal{H} \text{ tel que } A \in \mathcal{D}\}$.

Une première condition nécessaire pour que $\mathcal{H}$ soit indécomposable est la suivante:

Proposition 2.5. *Si $\mathcal{H}$ est indécomposable, alors tout élément non nul du centre de $\mathcal{U}'$ admet au moins une valeur propre imaginaire pure ou nulle.*

Preuve:

Lemme 2.6. *Si $\mathcal{K}'$ laisse invariant un sous-espace $F \neq 0$ de R et s'il existe un $V_0 \in F^r$ tels que $\phi_F(U, A) = (\tilde{U} + \tilde{A})_F \cdot V_0$, pour tout $(U, A) \in \mathcal{L}_1$ avec $\phi_F(U, A)$ la projection de $\phi(U, A)$ sur F^r et $(\tilde{U} + \tilde{A})_F$ la restriction de $(\tilde{U} + \tilde{A})$ à F^r .*

Alors le sous-espace propre $E = \{(-{}^tV_0Z, Z, 0)/Z \in F\}$ est $\mathcal{H}$ -invariant et par suite $\mathcal{H}$ est décomposable.

Preuve du Lemme 2.6: L'image de E par $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ est nulle. En plus,

$$\begin{aligned} (U, A, \omega(U, A), 0) \cdot (-{}^tV_0Z, Z, 0) &= (U(-{}^tV_0Z) + {}^t\omega(U, A) \cdot Z, AZ, 0) \\ &= (U(-{}^tV_0Z) + {}^t\phi_F(U, A) \cdot Z, AZ, 0) \\ &= \left({}^t(-\tilde{U}V_0 + (\tilde{U} + \tilde{A})V_0)Z, AZ, 0 \right) \\ &= (-{}^tV_0(AZ), AZ, 0). \end{aligned}$$

Fin de la preuve de la Proposition 2.5: Supposons que le centre $\mathcal{C}(\mathcal{U}')$ de $\mathcal{U}'$ contient un élément U_0 dont les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes non nulles. Soit $(U_0, A_0, X_0) \in \mathcal{H}$ avec $X_0 \in \mathcal{Q}$. $\tilde{U}_0$ commute avec $\tilde{A}_0$, en plus A_0 et $\tilde{A}_0$ sont anti-symétriques. Donc si on note P_{adA_0} le polynôme caractéristique de adA_0 , alors $\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0$ et $P_{adA_0}(\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0)$ sont deux matrices inversibles. D'après (1), pour (U, A) et $(U', A') \in \mathcal{L}_1$, ϕ satisfait:

$$(5) \quad \phi([U, U'], [A, A']) = (\tilde{U} + \tilde{A})\phi(U', A') - (\tilde{U}' + \tilde{A}')\phi(U, A).$$

D'où

$$\phi(0, adA_0 \cdot A) = (\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0)\phi(U, A) - (\tilde{U} + \tilde{A})X_1,$$

avec X_1 la projection de X_0 sur R^r .

On pose $\theta(U, A) = \phi(U, A) - (\tilde{U} + \tilde{A})X_2$, avec $X_2 = (\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0)^{-1}X_1$. De (5), on déduit $\theta(0, ad^m A_0 \cdot A) = (\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0)^m \cdot \theta(U, A)$, pour tout m entier positif.

Ce qui implique

$$\theta(0, P_{adA_0} \cdot (adA_0) \cdot A) = P_{adA_0}(\tilde{U}_0 + \tilde{A}_0)\theta(U, A)$$

donc $\theta(U, A) = 0$. Ainsi $\phi(U, A) = (\tilde{U} + \tilde{A})X_1$. D'après le Lemme 2.6, $\mathcal{H}$ est donc décomposable. Contradiction. ■

Une deuxième condition nécessaire pour que $\mathcal{H}$ soit indécomposable est la suivante:

Proposition 2.7. *Si $\mathcal{H}$ est indécomposable, alors nécessairement $\mathcal{D}_2 = 0$.*

Preuve:

Lemme 2.8 (Premier lemme de Whitehead). *Soit $\mathbf{K}$ une algèbre de Lie semi-simple, alors le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{K})$ de $\mathbf{K}$ est nul.*

Lemme 2.9 (Corollaire du Lemme 2.8). *Soit $\mathbf{K} \neq 0$ une sous-algèbre de $\mathfrak{so}(q, \mathbb{R})$. On note F_1 l'orthogonal de l'intersection des noyaux des éléments de $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_2$ la restriction de $\mathbf{K}$ à F_1 . Alors*

- a) *L'élément de Casimir $\mathbf{c}$ de $\mathbf{K}$ commute avec tout élément de $\mathbf{K}$. En plus $\mathbf{c} = \sum_i D_i^2$ avec (D_i) une base orthonormale de $\mathbf{K}$ relativement à la forme de Killing de $\mathfrak{so}(q, \mathbb{R})$.*
- b) *Si $\mathbf{K}$ est semi-simple ou commutative, l'élément de Casimir de $\mathbf{K}_2$ est inversible.*
- c) *Si $\theta : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}^q$ est un cocycle: $\theta([A, B]) = A\theta(B) - B\theta(A)$ pour tout $A, B \in \mathbf{K}$, alors c'est un cobord: il existe $V_0 \in F_1$ tel que $\theta_1(A) = A \cdot V_0$ avec $\theta_1(A)$ la projection de $\theta(A)$ sur F_1 .*

Preuve de la Proposition 2.7: On suppose maintenant que $\mathcal{D}_2 \neq 0$. De (1), pour $A \in \mathcal{D}$ et $U \in \mathcal{U}'$ on a:

$$\left(0, [A, \varphi(U)], \tilde{A}\omega(U, \varphi(U)) - (\tilde{U} + \widetilde{\varphi(\tilde{U})})\omega(0, A), 0\right) \in \mathcal{H}.$$

Ce qui implique que $\mathcal{D}$ est un idéal de $\mathcal{K}'$ et donc $\mathcal{D}'$ aussi. Par suite φ et ω satisfaisaient

$$[A, \varphi(U)] = 0$$

et

$$\tilde{A}\omega(U, \varphi(U)) - (\tilde{U} + \widetilde{\varphi(\tilde{U})})\omega(0, A) \in \mathcal{P}.$$

Or R^r est invariant par $\tilde{A}$ et $(\tilde{U} + \widetilde{\varphi(\tilde{U})})$, donc

$$(6) \quad \tilde{A}\phi(U, \varphi(U)) = (\tilde{U} + \widetilde{\varphi(\tilde{U})})\phi(0, A).$$

De (1), ω satisfait aussi:

$$\omega(0, [A, B]) - \left(\tilde{A}\omega(0, B) - \tilde{B}\omega(0, A)\right) \in \mathcal{P}, \text{ pour } A, B \in \mathcal{D}.$$

Ce qui implique

$$\phi(0, [A, B]) = \tilde{A}\phi(0, B) - \tilde{B}\phi(0, A)$$

et donc pour chaque $i = 1, \dots, r$

$$(7) \quad \phi_i(0, [A, B]) = A\phi_i(0, B) - B\phi_i(0, A).$$

On pose $\mathcal{C}_1 = \mathcal{D} \cap \mathcal{K}_1$ et on note $\mathcal{C}_2$ l'orthogonal de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{K}'$ relativement à la forme de Killing de $\mathcal{K}$. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux idéaux de $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}_2$ est la projection de $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{K}_2$. En plus la projection $p : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}_2$ est un isomorphisme d'algèbre de Lie. On pose F_0 l'intersection des noyaux des éléments de $\mathcal{D}_2$, et F_1 l'orthogonal de F_0 dans R . Pour $A \in \mathcal{C}_2$, on pose $A_2 = p(A)$ qu'on peut identifier à sa restriction à F_1 . $\mathcal{D}_2$ est supposé $\neq 0$, donc $F_1 \neq 0$. Si on pose $\theta_i(A_2) = \phi_i(0, A)$, (7) implique, pour $A_2, A'_2 \in \mathcal{D}_2$:

$$\theta_i([A_2, A'_2]) = A_2\theta_i(A'_2) - A'_2\theta_i(A_2).$$

D'après le Lemme 2.8, il existe $V_i \in F_1$ tel que pour $A \in \mathcal{C}_2$, $\theta_{i,F_1}(A) = A \cdot V_i$, avec $\theta_{i,F_1}(A)$ la projection de $\theta_i(A)$ sur F_1 . D'où $\phi_{F_1}(0, A) = \widetilde{A}V_0$ avec $V_0 = (V_1, \dots, V_r) \in F_1^r$. De (6), on déduit: pour $U \in \mathcal{U}'$,

$$\widetilde{A}_2 \left(\phi_{F_1}(U, \varphi(U)) - (\widetilde{U} + \widetilde{\varphi(\widetilde{U})})V_0 \right) = 0.$$

Avec $\phi_{F_1}(U, \varphi(U))$ la projection de $\phi(U, \varphi(U))$ sur F_1^r . Du Lemme 2.9, on déduit $\phi_{F_1}(U, \varphi(U)) = (\widetilde{U} + \widetilde{\varphi(\widetilde{U})})V_0$. Puisque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux idéaux de $\mathcal{D}$, de (7), on obtient $\widetilde{A}\phi(0, B) = 0$, pour $A \in \mathcal{C}_2$ et $B \in \mathcal{C}_1$. Autrement dit, $\phi(0, B) \in F_0^r$. En vertu du Lemme 2.6, $\mathcal{H}$ est donc décomposable. Contradiction. ■

Remarque. $\mathcal{K} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$ est un idéal de $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H} \cap (\mathcal{K} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{B})$ est un idéal de $\mathcal{H}$.

