Publicacions Matemàtiques, Vol 36 (1992), 85–109.

APROXIMACIÓN ALEATORIA DE CUERPOS CONVEXOS*

FERNANDO AFFENTRANGER

Abstract

Problems related to the random approximation of convex bodies fall into the field of integral geometry and geometric probabilities. The aim of this paper is to give a survey of known results about the stochastic model that has received special attention in the literature and that can be described as follows:

Let K be a d-dimensional convex body in Euclidean space $\mathbb{R}^d, d \geq 2$. Denote by H_n the convex hull of n independent random points $X_1, \dots, X_n$ distributed identically and uniformly in the interior of K. If φ is a random variable on d-dimensional polytopes in $\mathbb{R}^d$, we define the random variable φ_n by

$$\varphi_n = \varphi(\operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}),$$

where conv denotes the convex hull. Typical random variables studied in the literature are numbers of vertices and facets, volume, surface area and mean width. Our main interest concerns the study of the mathematical expectation $\mathbb{E}(\varphi_n)$ of φ_n.

Some further stochastic models and other problems related to random points studied in the literature will be presented.

1. Introducción

Los problemas relacionados con la aproximación aleatoria de cuerpos convexos pueden ser situados dentro del campo de la Geometría Integral y las Probabilidades Geométricas.

El clásico "problema de la aguja", propuesto y resuelto por Buffon en su 'Essai d'Aritmétique Moral' en 1777, se considera como el primer problema de Probabilidades Geométricas:

*Extended version of an invited talk, Department of Mathematics of the Universitat Autònoma de Barcelona, June 1990, Bellaterra.

Supongamos trazadas en el plano una sucesión de rectas paralelas, a una distancia a una de otra. ¿ Cuál es la probabilidad geométrica P de que una aguja de longitud l ($l \leq a$) lanzada de manera arbitraria sobre el plano intersecte una de las rectas trazadas?

Buffon concluye (cf. [**50**]) que

$$P = \frac{2l}{\pi a}. \tag{1}$$

El resultado llamó la atención por el hecho de que, conocidos a y l, la fórmula (1) permite el cálculo de π por el azar, pues la probabilidad P puede medirse de manera experimental como el cociente entre los casos favorables y el total de los casos ensayados. Observemos, sin embargo, que el método presenta ciertas deficiencias prácticas. Se ha calculado que eligiendo $l = a$ (que, como se demuestra, resulta ser el caso óptimo) habría que lanzar la aguja durante tres años y a razón de un lanzamiento por segundo para poder garantizar con un 95 % de seguridad los primeros tres decimales de π (cf. capítulo 1 en [**51**]).

Analizando los razonamientos de Buffon se llega a la conclusión de que el experimento descrito se ajusta al siguiente modelo estocástico:

La posición de la aguja queda determinada por los parámetros $x \in [0, \frac{a}{2}]$ y $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donde x es la distancia del centro C de la aguja a la recta más próxima y α el ángulo que forman la aguja y la perpendicular a las rectas trazadas que pasa por el punto C. Dado que el experimento se realiza sin dar preferencia a ninguna posición de la aguja, podemos suponer que x y α están distribuidos de manera uniforme en los intervalos $[0, \frac{a}{2}]$ y $[0, \frac{\pi}{2}]$, respectivamente. En términos probabilísticos diríamos que estamos considerando un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde $\Omega := [0, \frac{a}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{A}$ es la σ-álgebra de los borelianos en Ω y μ una medida de probabilidades cuya densidad respecto de la medida de Lebesgue es constante en Ω. La probabilidad de todo suceso $A \in \mathcal{A}$ está dada por

$$P(A) = \frac{\int\int_A dx d\alpha}{\int\int_\Omega dx d\alpha}$$

Para el suceso $A :=$ {la aguja intersecta una recta} se obtiene por lo tanto

$$P(A) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}\cos\alpha} dx d\alpha = \frac{2l}{\pi a}$$

en coherencia con el resultado de Buffon.