De la Proposition 2.7 on déduit immédiatement

Corollaire 2.10. *Si on note ϕ_i les composantes de l'application ϕ , alors si $R = \phi_1(\mathcal{D}) + \dots + \phi_r(\mathcal{D})$, $\mathcal{H}$ est indécomposable et cette condition est nécessaire et suffisante si $\mathcal{L}_D = \mathcal{H}$. C'est à dire $\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$.*

Nous supposons désormais que l'espace $\phi_1(\mathcal{D}) + \dots + \phi_r(\mathcal{D})$ est inclus strictement dans R et on note R' son orthogonal dans R . Une autre condition nécessaire pour que $\mathcal{H}$ soit indécomposable est la suivante:

Proposition 2.11. *Si $R' \neq 0$ et si $\mathcal{H}$ est indécomposable, alors $\mathcal{U}'$ n'est pas semi-simple.*

Preuve: Supposons que $\mathcal{U}'$ est semi-simple. Soit $\varphi_2 : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{K}_2$ la projection de φ sur $\mathcal{K}_2$. φ_2 est une représentation. Donc $\varphi_2(\mathcal{U}')$ est semi-simple ou nulle. On note $\widetilde{U}'_R$ l'ensemble des matrices bloc $\widetilde{U}_R = (u_{ij} I_R)_{1 \leq i, j \leq r}$ avec $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in \mathcal{U}'$ et I_R la matrice identité de R . On pose $\mathcal{V} = \widetilde{U}'_R \oplus \varphi_2(\mathcal{U}')$. Puisque $\mathcal{U}'$ est semi-simple alors $\mathcal{V}$ l'est. On définit $\xi : \mathcal{V} \rightarrow R^r$ par $\xi(W) = \phi(U, \varphi(U))$ pour $W = \widetilde{U}_R + \varphi_2(U)$. Pour $W' = \widetilde{U}'_R + \varphi_2(U')$, on a : $[W, W'] = [\widetilde{U}, \widetilde{U}']_R + \varphi_2([U, U'])$, donc de (1), ξ satisfait

$$\xi([W, W']) = W\xi(W') - W'\xi(W).$$

D'après le Lemme 2.8, il existe $X_0 \in R^r$ telle que $\xi(W) = W \cdot X_0$. Soit $\phi(U, \varphi(U)) = (\widetilde{U}_R + \varphi_2(U)) \cdot X_0$. Et d'après (6) et la Proposition 2.7, $(\widetilde{U}_R + \varphi_2(U)) \cdot \phi(0, A) = 0$, pour $A \in \mathcal{D}$. Ce qui implique que R' est invariant par $\varphi_2(\mathcal{U}')$. Par conséquent, le sous espace-propre $\{(-{}^t X_0 Z, Z, 0) / Z \in R'\}$ est $\mathcal{H}$ -invariant. Absurde. ■

3. Cas de signature $(2, n+2)$

Maintenant, on se restreint au cas de type $(2, n+2)$ ($r = 2$) et on cherche les autres possibilités de $\mathcal{H}$ contenant l'idéal $\mathcal{B}$. On suppose toujours que $R' \neq 0$. En vertu des Propositions 2.5 et 2.11, on obtient

Proposition 3.12. *A une conjugaison près dans $gl(2, \mathbb{R})$, $\mathcal{U}'$ ne peut être que l'une des cas suivants:*

$so(2, \mathbb{R})$
 engendrée par S ,
 engendrée par N ,
 engendrée par N et S ,
 engendrée par N et T_μ ,
 avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\mu \neq 1$).

Preuve facile. ■

Attention. A une conjugaison près, la sous-algèbre engendrée par N et S et la sous-algèbre engendrée par N et T_0 sont égales. Mais vues comme traces respectivement de deux sous-algèbres $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de $\mathcal{H}$, elles sont différentes. En effet $\mathcal{H}_2$ annule une droite isotrope, alors que ce n'est pas le cas pour $\mathcal{H}_1$.

On regarde maintenant, pour chaque cas de la Proposition 3.12, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{H}$ soit indécomposable.

3.0.1. Cas où $\mathcal{U}' = so(2, \mathbb{R})$.

Dans ce cas $\mathcal{L}'$ est engendrée par $(J, A_0, X_0, 0)$ avec $A_0 = \varphi(J)$, $X_0 = \omega(J, \varphi(J)) = Y_0 + Z_0 \in \mathcal{Q}' \oplus R^2$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A une conjugaison près, on peut supposer que

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s J \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, s.$$

Si on note A_2 la restriction de A_0 à R' et $Sp(A_2)$ le spectre de A_2 , on a

Proposition 3.13. *$\mathcal{H}$ est indécomposable, si et seulement si, $Sp(A_2) = \{-i, +i\}$ et $A_2 Z_{1,F} \neq -Z_{2,F} \neq 0$ pour tout sous-espace F de R' invariant par A_2 . Avec i l'imaginaire pure et $Z_0 = (Z_1, Z_2)$, où $Z_{j,F}$ est la projection de Z_j sur F , pour $j = 1, 2$.*

Preuve: On suppose que $Sp(A_2) \neq \{-i, +i\}$, donc il existe $\lambda \neq \pm 1 \in \mathbb{R}$ telle que $\pm \lambda i \in Sp(A_2)$. Soit donc X_1 et X_2 deux vecteurs indépendantes de R' tels que $A_2 X_1 = -\lambda X_2$ et $A_2 X_2 = \lambda X_1$. Si on note F_0 le sous-espace engendré par X_1 et X_2 alors $(\tilde{J} + \tilde{A}_0)_{F_0}$ est inversible. D'après le Lemme 2.6, on en déduit que $\mathcal{H}$ est décomposable. Par suite $Sp(A_2) = \{-i, +i\}$. Si maintenant il existe un sous-espace $F_0 \neq 0$ de R' invariant par A_2 telle que $(\tilde{J} - \tilde{A}_0)Z_{0,F_0} = 0$, alors

$$(\tilde{J} + \tilde{A}_0)V_0 = Z_{0,F_0}, \quad \text{avec } V_0 = (-Z_{2,F_0}, 0)$$

et Z_{2,F_0} la deuxième composante de Z_{0,F_0} .

Inversement, si $\mathcal{H}$ laisse invariant un sous-espace propre $E = \{(-{}^t X_1 Z, Z, 0) / Z \in F_0 \subset R'\}$, on a:

$$\begin{aligned} (J, A_0, X_0, 0)^2 \cdot (-{}^t X_1 Z, Z, 0) \\ = ({}^t X_1 Z + J({}^t Z_{0,F_0} \cdot Z) + {}^t Z_{0,F_0} \cdot A_2 Z, -Z, 0) \in E. \end{aligned}$$

Ce qui implique $(\tilde{J} - \tilde{A}_0)Z_{0,F_0} = 0$. Impossible. ■

3.0.2. Cas où $\mathcal{U}'$ est engendrée par N .

$\mathcal{L}'$ est engendrée par $(N, A_N, X_N, 0)$ avec $A_N = \varphi(N)$, $X_N = \omega(N, \varphi(N)) = Y_N + Z_N \in \mathcal{Q}' \oplus R^2$.