Pasaron alrededor de cien años hasta que en la década de los años 60 del siglo pasado Sylvester, Crofton y otros matemáticos ingleses empezaron a aplicar la teoría de las Probabilidades Geométricas a la obtención de sorprendentes fórmulas integrales como

$$L(C) = \frac{1}{2} \int \operatorname{card}(g \cap C) d\mu(g) \tag{2}$$

donde $L(C)$ es la longitud de una curva rectificable $C \subset \mathbb{R}^2$ y μ la medida invariante del conjunto de rectas en el plano euclídeo (cf. por ejemplo [**50**, pág. 31]; el concepto de medida invariante será tratado con más detalles en la sección 2). Este tipo de fórmulas puede ser considerado como el inicio de la Geometría Integral.

En el año 1865 Sylvester (cf. [**56**]) propuso determinar la probabilidad geométrica de que 4 puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un recinto convexo plano sean los vértices de un cuadrilátero convexo. Este problema, conocido como el "problema de 4 puntos de Sylvester", es el punto de partida de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos. Su solución y extensiones serán tratadas con más detalles en la sección 3.

Mencionemos finalmente que hoy en día un tercer campo se ha unido al de la Geometría Integral y las Probabilidades Geométricas: la llamada Geometría Estocástica.

Como referencias básicas quisiera citar las obras de:

> L.A. Santaló: *Integral geometry and geometric probabilities*, 1976
> y
> D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke: *Stochastic geometry and its applications*, 1987.

El libro de Santaló contiene todos los elementos clásicos de la Geometría Integral y con sus 736 referencias bibliográficas es lo más completo que se tiene hasta 1976.

El segundo libro da una introducción a los diferentes modelos estocásticos que intervienen en la geometría aleatoria (procesos de puntos, procesos aleatorios de figuras geométricas, mosaicos aleatorios,...) y muestra sus aplicaciones en otras áreas de las ciencias (estereología, medicina, biología, mineralogía,...).

Para motivar lo que sigue consideremos el siguiente ejemplo vinculado a la aproximación de cuerpos convexos.

Sea K un recinto convexo suave (i.e. de borde diferenciable) de perímetro $L(K)$ en el plano euclídeo. ¿ Cómo se han de distribuir n puntos

$X_1, \ldots, X_n$ en K para que la diferencia entre $L(K)$ y el perímetro de la cápsula convexa H_n de $X_1, \ldots, X_n$ resulte mínima? Intuitivamente resulta claro que los n puntos han de distribuirse sobre el borde y en función de la curvatura de ∂K. Si el número de puntos n tiende a infinito se tiene que

$$L(K) - L(H_n) \sim \frac{1}{24}\Big(\int_{\partial K} \kappa(s)^{\frac{2}{3}} ds\Big)^3 \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

siendo $\kappa(s)$ la curvatura de ∂K en el punto s (cf. [**31**, pág. 43]).

Por otro lado, si los n puntos están distribuidos de manera aleatoria sobre ∂K y su densidad de distribución es

$$g(s) = \kappa(s)^{\frac{2}{3}} / \int_{\partial K} \kappa(s)^{\frac{2}{3}} ds$$

(es decir, la ley de distribución depende de la curvatura de ∂K) tenemos que

$$L(K) - \mathbb{E}(L(H_n)) \sim \frac{1}{4}\Big(\int_{\partial K} \kappa(s)^{\frac{2}{3}} ds\Big)^3 \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

siendo $\mathbb{E}(L(H_n))$ el valor medio de $L(H_n)$ (cf. [**44**]).

Comparando las expresiones (3) y (4) podemos constatar que el orden de convergencia es el mismo en los dos casos y que la aproximación óptima y la aleatoria difieren únicamente en las constantes asintóticas (factor 6 a favor de la aproximación óptima). Podemos concluir, por lo tanto, que la calidad de la aproximación aleatoria no es tan mala como su nombre pudiera sugerir.

Gruber [**35**], y en el caso particular de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos Buchta [**15**] y Schneider [**53**] , han establecido resúmenes muy completos del tema en los cuales se pueden encontrar numerosas referencias bibliográficas.

En la sección siguiente damos una descripción teórica del modelo estocástico (aproximación por dentro) que más interés ha despertado en los últimos años. Siguen, a continuación, tres secciones en las cuales se pretende dar una idea de los métodos utilizados y los resultados obtenidos hasta el momento. En las secciones 6 y 7 se mencionan otros modelos estocásticos que han sido estudiados como asimismo otros problemas relacionados con puntos aleatorios en cuerpos convexos.

2. Modelo estocástico

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidades y $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ el espacio euclídeo de dimensión d ($d \geq 2$) dotado con la σ-álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}^d$. Llamamos *punto aleatorio en* $\mathbb{R}^d$ a toda aplicación medible

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

(medible respecto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}^d$). La *distribución de* X está dada por P_X, la imagen de P por X; es decir, para todo boreliano $B \in \mathcal{B}^d$ tenemos que

$$\text{Prob}\,(X \in B) = P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

A continuación restringiremos nuestro interés a cierto tipo de puntos aleatorios en $\mathbb{R}^d$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un cuerpo convexo (subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^d$ con puntos interiores). Diremos que X es un *punto aleatorio con distribución uniforme en* K si

(i) X es un punto aleatorio en $\mathbb{R}^d$ y

(ii) $P_X(B) = \dfrac{\lambda_d(B \cap K)}{\lambda_d(K)}, B \in \mathcal{B}^d,$

siendo λ_d la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ n puntos aleatorios distribuidos de manera independiente y uniforme en un cuerpo convexo K; es decir, consideremos la aplicación

$$X_1 \times \cdots \times X_n : \Omega \to \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{n-\text{veces}}$$

y pidamos que la *distribución simultánea* de $X_1 \times \cdots \times X_n$ cumpla la condición

$$P_{X_1 \times \cdots \times X_n} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$$

donde $\otimes$ significa el producto de medidas. Para fijar ideas, si $\omega \in \Omega$, tenemos que

$$X_1 \times \cdots \times X_n(\omega) \in \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{n-\text{veces}}$$

es una realización de la aplicación medible $X_1 \times \cdots \times X_n$. Nuestro propósito es estudiar funcionales vinculados a la cápsula convexa, $\text{conv}\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$, de $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Es decir, pretendemos estudiar variables aleatorias del tipo

$$\omega \mapsto \varphi \circ \text{conv}\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} =: \varphi(H_n).$$

Para poder hablar de variables aleatorias en este caso introducimos en el espacio de poliedros convexos de dimensión d una estructura topológica adecuada. Si K_1 y K_2 son dos cuerpos convexos de dimensión d, tenemos que la distancia de Hausdorff d_H entre K_1 y K_2 está dada por

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\rho > 0 : K_1 \subset (K_2)_\rho \text{ y } K_2 \subset (K_1)_\rho\},$$

donde K_ρ es el paralelo exterior de K a distancia ρ. La distancia de Hausdorff d_H induce una topología en el espacio de poliedros convexos de dimensión d.

Dado un funcional φ consideremos finalmente el valor medio

$$\mathbb{E}(\varphi(H_n); K) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(H_n) dP_{X_1} \dots dP_{X_n}$$

o, abusando de la notación,

$$\mathbb{E}_n(\varphi; K) = \frac{1}{\lambda_d(K)^n} \int_K \cdots \int_K \varphi(H_n) d\lambda_d(x_1) \dots d\lambda_d(x_n). \tag{5}$$

Tomando a la derecha de (5) la integral de Lebesgue el problema de existencia no causa mayores dificultades.

Tema central de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos es el estudio de tales integrales múltiples. A partir de la expresión (5) las investigaciones se dividen en tres grupos:

1. Determinación explícita de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$,
2. Estudio del comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$ y
3. Obtención de desigualdades para $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$.

Estos tres diferentes aspectos de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos serán tratados en las secciones 3, 4 y 5, respectivamente.

De particular interés resultan ser los casos en que K es un poliedro convexo de dimensión d (d-cubo, d-simple) o un cuerpo convexo suave (d-esfera). Diremos que $K \subset \mathbb{R}^d$ es un *cuerpo convexo suave* si el borde de K es tres veces continuamente diferenciable y si la curvatura de Gauß-Kronecker existe en todo punto del borde y es estrictamente positiva.