Proposition 3.14. *Si on note A'_N la restriction de A_N à R' , Z'_N la projection de Z_N sur R'^2 et $Z'_{N,2}$ la deuxième composante de Z'_N , alors $A'_N = 0$. Et $\mathcal{H}$ est indécomposable si et seulement si $R' = \text{vect} \{Z'_{N,2}\}$.*

Preuve: Supposons que $A'_N \neq 0$. Donc si on note F l'orthogonal du noyau de A'_N dans R' , la restriction de A'_N à F^2 est inversible et $(\widetilde{N} + \widetilde{A_N})_F$ aussi. Impossible. D'où $A'_N = 0$. Maintenant, si l'orthogonal R'' de $\text{vect} \{Z'_{N,2}\}$ dans R' est $\neq 0$, alors $\mathcal{H}$ laisse invariant le sous-espace propre $\{(-^t V_0 Z, Z, 0), Z \in R''\}$ avec $V_0 = (0, -Z_{N,1})$ ($Z_{N,1}$ la première composante de Z_N). Inversement, si $\mathcal{H}$ laisse invariant un sous-espace propre $E = \{(-^t X_1 Z, Z, 0)/Z \in F\}$, alors $F \subset R'$ et $F \subset \{Z'_{N,2}\}^\perp$. D'où $F = 0$. ■

3.0.3. Cas où $\mathcal{U}'$ est engendrée par S .

$\mathcal{L}'$ est engendrée par $(S, A_S, X_S, 0)$ avec $A_S = \varphi(S)$, $X_S = \omega(S, \varphi(S)) = Y_S + Z_S \in \mathcal{Q}' \oplus R^2$. De (1), pour $A \in \mathcal{D}$, on a:

$$\phi([A_S, A]) = (\widetilde{S} + \widetilde{A_S})\phi(A).$$

Donc

$$\phi_1([A_S, A]) = (I + A_S) \cdot \phi_1(A) \text{ et } \phi_2([A_S, A]) = A_S \cdot \phi_2(A).$$

Ce qui implique $\phi_1(A) = 0$. Avec la même démonstration de la Proposition 3.14, on obtient

Proposition 3.15. $\phi_1(\mathcal{D}) = 0$, $A'_S = 0$ et $\mathcal{H}$ est indécomposable, si et seulement si, $R' = \text{vect} \{Z'_{S,2}\}$. Avec A'_S la restriction de A_S à R' , Z'_S la projection de Z_S sur R'^2 et $Z'_{S,2}$ la deuxième composante de Z'_S .

3.0.4. Cas où $\mathcal{U}'$ est engendrée par N et S .

$\mathcal{L}'$ est engendrée par $(N, A_N, X_N, 0)$ et $(S, A_S, X_S, 0)$. Pour $A \in \mathcal{D}$, ϕ vérifie:

$$\begin{cases} \phi_1(A) = 0 \\ \phi([A_N, A]) = (\widetilde{N} + \widetilde{A_N})\phi(A). \end{cases}$$

Ce qui implique

$$(8) \quad \phi(\mathcal{D}) = 0.$$

Autrement dit, $R = R'$. On a aussi

$$(N, [A_S, A_N], (\widetilde{S} + \widetilde{A_S})X_N - (\widetilde{N} + \widetilde{A_N})X_S, 0) \in \mathcal{H}.$$

D'où

$$\left(0, [A_S, A_N] - A_N, (\tilde{S} + \widetilde{A_S} - I)X_N - (\tilde{N} + \widetilde{A_N})X_S, 0\right) \in \mathcal{H}.$$

Puisque $\mathcal{D}_2 = 0$, de (8) on a immédiatement $[A'_S, A'_N] = A'_N$ et $(\tilde{S} + \widetilde{A'_S} - I)Z_N = (\tilde{N} + \widetilde{A'_N})Z_S$. Or A'_S est antisymétrique, donc 0 est la seule valeur propre réelle de $\text{ad } A'_S$. Par suite

$$(9) \quad A'_N = 0 \text{ et } (\tilde{S} + \widetilde{A'_S} - I)Z_N = \tilde{N} \cdot Z_S.$$

Puisque $\tilde{N}$ et $\widetilde{A'_S}$ commutent on a aussi

$$(10) \quad (\tilde{S} + \widetilde{A'_S} - I)\tilde{N} = \tilde{N}(\tilde{S} + \widetilde{A'_S}).$$

Maintenant, on suppose que $A'_S \neq 0$, donc si on note F l'orthogonal du noyau de A'_S dans R , la restriction de A'_S à F^2 est inversible et $(\tilde{S} + \widetilde{A'_S})_F$ aussi. Soit $V_0 \in F^2$ tel que $(\tilde{S} + \widetilde{A'_S})_F V_0 = Z_{S,F}$. Or F^2 est invariant par $\tilde{S}$, $\tilde{N}$ et $\widetilde{A'_S}$, donc de (9) et (10) on en déduit $(\tilde{S} + \widetilde{A'_S} - I)_F \cdot (\tilde{N} \cdot V_0 - Z_{N,F}) = 0$. $(\tilde{S} + \widetilde{A'_S} - I)_F$ est inversible, par suite $\tilde{N} \cdot V_0 = Z_{N,F}$. Impossible. D'où

Proposition 3.16. $\phi(\mathcal{D}) = 0$ et $A'_N = A'_S = 0$. En plus $\mathcal{H}$ est indécomposable, si et seulement si, $R' = R = \text{vect} \{Z_{N,2}, Z_{S,2}\}$.

Preuve: Supposons que $R = \text{vect} \{Z_{N,2}, Z_{S,2}\}$. Si $\mathcal{H}$ laisse invariant un sous-espace propre $E = \{(-^t X_0 Z, Z, 0)/Z \in F \subset R\}$ alors,

$$(N, A_N, X_N, 0) \cdot (-^t X_0 Z, Z, 0) = (^t(Z_N - \tilde{N} \cdot X_0)Z, -Z, 0) \in E.$$

D'où $^t(Z_N - \tilde{N} \cdot X_0)Z = 0$. On a de même $^t(Z_S - \tilde{S} \cdot X_0)Z = 0$. Ce qui implique que Z est orthogonal à $Z_{N,2}$ et $Z_{S,2}$. Inversement, si on pose $F_0 = \{Z_{N,2}, Z_{S,2}\}^\perp \cap R \neq 0$, $\{(-^t(Z_{S,2}, Z_{N,2})Z, Z, 0)/Z \in F_0\}$ est $\mathcal{H}$ -invariant. ■

3.0.5. Cas où $\mathcal{U}'$ est engendrée par N et T_μ .

$\mathcal{L}'$ est engendrée par $(N, A_N, X_N, 0)$ et $(T_\mu, A_T, X_T, 0)$ avec $A_T = \varphi(T_\mu)$, $X_T = \omega(T_\mu, \varphi(T_\mu)) = Y_T + Z_T \in \mathcal{Q}' \oplus R^2$. Si on pose $\lambda = \mu - 1 \neq 0$, on a:

$$(11) \quad \left(0, [A_T, A_N] - \lambda A_N, (\widetilde{T_\mu} + \widetilde{A_T} - \lambda I)X_N - (\tilde{N} + \widetilde{A_N})X_T, 0\right) \in \mathcal{H}.$$

Ce qui implique $[A'_T, A'_N] = \lambda A'_N$ avec A'_T la restriction de A_T à R . D'où $A'_N = 0$. On a aussi pour $A \in \mathcal{D}$, $\phi_2(A) = 0$, $\phi_1([A_N, A]) = A_N \cdot \phi(A)$, $\phi_1([A_T, A]) = (\mu I + A_T)\phi_1(A)$ et $\phi_2([A_T, A]) = (I + A_T)\phi_2(A)$. Maintenant nous distinguerons deux cas:

(a) Si $\mu \neq 0$.

On a donc $\phi(\mathcal{D}) = 0$ et $(\widetilde{T}_\mu + \widetilde{A}'_T - \lambda I)Z_N = \widetilde{N} \cdot Z_T$. En plus $(\widetilde{T}_\mu + \widetilde{A}'_T - \lambda I)\widetilde{N} = \widetilde{N}(\widetilde{T}_\mu + \widetilde{A}'_T)$. D'où $(I + A'_T)Z_{N,1} = Z_{N,2}$ et $((2 - \mu)I + A'_N)Z_{N,2} = 0$. Avec la même démonstration de la Proposition 3.16 on obtient

Proposition 3.17. *Si $\mu \neq 0$, alors $A'_N = A'_T = 0$, $\phi(\mathcal{D}) = 0$, $Z_{N,1} = Z_{N,2}$ et $Z_{N,2} = 0$ si $\mu = 2$. En plus $\mathcal{H}$ est indécomposable, si et seulement si, $R' = R = \text{vect}\{Z_{N,2}\}$.*

(b) Si $\mu = 0$.