Los funcionales vinculados a la cápsula convexa H_n que más interés han despertado hasta el momento se dividen en dos grupos:

(i) $\varphi = f_r$, $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, número de lados de dimensión r de la cápsula convexa H_n (f_0: número de vértices, f_1: número de aristas, $\dots, f_{d-1}$: número de facetas) y

(ii) $\varphi = W_i$, $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, i-ésimo funcional de Minkowski (o Quermaßintegral) de la cápsula convexa H_n (cf. [**50**, p. 217]).

Observemos que con probabilidad 1 la cápsula convexa H_n será un poliedro simplicial; es decir, las facetas de H_n serán casi siempre simples de dimensión $d-1$. En el plano el número de vértices coincide con el número de lados para todo polígono convexo. Tenemos por lo tanto que $f_0 = f_1$. En el espacio de tres dimensiones, teniendo en cuenta que

$f_0 - f_1 + f_2 = 2$ (fórmula de Euler) y

$f_1 = \frac{3}{2} f_2$ (cada arista coincide con dos caras, las caras son triángulos),

se deduce que

$$f_0 = 2 + \frac{1}{2} f_2.$$

Por lo tanto, conociendo el número de caras de la cápsula convexa H_n, podremos determinar directamente el número de aristas y vértices de H_n.

En el caso general de d dimensiones se tiene que

$$f_{d-2} = \frac{d}{2} f_{d-1}.$$

Además $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$ están vinculados por las relaciones de Dehn-Sommerville válidas para todo poliedro simplicial (cf. por ejemplo [**36**]). No obstante, el tipo combinatórico de H_n no queda determinado de manera única por el número de facetas.

Los funcionales de Minkowski W_i, $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, resultan ser de gran interés para el estudio de cuerpos convexos y son una extensión a más dimensiones del concepto de longitud y área en el plano o integral de curvatura media, superficie y volumen en el espacio de tres dimensiones.

Si $G_{d,i}$ es la variedad de Grassmann, tenemos que

$$W_i(K) = c_1(d,i) \int_{G_{d,i}} \lambda_{d-i}(K'_{d-i}) d\mu_{d,i}(U_i), \quad i = 1, \ldots, d-1, \tag{6}$$

donde K'_{d-i} es la proyección ortogonal de K sobre el complemento ortogonal de U_i y $\mu_{d,i}$ la usual medida invariante en $G_{d,i}$ (cf. [**50**, p. 202]). Recordemos que todo grupo topológico G localmente compacto admite salvo un factor constante una única medida invariante (la llamada medida de Haar en G, cf. [**21**, pág. 303]). Con ciertas hipótesis adicionales el resultado también es válido para espacios homogéneos localmente compactos (cf. [**46**, p. 138]).

Por otro lado se tiene también que

$$W_i(K) = c_2(d,i) \int_{L_i \cap K \neq \emptyset} d\bar{\mu}_{d,i}(L_i), \quad i = 0, 1, \ldots, d-1, \tag{7}$$

siendo $\bar{\mu}_{d,i}$ la usual medida invariante en el espacio de variedades lineales de dimensión i en $\mathbb{R}^d$ (cf. [**50**, p. 204]).

En particular se tiene que

$$\begin{aligned} W_0(K) &= V(K) \quad \text{(volumen)}, \\ dW_1(K) &= S(K) \quad \text{(superficie) } y \\ \frac{2}{\rho_d} W_{d-1}(K) &= W(K) \quad \text{(anchura media)} \end{aligned}$$

donde ρ_d es el volumen de la d-esfera unidad.

3. Determinación explícita de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$

El valor medio del área del triángulo cuyos vértices están distribuidos de manera uniforme en un recinto convexo plano (es decir, el caso $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$ con $n = 3$ y $\varphi =$ área) está directamente relacionado con el famoso "problema de 4 puntos" de Sylvester:

Dados 4 puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un recinto convexo $K \subset \mathbb{R}^2$, ¿ cuál es la probabilidad geométrica $P(K)$ de que los 4 puntos en cuestión sean los vértices de un cuadrilátero convexo?

Se obtiene fácilmente

$$P(K) = 1 - 4\frac{\mathbb{E}_3(A; K)}{A(K)} \tag{8}$$

siendo $A(K)$ el área de K (cf. [**53**, p. 219]). De manera análoga se deduce para todo cuerpo convexo K en $\mathbb{R}^d$ que

$$\mathbb{E}_n(f_0; K) = n\left(1 - \frac{\mathbb{E}_{n-1}(V; K)}{V(K)}\right) \tag{9}$$

donde $V(K)$ representa el volumen de K. Esta última fórmula, demostrada por Efron [**30**], muestra que el estudio del valor medio de los funcionales f_0 y V es equivalente.

La determinación explícita de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$ resulta ser bastante difícil y, salvo algunos valores aislados, no se ha llegado muy lejos.

Antes de pasar a los ejemplos observemos que

$$\frac{\mathbb{E}_n(V; K)}{V(K)} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_n(f_i; K), \quad i \in \{0, 1, \ldots, d-1\},$$

son invariantes afines. Por lo tanto, en casos concretos convendrá siempre elegir una imagen afín de K adecuada.

En el plano ha quedado solucionado de manera satisfactoria el caso de los polígonos convexos y las elipses. En el caso de los polígonos convexos de m lados las fórmulas son muy engorrosas. Únicamente resulta ser simple el caso de un triángulo T:

$$A(T) - \mathbb{E}_n(A;T) = 2\frac{A(T)}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{10}$$

(cf. [**14**]).

En más dimensiones lo único que ha resultado accesible ha sido la d-esfera B^d para la cual se conocen los valores de

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_n(f_i;B^d), \quad i \in \{0, d-2, d-1\}, \quad \text{y} \\ &\mathbb{E}_n(W_i;B^d), \quad i \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \end{aligned}$$

(para $i = 1, d-1$ cf. [**19**], los otros casos están resueltos en [**1**] y [**4**]).

Así por ejemplo, si A es el área y V el volumen tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3(A;B^2) &= \frac{34}{48\pi}, \\ \mathbb{E}_n(V;B^3) &= \frac{4\pi}{3} - \frac{8\pi}{3n+3} \\ &\quad - (n-1)n28\pi\sum_{k=0}^{n-2}(-2)^k 3^{n-k-2}\binom{n-2}{k}\binom{2n+k+5}{5}^{-1}, \\ \mathbb{E}_7(V;B^4) &= \frac{4732273}{7776000\pi^2} - \frac{111208400812867}{105681438720000\pi^4}. \end{aligned}$$

Acabaremos esta sección con algunos problemas abiertos. El siguiente problema, propuesto por Klee [**39**], se cita mucho en la literatura del tema y aún está sin resolver.

Problema 1. ¿ Cuál es el valor medio del volumen de un tetraedro cuyos vértices están distribuidos de manera uniforme en un tetraedro de volumen unidad?

El clásico problema de Sylvester es generalizable a más dimensiones y para cualquier número fijo de puntos aleatorios: dados $d+m$ puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en K, determinar la probabilidad $P_{d+i}(d+m;K)$ de que la cápsula convexa H_{d+m} tenga $d+i$ vértices $(i = 1, 2, \dots, m)$.

El caso $m = 1$ resulta ser trivial. El caso $m = 2$ se reduce al clásico problema de Sylvester. Para las probabilidades $P_{d+1}(d+2; K)$ y $P_{d+2}(d+2; K)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{d+1}(d+2; K) &= (d+2)\frac{\mathbb{E}_{d+1}(V; K)}{V(K)}, \\
P_{d+2}(d+2; K) &= 1 - (d+2)\frac{\mathbb{E}_{d+1}(V; K)}{V(K)}.
\end{aligned}$$

El caso $m = 3$ ha sido resuelto recientemente por Buchta [**17**]:

$$\begin{aligned}
P_{d+1}(d+3; K) &= \binom{d+3}{2}\frac{M_2(K)}{V(K)^2}, \\
P_{d+2}(d+3; K) &= \binom{d+3}{2}\left(\frac{\mathbb{E}_{d+1}(V; K)}{V(K)} - 2\frac{M_2(K)}{V(K)^2}\right), \\
P_{d+3}(d+3; K) &= 1 - \binom{d+3}{2}\left(\frac{\mathbb{E}_{d+1}(V; K)}{V(K)} - \frac{M_2(K)}{V(K)^2}\right)
\end{aligned}$$

siendo $M_2(K)$ el segundo momento del volumen de un simple con vértices distribuidos de manera uniforme en K.