Puisque $\phi_2(A) = 0$, alors la deuxième composante de $(\widetilde{T} + \widetilde{A}_T - \lambda I)Z_N - \widetilde{N} \cdot Z_T$ est nulle ($T = T_0$), d'où $Z_{N,2} = 0$. Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ laisse invariant un sous-espace propre $E = \{(-{}^tV_0Z, Z, 0)/Z \in F\}$ alors $F \subset R'$ et

$$\begin{cases} {}^t((\widetilde{T} + \widetilde{A}_T)V_0 - Z_T)Z = 0 \\ {}^t(\widetilde{N} \cdot V_0 - Z_N)Z = 0. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$(12) \quad \begin{cases} {}^t(A_TV_1 - Z_{T,1})Z = 0 \\ {}^t((I + A'_T)V_2 - Z_{T,2})Z = 0 \\ {}^t(V_2 - Z_{N,1})Z = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique que la projection de $(I + A'_T)Z_{N,1} - Z_{T,2}$ sur F est nulle. Donc si pour tout sous espace F de R' stable par A'_T , la projection de $(I + A'_T)Z_{N,1} - Z_{T,2}$ sur F est non nulle, alors $\mathcal{H}$ est indécomposable. Supposons maintenant qu'il existe un sous-espace $F_0 \neq 0$ de R' stable par A'_T , telle que la projection de $(I + A'_T)Z_{N,1} - Z_{T,2}$ sur F_0 est nulle. On remarque que la restriction A_{T,F_0} de A'_T à F_0 est nulle (si non $\mathcal{H}$ laisse invariant $\{(-{}^tV_0Z, Z, 0)/Z \in F_1\}$ avec $V_0 = ((A_{T,F_1})^{-1}Z_{T,1,F_1}, Z_{N,1,F_1})$ ($Z_{T,1,F_1}$ est la projection de $Z_{T,1}$ sur F_1 etc). Par suite $Z_{N,1,F_0} = Z_{T,2,F_0}$. On obtient donc

Proposition 3.18. *Si $\mu = 0$, alors $A'_N = 0$, $\phi_2(\mathcal{D}) = 0$, $Z_{N,2} = 0$ et*

Ou bien pour tout sous-espace $F \neq 0$ de R' stable par A'_T , la projection de $(I + A'_T)Z'_{N,1} - Z'_{T,2}$ sur F est non nulle.

Ou bien il existe un sous-espace $F_0 \neq 0$ de R' stable par A'_T telle que la projection de $(I + A'_T)Z'_{N,1} - Z'_{T,2}$ sur F_0 est nulle. Et on a $A_{T,F_0} = 0$. En plus $\mathcal{H}$ est indécomposable, si et seulement si, $F_0 = \text{vect} \{Z'_{T,1,F_0}\}$.

Des Propositions 2.1, ..., 3.18 on obtient

Théorème 3.19. *Pour $r = 2$, soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie d'un sous-groupe H de $SO_0(\langle \rangle)$ indécomposable, qui laisse invariant $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ et qui contient l'idéal $\mathcal{B}$. Alors H est dans $\mathbf{G}$ et*

- 1) *Ou bien $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ avec $\mathcal{P}$ un sous-espace de $\mathcal{N}$ vérifiant $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$ où $\mathcal{P}_i$ est la i -ème projection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}^n$ pour $i = 1, 2$.*

Ou bien on a l'un des cas suivants:

- 2) *Il existe une sous-algèbre $\mathcal{U}'$ de $gl(n, \mathbb{R})$, une décomposition non triviale $n = p + q$ telle que $\mathcal{H}$ contient un sous-espace $\mathcal{P}$ de $\mathcal{N}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^p$ et il existe une sous algèbre commutative $\mathcal{C}$ de $so(p, \mathbb{R})$, une sous-algèbre semi-simple $\mathcal{D}$ de $so(p, \mathbb{R})$ qui commute avec $\mathcal{C}$ et six applications linéaires $\varphi_1 : \mathcal{U}' \rightarrow so(p, \mathbb{R})$, $\varphi_2 : \mathcal{U}' \rightarrow so(q, \mathbb{R})$, $\psi : \mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$, $\xi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$, $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$, et $\eta : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$ telles qu'a une conjugaison près dans $\mathcal{G}$, on a l'un des sous cas suivants:*

2.1) $\mathcal{H}$ est formée par les matrices "bloc"

$$\begin{pmatrix} U & {}^t(Y + \psi(A + B) + \xi(U)) & {}^t(\phi(A) + \eta(U)) & \delta J \\ 0 & A + B + \varphi_1(U) & 0 & Y + \psi(A + B) + \xi(U) \\ 0 & 0 & \varphi_2(U) & \phi(A) + \eta(U) \\ 0 & 0 & 0 & -{}^tU \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{P}$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Avec $\phi_1(\mathcal{C}) + \phi_2(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^q$ où $\phi_1(\mathcal{C})$ et $\phi_2(\mathcal{C})$ sont les composantes de $\phi(\mathcal{C})$ et tout élément non nul du centre de $\mathcal{U}'$ admet au moins une valeur propre imaginaire pure ou nulle.

2.2) Il existe une autre décomposition $q = q_1 + q_2$, où $q_2 \neq 0$, $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2q_1}$ et $\mathcal{H}$ est formée par les matrices “bloc”

$$\begin{pmatrix} \alpha U_0 & {}^t(Y + \psi(A+B) + \alpha Y_0) & {}^t(\phi(A) + \alpha Z_0) & \alpha {}^t Z'_0 & \delta J \\ 0 & A + B + \alpha A_0 & 0 & 0 & Y + \psi(A+B) + \alpha Y_0 \\ 0 & 0 & \alpha B_0 & 0 & \phi(A) + \alpha Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha C_0 & \alpha Z'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha {}^t U_0 \end{pmatrix}$$

avec $\phi_1(\mathcal{C}) + \phi_2(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^{q_1}$ et

2.2.1) Ou bien $U_0 = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 J & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \varepsilon_l J \end{pmatrix}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ pour $k = 1, \dots, l = \frac{q_2}{2}$ et $C_0 Z'_{1,F} \neq Z'_{2,F}$ pour tout sous-espace F de $\mathbb{R}^{q_1}$ invariant par C_0 . Avec $Z'_0 = (Z'_1, Z'_2)$, $Z'_{j,F}$ la projection de Z'_j sur F , pour $j = 1, 2$.

2.2.2) Ou bien $U_0 = N$, $C_0 = 0$, $q_2 = 1$ et $Z'_0 = (a, b)$ avec $b \neq 0$ ($N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

2.2.3) Ou bien $U_0 = S$, $C_0 = 0$, $\phi_1(\mathcal{C}) = 0$ et $Z'_0 = (a, b)$ avec $b \neq 0$ ($S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

2.3) $q = 1$ ou 2 et $\mathcal{H}$ est formée par les matrices “bloc”

$$\begin{pmatrix} \alpha U_0 + \beta U'_0 & {}^t(Y + \psi(A+B) + \alpha Y_0 + \beta Y'_0) & {}^t(\alpha Z_0 + \beta Z'_0) & \delta J \\ 0 & A + B + \alpha A_0 + \beta B_0 & 0 & Y + \psi(A+B) + \alpha Y_0 + \beta Y'_0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha Z_0 + \beta Z'_0 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^t(\alpha U_0 + \beta U'_0) \end{pmatrix}$$

avec $Z_0, Z'_0 \in \mathbb{R}^{2q}$ et

2.3.1) Ou bien $U_0 = N$, $U'_0 = S$ et $0 \times \mathbb{R}^q$ est engendré par $Z_{0,2}$ et $Z'_{0,2}$.

2.3.2) Ou bien $U_0 = N$, $U'_0 = T_\mu$ ($\mu \neq 0, 1, 2$) et si $Z_0 = (a, b)$, $Z'_0 = (c, a)$ avec $a \neq 0$ ($T_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

2.4) $\mathcal{H}$ est formée par les matrices “bloc”

$$\begin{pmatrix} \alpha N + \beta T_0 & {}^t(\psi(A+B) + Y + \alpha Y_N + \beta Y_T) & {}^t(\phi(A) + \alpha Z_N + \beta Z_T) & {}^t(\alpha Z'_N + \beta Z'_T) & \delta J \\ 0 & A+B + \alpha A_N + \beta A_T & 0 & 0 & \psi(A+B) + Y + \alpha Y_N + \beta Y_T \\ 0 & 0 & \alpha B_N + \beta B_T & 0 & \phi(A) + \alpha Z_N + \beta Z_T \\ 0 & 0 & 0 & \beta C_T & \alpha Z'_N + \beta Z'_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^t(\alpha N + \beta T_0) \end{pmatrix}$$

$$\phi_2(\mathcal{C}) = 0, \phi_2(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^q, Z'_{N,2} = 0 \text{ et}$$

2.4.1) Ou bien pour tout sous-espace $F \neq 0$ de $\mathbb{R}e_{s+2} + \dots + \mathbb{R}e_{n+2}$ stable par C_T la projection de $(I + C_T)Z'_{N,1} - Z'_{T,2}$ sur F est non nulle ($s = n - q_2 + 1$).