Buchta [**17**] demuestra asimismo que

$$\begin{aligned}
&P_{d+m}(d+m; B^d) \to 1 \quad \text{y} \\
&P_{d+i}(d+m; B^d) \to 0, \quad i \in \{1, \ldots, m-1\},
\end{aligned}$$

para el caso en que la dimensión d tiende a infinito.

Problema 2. Determinar las probabilidades

$$P_{d+1}(d+m; K), \ldots, P_{d+m}(d+m; K)$$

para el caso $m \geq 4$.

4. Comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$

En 1963 Rényi y Sulanke [**47**], [**48**] se plantearon el problema de estudiar en el plano euclídeo el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$ en función del contorno del recinto convexo K. Los dos trabajos de Rényi y Sulanke, considerados hoy en día clásicos en el campo de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos, son el punto de partida de numerosas extensiones y generalizaciones. Antes de empezar con un breve resumen de los resultados obtenidos y los métodos de aproximación utilizados fijemos algunas notaciones.

Todas las notaciones asintóticas que aparecen en el texto se refieren al caso de $n \to \infty$. Diremos que

$$f(n) = O(g(n))$$

si existe una constante C tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq C$$

y escribiremos

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

si $g(n) = O(f(n))$. Si valen $f(n) = O(g(n))$ y $f(n) = \Omega(g(n))$ entonces diremos que

$$f(n) = \Theta(g(n)).$$

La notación

$$f(n) = o(g(n))$$

significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

y, finalmente, escribiremos

$$f(n) \sim g(n)$$

si y sólo si $f(n) = (1 + o(1))g(n)$.

A modo de ejemplo quisiera citar en el caso del plano euclídeo los siguientes resultados de Rényi y Sulanke [**47**], [**48**]:

$$\mathbb{E}_n(f_0; K) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) A(K)^{-\frac{1}{3}} \int_{\partial K} \kappa(s)^{\frac{1}{3}} ds \quad n^{\frac{1}{3}} \tag{11}$$

donde K es un recinto convexo suave y $\kappa(s)$ la curvatura del borde de K en el punto s. Para polígonos convexos P de m lados tenemos que

$$\mathbb{E}_n(f_0; P) \sim \frac{2}{3} m \log n. \tag{12}$$

Sorprende encontrar comportamientos de divergencia tan dispares como lo son $n^{\frac{1}{3}}$ y $\log n$. Resulta difícil dar una explicación intuitiva de este fenómeno.

En el caso de más dimensiones ($d \geq 3$) se conoce el comportamiento asintótico de

$\mathbb{E}_n(W_{d-1}; K)$	para convexos suaves y poliedros (cf. [**54**] y [**52**]),
$\mathbb{E}_n(f_0; K)$	para convexos suaves y poliedros convexos (cf.[**8**] y [**9**]),
$\mathbb{E}_n(f_{d-1}; K)$	para convexos suaves y poliedros convexos simples (cf. [**58**] y [**6**]) y
$\mathbb{E}_n(W_i; K)$	para convexos suaves (cf. [**8**]).

Recordemos que en cada vértice de un poliedro convexo simple coinciden d aristas.

Para dar una idea del interés que ha despertado el tema de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos quisiera mencionar a continuación los resultados obtenidos en el caso particular de $\mathbb{E}_n(f_0; P)$ donde P es un poliedro convexo.

$\mathbf{d} = 2$. P: polígono convexo de m lados.

$$\mathbb{E}_n(f_0; P) \sim \frac{2}{3} m \log n \qquad \text{Rényi and Sulanke [\mathbf{47}], 1963}$$

$\mathbf{d} = 3$. T: tetraedro

$$\mathbb{E}_n(f_0; T) \sim \frac{3}{4} \log^2 n \qquad \text{Buchta [\mathbf{16}], 1986}$$

$\mathbf{d} \geq 2$.
C^d : d- cubo

$$\mathbb{E}_n(f_0; C^d) = O(\log^{d-1} n) \qquad \text{Devroye [\mathbf{24}], 1980}$$
$$\mathbb{E}_n(f_0; C^d) \sim c(d) \log^{d-1} n \qquad \text{van Wel [\mathbf{57}], 1989}$$

S: poliedro convexo simple de m vértices

$$\mathbb{E}_n(f_0; S) = \Omega(\log^{d-1} n) \qquad \text{Dwyer [\mathbf{26}], 1988}$$
$$\mathbb{E}_n(f_0; S) = \Theta(\log^{d-1} n) \qquad \text{Buchta [\mathbf{18}], 1989}$$

$$\mathbb{E}_n(f_0; S) \sim \frac{dm}{(d+1)^{d-1}} \log^{d-1} n \qquad \text{Affentranger y Wieacker [\mathbf{6}], 1990}$$

P: poliedro convexo

$$\mathbb{E}_n(f_0; P) = O(\log^d n) \qquad \text{Dwyer y Kannan [\mathbf{29}], 1987}$$
$$\mathbb{E}_n(f_0; P) = O(\log^{d-1} n) \qquad \text{Dwyer [\mathbf{26}], 1988}$$
$$\mathbb{E}_n(f_0; P) = \Theta(\log^{d-1} n) \qquad \text{Bárány y Larman [\mathbf{10}], 1988}$$

$$\mathbb{E}_n(f_0;P) \sim \frac{C(P)}{(d+1)^{d-1}(d-1)!}\log^{d-1} n \qquad \text{Bárány y Buchta [9], 1990}$$

siendo $C(P)$ el número de cadenas $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{d-2} \subset F_{d-1}$ (F_r es un lado de dimensión r) de P. Este último resultado ha sido anunciado en [9] y su demostración se encuentra actualmente en preparación.

Para dar una idea de las técnicas de aproximación y para ver dónde intervienen las características geométricas del borde de K consideremos a continuación el caso particular $\varphi = f_{d-1}$ (número de facetas de H_n).

Habíamos constatado anteriormente que con probabilidad 1 las facetas de H_n serán simples de dimensión $d-1$. Puesto que los n puntos en cuestión están distribuidos de manera idéntica e independiente se tiene que

$$\mathbb{E}_n(f_{d-1};K) = \binom{n}{d}\operatorname{Prob}(\operatorname{conv}\{x_1,\ldots,x_d\} \text{ sea faceta de } H_n).$$

La cápsula convexa de $x_1,\ldots,x_d$ determina una faceta de H_n si y sólo si los $n-d$ puntos restantes $x_{d+1},\ldots,x_n$ se encuentran todos en una de las dos regiones $\tilde{K}_1$ y $\tilde{K}_2$ en que queda dividido K por el hiperplano H que pasa por $x_1,\ldots,x_d$. Tenemos, por lo tanto, que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_n(f_{d-1};K)\\ &= \binom{n}{d}V(K)^{-n}\int\limits_K\cdots\int\limits_K \left[\tilde{V}^{n-d} + (V-\tilde{V})^{n-d}\right] d\lambda_d(x_1)\ldots d\lambda_d(x_d)\end{aligned}$$

donde $\tilde{V} = V(\tilde{K}) = \min\{V(\tilde{K}_1), V(\tilde{K}_2)\}$. Observemos que con probabilidad 1 vale $V(\tilde{K}_1) \neq V(\tilde{K}_2)$.

Utilizando la conocida fórmula de Blaschke-Petkantschin

$$\begin{aligned}&d\lambda_d(x_1)\ldots d\lambda_d(x_d)\\ &= (d-1)!\lambda_{d-1}(\operatorname{conv}\{x_1',\ldots,x_d'\})d\lambda_{d-1}(x_1')\ldots d\lambda_{d-1}(x_d')d\bar{\mu}_{d,d-1}(H)\end{aligned}$$

donde $\bar{\mu}_{d,d-1}$ es la usual medida invariante en el espacio de hiperplanos de $\mathbb{R}^d$ (cf. [50, pág. 201]), se obtiene