2.4.2) Ou bien $Z'_{N,1}$ et $Z'_{T,2}$ ont la même $(n+2)$ -ième coordonnée et la $(n+2)$ -ième coordonnée de $Z'_{T,1}$ est non nulle. En plus

$$C_T = \begin{pmatrix} C'_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $C'_T \in gl(q_2 - 1, \mathbb{R})$ et la projection sur F' de $(I + C_T)Z'_{N,1} - Z'_{T,2}$ est non nulle pour tout sous espace $F' \neq 0$ de $\mathbb{R}e_{s+2} + \dots + \mathbb{R}e_{n+1}$ stable par C'_T .

Remarque. La réalisation géométrique d'un groupe comme groupe d'holonomie d'une variété affine est l'étape la plus difficile du problème d'holonomie. Pour le cas des variétés irréductibles, il a fallu attendre plus que trente ans pour réaliser la liste de M. Berger (voir [5]). Malheureusement, la plus part des techniques utilisées ne sont valables que pour le cas irréductible. Ce qui nécessite des techniques différentes pour la réalisation de la liste du Théorème 3.19. Mais au moins localement, en utilisant le Théorème d'Ambrose-Singer et le Théorème 5.27 qui donne un système de coordonnées adapté à notre holonomie, on arrive à réaliser certains groupes de la liste du Théorème 3.19 (voir le paragraphe 6).

4. Cas des espaces pseudo-riemanniens symétriques

Dans ce paragraphe, on fait quelques rappels sur les espaces pseudo-riemanniens symétriques.

Soit (M, g) un espace pseudo-riemannien symétrique connexe indécomposable et non irréductible. Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre du groupe des transvections de (M, g) , σ la différentielle de la conjugaison par la symétrie s_θ (θ un point de base de M) et η l'extension à $\mathcal{L}$ de la 2-forme symétrique sur $T_\theta M$ induite par g_θ . Si on pose $\mathcal{L}' = \{X \in \mathcal{L} / \sigma X = X\}$ et $\mathcal{L}'' = \{X \in \mathcal{L} / \sigma X = -X\}$, alors $\mathcal{L}''$ est isomorphe à $T_\theta M$ et on a: $\mathcal{L}' = [\mathcal{L}'', \mathcal{L}'']$. L'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de l'holonomie de (M, g) est la représentation fidèle de $\text{ad}\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}''$. Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{L}$ est donné par (voir [13, ch. 1, Lemme 1]):

$$(13) \quad \mathcal{Z} = \{X \in \mathcal{L}' \text{ tel que } \mathcal{H} \cdot X = 0\} = [\mathcal{L}', \mathcal{L}''] \cap [\mathcal{L}', \mathcal{L}'']^\perp.$$

(M, g) est supposée indécomposable donc $\mathcal{Z}$ est totalement isotrope ou nul. D'autre part, on a:

Proposition 4.20 ([13]). *$\mathcal{L}$ est résoluble si et seulement si la représentation d'isotropie de $\mathcal{H}$ est nilpotente. Et $\mathcal{L}$ est semi-simple si et seulement si la représentation d'isotropie de $\mathcal{H}$ est complètement réductible.*

M. Berger a donné dans [6] la liste complète des espaces pseudo-riemanniens symétriques lorsque la représentation d'holonomie est complètement réductible. Le cas où $\mathcal{L}$ n'est ni semi-simple ni résoluble a été étudié par M. Cahen et M. Parker [13] (en signature quelconque). En particulier, ils ont donné une classification complète en dimension ≤ 7 . Pour le cas de la signature $(2, 2+n)$, M. Parker a donné une classification complète dans [20]. Enfin, le cas où L est résoluble a également été étudié par Cahen et Parker dans [12], avec une classification complète du cas de signature $(2, 2+n)$. Le cas de signature $(2, 2+n)$ est donc contenu dans ces classifications.

Dans ce qui suit, lorsque L n'est pas semi-simple, on précise simplement, par rapport aux notations du Théorème 3.19 les possibilités du groupe d'holonomie restreint de tout espace pseudo-riemannien symétrique de signature $(2, 2+n)$ indécomposable non irréductible. Et on donnera des exemples de ces espaces. Cependant, pour faciliter la lecture de cet article, on rappellera quelques détails de ces classifications dans notre cas particulier.

On suppose aussi que le groupe de transvections de (M, g) est non semi-simple et on distinguera deux cas:

Cas où $\mathcal{L}$ est résoluble.

$\mathcal{H}$ est donc nilpotente et $\mathcal{Z} \neq 0$.

Proposition 4.21. *À un isomorphisme près, l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ ne peut être que l'un des cas suivants:*

- a) *Si $\mathcal{Z}$ est de dimension 1, $\mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$.
Si $\mathcal{Z}$ est de dimension 2,*
- b) *Ou bien $\mathcal{U}' \oplus \mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{U}' \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ où $\mathcal{U}' \in \{\mathbb{R}S, \mathbb{R}N\}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$.*
- c) *Ou bien*

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha U_0 & {}^t Y & \alpha {}^t Z_0 & \delta J \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & \alpha Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha {}^t U_0 \end{pmatrix}, \alpha, \delta \in \mathbb{R}, Y \in P' \right\}$$

avec $U_0 = S$ ou N , $Z_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ où $b \neq 0$ et P' un sous-espace de $\mathbb{R}^{2n-2}$.

Preuve: D'après (13), on peut écrire $[\mathcal{L}', \mathcal{L}''] = \mathcal{Z} \oplus W$, avec W non dégénéré vérifiant $[\mathcal{L}', W] \subset \mathcal{Z}$, $[W, W] = 0$ et $\mathcal{L}'' = \mathcal{Z} \oplus W \oplus \mathcal{Z}^*$ où $\mathcal{Z}^*$ est le dual de $\mathcal{Z}$ relativement à η . Si $\mathcal{Z}$ est maximal, à un isomorphisme près, on peut supposer $\mathcal{Z} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\mathcal{Z}^* = \mathbb{R}e_{n+3} \oplus \mathbb{R}e_{n+4}$ et $W = \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{n+2}$. Donc, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ avec $\mathcal{U}' = 0$. D'où d'après le Théoreme 3.17, $\mathcal{H}$ ne peut être que de type 1 ou 2.1. Si $\mathcal{H}$ est de type 1, elle contient $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$ et puisque $\mathcal{H}$ est nilpotente, il existe un entier $s \neq 0$ tel que pour $(0, A, 0, 0) \in \mathcal{K}'$ et $(0, 0, X, 0) \in \mathcal{P}$, d'après (2), on a:

$$ad^s(0, A, 0, 0) \cdot (0, 0, X, 0) = (0, 0, \tilde{A}^s X, 0) = 0.$$

Ce qui implique que $A^s \mathcal{P}_1 = A^s \mathcal{P}_2 = 0$. Or $\mathcal{K}'$ est une sous algèbre nilpotente de $so(n)$, donc elle est commutative. D'après ce qui précède, on en déduit $\mathcal{K}' = 0$.

Si $\mathcal{H}$ est de type 2.1, elle contient $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^p$ et il existe un entier $s \neq 0$ tels que:

$$ad^s(0, A, \omega(A), 0) \cdot (0, 0, X, 0) = (0, 0, \tilde{A}^s X, \langle \omega(A), \tilde{A}^{s-1} X \rangle_J) = 0$$

et pour $(0, A, \omega(A), 0) \in \mathcal{H}$ avec $A \in \mathcal{K}' \subset so(p)$ et $(0, 0, X, 0) \in \mathcal{P}$. On en déduit donc $\mathcal{K}' = 0$. Maintenant, si $\mathcal{Z}$ est de dimension 1, à un isomorphisme près, ou bien $\mathcal{Z} = \mathbb{R}e_1$, $\mathcal{Z}^* = \mathbb{R}e_{n+3}$ et $W = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{n+2} \oplus \mathbb{R}e_{n+4}$, donc $\mathcal{U}' = \mathbb{R}N$. Ou bien $\mathcal{Z} = \mathbb{R}e_2$, $\mathcal{Z}^* = \mathbb{R}e_{n+4}$ et $W = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{n+2} \oplus \mathbb{R}e_{n+3}$, donc $\mathcal{U}' = \mathbb{R}S$. Par conséquent $\mathcal{H}$ est de type 1 ou 2.1 ou 2.2.2 ou 2.2.3. De la même façon que ci-dessus, on montre que $\mathcal{K}' = 0$. ■

Cas où $\mathcal{L}$ n'est ni semi-simple ni résoluble.

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ une décomposition de Levi de $\mathcal{L}$ invariante par σ , avec $\mathcal{S}$ sa partie semi-simple et $\mathcal{R}$ son radical. On peut donc écrire

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_R \oplus \mathcal{L}'_S \oplus \mathcal{L}''_R \oplus \mathcal{L}''_S,$$

avec $\mathcal{L}'_R = \mathcal{L}' \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{L}'_S = \mathcal{L}' \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{L}''_R = \mathcal{L}'' \cap \mathcal{R}$, et $\mathcal{L}''_S = \mathcal{L}'' \cap \mathcal{S}$.

Proposition 4.22 (voir [13, Théorème 1.1, ch. 2]). $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}''_R \oplus \mathcal{L}''_S = X \oplus W \oplus \mathcal{L}''_S$ avec $X = \mathcal{L}''_R \cap (\mathcal{L}''_R)^\perp$ le dual de $\mathcal{L}''_S$ relativement à η et $W = \mathcal{L}'' \cap (X \oplus \mathcal{L}''_S)^\perp$ non dégénéré.

Proposition 4.23 (voir [13, Corollaire 1.7, ch. 2]). *Tout espace symétrique (M, g) de signature $(2, 2+n)$ admet “une multiplication minimale”, c’est à dire $[[\mathcal{L}''_R, \mathcal{L}''_R], \mathcal{L}''_R] = 0$, et on a :*

- a) *Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{L}$ est nul.*
- b) *$\mathcal{S}$ est de dimension 3.*
- c) *La restriction de η à W est définie négative.*
- d) *$[\mathcal{L}'_R, W] \subset X$.*

On en déduit donc que X et $\mathcal{L}''_S$ sont de dimension 2 et que $\mathcal{L}'_S$ est de dimension 1. Par conséquent, à un isomorphisme près, $X = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\mathcal{L}''_S = \mathbb{R}e_{n+3} \oplus \mathbb{R}e_{n+4}$ et $W = \mathbb{R}e_3 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_{n+2}$. D’où, $\mathcal{H} = \text{ad}\mathcal{L}'_S \oplus \text{ad}\mathcal{L}'_R \subset \mathcal{G}$ et on a $\text{ad}\mathcal{L}'_R \subset \mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$. Et puisque $[\mathcal{L}'_S, \mathcal{L}''_S] \subset \mathcal{L}''_S$, et $\mathcal{Z} = 0$, alors $\text{ad}\mathcal{L}'_S$ est une droite engendrée par $(U_0, 0, 0, 0)$ avec U_0 inversible. On obtient donc

Proposition 4.24. *L’algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de l’holonomie d’un espace symétrique connexe de type $(2, n+2)$ à groupe de transvections $\mathcal{L}$ non semi-simple et non résoluble ne peut être à un isomorphisme près, que incluse dans $\mathcal{U}' \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ où $\mathcal{U}'$ est engendrée par une matrice inversible U_0 et $\mathcal{P}$ vérifiant $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$.*

4.1. Exemples.

Soit (M, g) un espace symétrique connexe de signature $(2, n+2)$, indécomposable et non irréductible. On note R son tenseur de courbure. On sait que pour θ un point de M , R est défini en θ par $R(X, Y) = -\text{ad}[X, Y]$ pour $X, Y \in T_\theta M$.

Nous donnerons dans la suite deux exemples d’espaces symétriques indécomposables et non irréductibles qui sont totalement caractérisés par leurs groupes d’holonomie restreints.

Exemple 1. Avec les mêmes notations ci-dessus, nous supposons que le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{L}$ est maximal. En vertu de la Proposition 4.20-a, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ avec $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n$. Nous supposons en plus que $\mathcal{P}_2 = 0$ et $\mathcal{H} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$. Donc les seuls crochets non nuls dans $\mathcal{L}'$ sont $Y = [e_{n+3}, e_{n+4}]$, $U_i = [e_{n+3}, e_i]$ ($i = 3, \dots, n+2$). Ce qui implique $\mathcal{L}'$ est une sous-algèbre commutative, engendrée par $\{Y, U_i\}$. Si on pose $adY = (0, 0, (Y_1, 0), \delta)$, et $adU_i = (0, 0, (C_i, 0), \delta_i)$ avec $Y_1 = (a_1, \dots, a_n)$, $C_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, il est immédiat que la matrice $C = (c_{ij})$ est symétrique et $\delta_i = a_i$. Puisque $\mathcal{H}$ est indécomposable et contient $\mathcal{B}$, alors $\{Y_1, C_i\}$ engendre $\mathbb{R}^n$ et $(Y_1, \delta) \neq 0$. Or $\mathcal{H}$ est de dimension $n+1$, donc $\{Y, U_i\}$ est une base de $\mathcal{L}'$. Par conséquent, on peut identifier $\mathcal{L}'$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ à $\mathcal{T} = \mathbb{R}^{2n+5} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ munie du crochet

$$[(x, y, X, z, t, Z, u), (x', y', X', z', t', Z', u')] = (x'', y'', X'', 0, 0, Z'', u''),$$

où

$$\begin{aligned} x'' &= \langle CX', Z \rangle - \langle CX, Z' \rangle \\ &\quad + \langle uX' - u'X + t'Z - tZ', Y_1 \rangle + \delta(ut' - u't), \\ (14) \quad y'' &= \langle zZ' - z'Z, Y_1 \rangle + \delta(zu' - z'u), \\ X'' &= z'(CZ + uY_1) - z(CZ' + u'Y_1), \\ Z'' &= (t' - z')X - (t - z)X' \text{ et } u'' = zt' - z't, \end{aligned}$$

($\langle, \rangle$ est le produit scalaire ordinaire).

Inversement, on se donne une matrice symétrique réelle C d'ordre n , $Y_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que $\{Y_1, C_i\}$ engendre $\mathbb{R}^n$ et $(Y_1, \delta) \neq 0$. Si $\mathcal{T}$ est définie par (14), $\mathcal{T}' = \{(0, 0, 0, 0, 0, Z, u)\}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'' = \{(x, y, X, z, t, 0, 0)\}$ est un supplémentaire de $\mathcal{T}'$ dans $\mathcal{T}$ $ad\mathcal{T}'$ -invariant. La 2-forme symétrique sur $\mathcal{T}''$

$$\varphi((x, y, X, z, t, 0, 0), (x', y', X', z', t', 0, 0)) = xz' + x'z + yt' + y't - \langle X, X' \rangle$$

est non dégénérée, de signature $(2, 2+n)$ et $ad\mathcal{T}'$ -invariant. On note T le sous-groupe résoluble simplement connexe engendré par $\mathcal{T}$ et T' le sous-groupe fermé correspondant à $\mathcal{T}'$. Donc φ induit une métrique h de signature $(2, 2+n)$ sur $M' = T/T'$ et on a:

Proposition 4.25. *La variété (M', h) est un espace symétrique de signature $(2, 2+n)$, simplement connexe, indécomposable et non irréductible. Et tout espace localement symétrique de signature $(2, 2+n)$, indécomposable et non irréductible dont l'algèbre d'holonomie restreint est $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ avec $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{P}_2 = 0$ est isométrique à l'un de ces espaces.*

Exemple 2. On suppose que $\mathcal{H} = \{(\alpha N, 0, (X, 0), \delta) / \alpha, \delta \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n\}$. Donc les seuls crochets non nuls dans $\mathcal{L}'$ sont $Y = [e_{n+3}, e_{n+4}]$, $Y' = [e_2, e_{n+3}]$ et $U_i = [e_i, e_{n+3}]$ ($i = 3, \dots, n+2$). On pose $adY = (\alpha N, 0, (Y_1, 0), \delta)$, $adY' = (\alpha' N, 0, (Y_2, 0), \delta')$ et $adU_i = (\alpha_i, 0, (C_i, 0), \delta_i)$ avec $Y_1 = (a_1, \dots, a_n)$, $Y_2 = (b_1, \dots, b_n)$, et $C_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, donc la matrice $C = (c_{ij})$ est symétrique, $\delta_i = -a_i$ et $\alpha_i = b_i$. En plus $\{Y_1, Y_2, C_i\}$ engendre $\mathbb{R}^n$ et $(Y_1, \alpha) \neq 0$. Puisque $\mathcal{L}'$ est commutative et de dimension $n+2$, on peut identifier $\mathcal{L}$ à $\mathcal{T} = \mathbb{R}^{2n+5} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ munie du crochet

$$\begin{aligned} [(x, y, X, z, t, Z, u, v), (x', y', X', z', t', Z', u', v')] \\ = (x'', y'', X'', 0, t'', Z'', u'', v''), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x'' &= \langle CX', Z \rangle - \langle CX, Z' \rangle \\ &\quad + \langle uX' - u'X + tZ' - t'Z, Y_1 \rangle + \langle vX' - v'X, Y_2 \rangle \\ &\quad + \alpha(uy' + tv' - u'y - t'v) + \alpha'(vy' - v'y) + \delta(ut' - u't), \\ y'' &= \langle z'Z - zZ', Y_1 \rangle + \delta(zu' - z'u) + \alpha(vz' - v'z), \\ X'' &= z'(CZ + uY_1 + vY_2) - z(CZ' + u'Y_1 + v'Y_2), \\ Z'' &= z'X - zX', \quad u'' = zt' - z't, \quad \text{et } v'' = yz' - y'z. \end{aligned}$$

On pose maintenant $M' = T/T'$ avec T le sous-groupe résoluble simplement connexe engendré par $\mathcal{T}$, T' le sous-groupe fermé correspondant à $\mathcal{T}' = \{(0, 0, 0, 0, 0, Z, u, v)\}$ et φ la 2-forme symétrique définie sur $\mathcal{T}'' = \{(x, y, X, z, t, 0, 0)\}$ comme ci-dessus. φ induit sur M' une métrique h de signature $(2, 2+n)$ et on a:

Proposition 4.26. *La variété (M', h) est un espace symétrique de signature $(2, 2+n)$, simplement connexe, indécomposable, et non irréductible. Et tout espace localement symétrique de signature $(2, 2+n)$, indécomposable et non irréductible tel que $\mathcal{H} = \{(\alpha N, 0, (X, 0), \delta) / \alpha, \delta \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n\}$ est isométrique à l'un de ces espaces.*

5. Construction d'un système de coordonnées

Dans ce paragraphe, on se donne une métrique indécomposable non irréductible et on cherche à construire un système de coordonnées adapté à cette métrique. Plus précisément, on cherche à réduire localement la forme d'une métrique pseudo-riemannienne dont l'holonomie laisse

invariant un sous-espace isotrope maximal. Ce qui nous facilitera à construire dans le dernier paragraphe des métriques dont l'holonomie vérifie les conclusions du Théorème 3.19.

Pour cela, soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature $(r, r + n)$ et de dimension $m = n + 2r$. Soit θ un point fixe de M et $(e_1, \dots, e_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, e'_1, \dots, e'_r)$ une base de $T_\theta M$ dans laquelle la métrique g a pour forme au point θ :

$$g(X, X) = \sum_{i=1}^r x_i z_i - \sum_{j=1}^n y_j^2, \text{ pour } X = \sum_{i=1}^r x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^r z_i e'_i.$$

On suppose que le groupe d'holonomie restreint H de (M, g) au point θ laisse invariant $\mathfrak{R} = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_r$. Donc il laisse invariant aussi son orthogonal $\mathfrak{R}^\perp = \mathbb{R}\varepsilon_1 + \dots + \mathbb{R}\varepsilon_n$. Par conséquent, on peut construire, par transport parallèle, deux distributions T^0 et T telles que $T_\theta^0 = \mathfrak{R}$ et $T_\theta = \mathfrak{R}^\perp$. En plus on a $D_U X \in T^0$ et $D_U Y \in T$ pour $X \in T^0$, $Y \in T$ et $U \in TM$. Les distributions T^0 et T sont involutives, donc d'après Frobenius il existe deux sous-variétés intégrales maximales M_0 et M' passant par θ associées respectivement à T^0 et T . On pose M'' l'espace quotient M/T de M sous la relation d'équivalence qui identifie deux points qui appartiennent à une même sous-variété M' . Si on remplace M par un voisinage ouvert de θ , M'' est une sous-variété de M de dimension r . On note π la projection $M \longrightarrow M''$. On pose V le voisinage normale associé aux e'_i et on met $(z_1, \dots, z_r)$ comme coordonnées sur V . On peut mettre ces mêmes coordonnées sur M'' en identifiant M'' à V . On transporte T_θ^0 et T_θ le long de V et on choisit en chaque point z de V un supplémentaire orthogonal T'_z de T_z^0 tel que la métrique restreinte à T'_z est définit négative.

Pour $z \in V$, on note W_z le voisinage normale de z associé au sous-espace T'_z . Et on note P le sous-espace engendré par les W_z . P contient V . On met des coordonnées sur P comme suit:

Soit $y \in P$, y appartient à un seul W_z . On ramène y à z par des coordonnées normales $(y_1, \dots, y_r)$ dans W_z . Puis on ramène z à l'origine par les coordonnées $(z_1, \dots, z_r)$. Maintenant on choisit le long de P , r champs de vecteurs $E_i \in T^0$ tels que:

$$g\left(E_i, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij} \text{ pour } i, j = 1, \dots, r.$$

Or si on note R le tenseur de courbure de g , on a pour $U, V \in TM$ et $X, Y \in T^0$, $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y) = 0$. Par conséquent R est nul sur M_0 . Donc on peut choisir des coordonnées $(x_1, \dots, x_r)$ dans

M_0 telles que $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$. Enfin on peut mettre des coordonnées sur un voisinage de θ , comme suit:

Soit x un point de M voisin de θ , il passe par x une seule sous-variété M_0 qui rencontre l'espace P en un seul point y . On ramène x à y par les coordonnées $(x_1, \dots, x_r)$, puis on prend pour les autres coordonnées de x celles de y .

Maintenant on regarde les propriétés des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $\frac{\partial}{\partial z_k}$. D'abord par construction on a partout:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \text{ et } g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ pour } i, j = 1, \dots, r.$$

Le long de P , on a $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij}$, en plus on a:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = g\left(D_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, D_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = 0,$$

car $D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ et $D_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial z_j} = D_{\frac{\partial}{\partial z_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} \in T^0$. Ce qui implique donc que $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij}$ partout. Avec le même argument que ci-dessus, on montre facilement que les $g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$ et les $g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right)$ ne dépendent pas des coordonnées x_i . D'où le

Théorème 5.27. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature $(r, r+n)$ et de dimension $m = n+2r$ dont le groupe d'holonomie restreint laisse invariant un sous-espace isotrope maximal. Alors il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_r)$ dans lequel la matrice S de g a la forme réduite suivante:*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & B & C \\ I_r & {}^t C & D \end{pmatrix}$$

où B , C et D sont des matrices d'ordre respectivement (n, n) , (n, r) et (r, r) telles que les matrices B et C ne dépendent pas des coordonnées x_i .

6. Autres exemples

Contrairement au cas lorentzien ($r = 1$) (voir [3]), il n'y a jusqu'à présent aucune obstruction pour qu'un groupe vérifiant les conclusions du Théorème 3.19 soit groupe d'holonomie restreint d'une variété indécomposable non-irréductible. Nous donnerons dans la suite des exemples de telles variétés.

Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ qui satisfait les conclusions du Théorème 3.19. Nous distinguerons quatre cas:

Type 1: $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{K}' \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$. Cet exemple apparaît toujours en dimension 4 ($\mathcal{K}' = \mathcal{P} = 0$) et en dimension 5 ($\mathcal{K}' = 0$). Le sous-groupe connexe engendré par $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ est

$$PB = \left\{ \begin{pmatrix} I_2 & {}^t Y & \frac{1}{2} Y \cdot Y + \delta J \\ 0 & I_n & Y \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}, Y \in \mathcal{P}, \delta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^{d+1},$$

avec d la dimension de $\mathcal{P}$. PB est un sous-groupe nilpotent fermé de G . Le sous-groupe connexe U' de $GL(2, \mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{U}'$ est fermé, si et seulement si son radical R l'est. Or R ne peut être à une conjugaison près dans $GL(2, \mathbb{R})$ que contenu dans $SO(2, \mathbb{R}) + \mathbb{R}$, ou contenu dans le groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta > 0 \text{ et } \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

d'où U' est fermé. Or le sous-groupe connexe K' de $SO(n, \mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{K}'$ n'est pas nécessairement fermé si $n \geq 4$. Donc $H = U' K' PB$ aussi. Mais si K' est le groupe d'holonomie (restreint) d'une métrique riemannienne g définit sur $\mathbb{R}^m = \{x_3, \dots, x_{n+2}\}$, K' est nécessairement complètement réductible. On considère la métrique de signature $(2, 2+n)$ définit sur $\mathbb{R}^m$ ($m = n + 4$) par

$$h = 2 dx_1 dx_{n+3} + 2 dx_2 dx_{n+4} - g + f_1 dx_{n+3}^2 + f_2 dx_{n+4}^2$$

avec f_1 et f_2 deux fonctions suffisamment génériques indépendantes des variables x_1 et x_2 . En utilisant le Théorème d'Ambrose-Singer [2] et le Théorème 5.27, on montre avec un calcul simple que $K' \cdot NB$ est le groupe d'holonomie (restreint) de la métrique h (NB est le sous-groupe connexe engendré par $\mathcal{N} \oplus \mathcal{B}$).

On considère maintenant la métrique de signature $(2, 6)$ définit sur $\mathbb{R}^8$ par

$$h = 2 dx_1 dx_7 + 2 dx_2 dx_8 - \sum_{i=3}^6 dx_i^2 + 2x_4 x_8 dx_3 dx_7 + 2rx_6 x_8 dx_5 dx_7 \\ + 2x_3 x_7 dx_4 dx_8 + 2rx_5 x_7 dx_6 dx_8 + \sum_{j=3}^8 x_j^2 dx_7 dx_8.$$

Avec un calcul simple et avec le même argument que ci-dessus, on peut montrer que son groupe d'holonomie (restreint) est de type 1 (avec $\mathcal{K}' = \mathcal{U}' = 0$) et il est fermé si et seulement si, r est rationnel.

Type 2: $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$ mais ne contient pas $\mathcal{U}'$. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$, avec $\mathcal{L} = \{(U, A, 0, 0), U \in \mathcal{U}', A \in \mathcal{K}'\}$ une sous-algèbre de $\mathcal{U}' \oplus \mathcal{K}'$. Cet exemple apparaît en dimension 6 ($\mathcal{K}' = SO(2)$) ou plus. Si on note L le sous-groupe connexe de G engendré par $\mathcal{L}$, il n'est pas nécessairement fermé. Il suffit de choisir $\mathcal{L}$ engendrée par (rJ, J) avec $r \neq 0$ une constante rationnelle. Donc $H = LPB$ n'est pas nécessairement fermé aussi. On considère la métrique de signature $(2, 4)$ définit sur $\mathbb{R}^6$ par

$$h = 2 dx_1 dx_5 + 2 dx_2 dx_6 - dx_3^2 - dx_4^2 + 2x_4 x_6 dx_3 dx_5 \\ + (-2x_1 x_6 + 2rx_2 x_5 + x_3^2 + x_4^2) dx_5 dx_6.$$

Avec un calcul simple, on peut montrer que son groupe d'holonomie (restreint) est de type 2. Et il est fermé.

Type 3: $\mathcal{H}$ vérifie 2.1) du Théorème 3.19. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{L}_U \oplus \mathcal{L}_D \oplus \mathcal{L}_C \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}$, avec $\mathcal{L}_U = \{(U, \varphi(U), \psi((U, \varphi(U)) + \phi((U, \varphi(U)), 0), U \in \mathcal{U}'\}$, $\mathcal{L}_D = \{(0, B, \psi(B), 0), B \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{L}_C = \{(0, A, \psi(A) + \phi(A), 0), A \in \mathcal{C}\}$ (pour les notations voir le théorème). Cet exemple apparaît en dimensions ≥ 7 . Si par exemple $\mathcal{U}' = \mathcal{D} = 0$, $\psi = 0$, $\mathcal{C}$ engendrée par $A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & rJ \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\phi(A) = (1, 0)$, alors H est fermé si et seulement si, r est rationnel. En plus, on peut montrer que c'est le groupe d'holonomie (restreint) de la métrique de signature $(2, 7)$ définit sur $\mathbb{R}^9$ par

$$h = 2 dx_1 dx_8 + 2 dx_2 dx_9 - \sum_{i=3}^7 dx_i^2 + 2x_4 x_9 dx_3 dx_8 + \frac{2}{r} x_6 x_9 dx_5 dx_8 \\ - 2x_8^2 dx_4 dx_9 + \sum_{i=3, i \neq 7}^7 x_i^2 dx_8 dx_9.$$

Type 4: $\mathcal{H}$ vérifie 2.2) ou 2.3) ou 2.4) du Théorème 3.19. Ces exemples apparaissent seulement en dimensions ≥ 6 . Nous donnerons des exemples dans un futur article.

De ce qui précède, on obtient

Théorème 6.28. *En dimensions ≤ 5 le groupe d'holonomie restreint d'une métrique de signature $(2, 2+n)$ qui laisse invariant au moins un plan totalement isotrope et qui contient B est fermé. Il existe des exemples de variétés pseudo-riemanniennes de signature $(2, 2+n)$ pour $n \geq 2$ dont les groupes d'holonomie restreints ne sont pas fermés.*

Références

1. D. V. ALEKSEEVSKII, Riemannian manifolds with exceptional holonomy groups, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **2(2)** (1968), 1–10; English translation: *Functional Anal. Appl.* **2** (1968), 97–105.
2. W. AMBROSE ET I. M. SINGER, A theorem on holonomy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **79** (1953), 428–443.
3. L. BERARD BERGERY ET A. IKEMAKHEN, On the holonomy of Lorentzian Manifolds, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **54**, Part 2 (1993), 27–40.
4. L. BERARD BERGERY ET A. IKEMAKHEN, Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n, n) , *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), 93–114.
5. M. BERGER, Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, *Bull. Soc. Math. France* **83** (1955), 279–330.
6. M. BERGER, Les espaces symétriques non compacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **74** (1957), 85–177.
7. A. L. BESSE, “*Einstein manifolds*,” Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
8. R. BROWN ET A. GRAY, Riemannian manifolds with holonomy group $\text{Spin}(9)$, in *Diff. Geometry in honor of K. Yano*, Kinokuniya, Tokyo (1972), 41–59.
9. R. L. BRYANT, Metrics with exceptional holonomy, *Ann. of Math.* **126(2)** (1987), 525–576.
10. R. L. BRYANT, Classical, Exceptional and exotic holonomies: a statuts report, *Actes de la table Ronde Table de la Géometrie Différentielle en l'honneur de M. Berger*, Collection Séminaire et Congrès de la Société Mathématique de France **1** (1996), 93–165.

11. R. L. BRYANT ET S. M. SALAMON, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, *Duke Math. J.* **58**(3) (1989), 829–850.
12. M. CAHEN ET M. PARKER, Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques, *Bull. Soc. Math. Belg.* **22** (1970), 339–354.
13. M. CAHEN ET M. PARKER, Pseudo-Riemannian symmetric spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* **229** (1980).
14. M. CAHEN ET N. WALLACH, Lorentzian symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1970), 585–591.
15. E. CALABI, Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979), 269–294.
16. Q. S. CHI, S. MERKULOV ET L. SCHWACHHÖFER, On the existence of infinite series of exotic holonomies, *Invent. Math.* **126**(2) (1996), 391–411.
17. A. IKEMAKHEN, Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds, *Ann. Sci. Math. Québec* **20**(1) (1996), 53–66.
18. S. MERKULOV, Affine connections on involutive G -structures, in “*Geometry and Physics*,” Lecture notes in Pure and Applied Mathematics **184**, 1995, pp. 261–274.
19. D. MONTGOMERY ET H. SAMELSON, Transformation groups of spheres, *Ann. of Math.* **44** (1943), 454–470.
20. M. PARKER, Classes d'espaces pseudo-riemanniennes symétriques de signature $(2, n)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 882–884.
21. S. SALAMON, “*Riemannian geometry and Holonomy groups*,” Pitman Research Notes in Maths **201**, Longman Scientific & Technical, London, 1989.
22. L. J. SCHWACHHÖFER, Connections with exotic holonomy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **345**(1) (1994), 293–321.
23. L. SCHWACHHÖFER, On affine connections whose holonomy is a tensor representation, *Z. Anal. Anwendungen* **16**(1) (1997), 119–130.
24. J. SIMONS, On the transitivity of holonomy systems, *Ann. of Math.* **76** (1962), 213–234.
25. H. WU, On the de Rham decomposition theorem, *Illinois J. Math.* **8** (1964), 291–311.

26. H. WU, Holonomy groups of indefinite metrics, *Pacific J. Math.* **20** (1967), 351–392.

Département de Mathématiques
Faculté des sciences et techniques
Université Cadi-Ayyad
B. P. 618 Guéliz-Marrakech
MAROC

e-mail: fstg@cybernet.net.ma

Primera versió rebuda el 8 de juliol de 1997,
darrera versió rebuda el 21 de juliol de 1998