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_n(f_{d-1};K)\\ &= \binom{n}{d}\frac{(d-1)!}{V(K)^n}\int\limits_{H\cap K\neq\emptyset}\left[\tilde{V}^{n-d} + (V-\tilde{V})^{n-d}\right] M(K\cap H)d\bar{\mu}_{d,d-1}(H)\end{aligned}$$

donde

$$M(K\cap H) = \int\limits_{K\cap H}\ldots\int\limits_{K\cap H} \lambda_{d-1}(\operatorname{conv}\{x_1',\ldots,x_d'\})d\lambda_{d-1}(x_1')\ldots d\lambda_{d-1}(x_d').$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(f_{d-1}; K)$ será determinado únicamente por hiperplanos que están "cerca" del borde de K ("cerca" significa que la distancia entre el hiperplano H y el hiperplano de apoyo paralelo a H que apoya a $\tilde{K}$ es suficientemente pequeña) obtenemos

$$\mathbb{E}_n(f_{d-1}; K) \sim \frac{n^d}{dV(K)^d} \int_{S^{d-1}} \int_0^c \left(1 - \frac{\tilde{V}}{V(K)}\right)^{n-d} M(K \cap H_{u,\tau}) d\tau d\omega_d(u),$$

donde ω_d es la medida esférica de Lebesgue sobre la esfera unidad S^{d-1}, $c > 0$ una constante suficientemente pequeña (pero fija) y

$$H_{u,\tau} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = \tau\}$$

el hiperplano paralelo al hiperplano de apoyo $H_{u,0}$ de K en dirección u y a distancia τ. Observemos que si f es una función integrable en el espacio de hiperplanos en $\mathbb{R}^d$, se tiene que

$$\int f(H) d\bar{\mu}_{d,d-1}(H) = \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty f(H_{u,\tau}) d\tau d\omega_d(u)$$

(cf. [**50**, pág. 204]).

A partir de aquí el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(f_{d-1}; K)$ dependerá de la elección de K.

En el caso de cuerpos convexos suaves, por ejemplo, se obtienen buenas estimaciones de $\tilde{V} = \tilde{V}(u, \tau)$ y $M(K \cap H_{u,\tau})$ con ayuda del paraboloide osculador (aproximación local de Taylor del borde de K alrededor del punto $s(u)$ donde el hiperplano $H_{u,0}$ apoya a K):

$$\tilde{V}(u, \tau) = b_1(d)\kappa(s(u))^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{d+1}{2}} (1 + o(1)) \qquad \text{y}$$

$$M(K \cap H_{u,\tau}) = b_2(d)\kappa(s(u))^{-\frac{d+1}{2}} \tau^{\frac{(d-1)(d+1)}{2}} (1 + o(1)),$$

donde $b_1(d)$ y $b_2(d)$ son constantes que dependen únicamente de la dimensión d y $\kappa(s(u))$ la curvatura de Gauss-Kronecker en el punto $s(u) \in \partial K$.

El resto de los detalles puede ser consultado en el trabajo de Schneider y Wieacker [**54**] o en Affentranger-Wieacker [**6**] para el caso de poliedros convexos simples.

Observaciones.

(1) Los métodos de Bárány y Larman sobre el comportamiento asintótico de valores medios relacionados con la cápsula convexa de puntos aleatorios uniformes (cf. [**10**], [**7**]) difieren de los restantes. En un primer paso los autores demuestran que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$ y n suficientemente grande existen constantes $c_1 = c_1(d)$ y $c_2 = c_2(d, K)$ tales que

$$(13) \qquad c_1 V(K[\frac{1}{n}]) \leq V(K) - \mathbb{E}_n(V; K) \leq c_2 V(K[\frac{1}{n}])$$

donde

$$K[\frac{1}{n}] := \{x \in K : \min\{\lambda_d(K \cap H) : x \in H; H \subset \mathbb{R}^d \text{ semiespacio } \} \leq \frac{1}{n}\}.$$

Se sabe que para n suficientemente grande $K \backslash K[\frac{1}{n}]$ es convexo (una especie de paralelo interior a K). A partir de (13) el problema se reduce a determinar el comportamiento asintótico de $V(K[\frac{1}{n}])$ que, aparentemente, resulta ser más accesible.

(2) Los métodos clásicos de Rényi y Sulanke (cf. [**47**] y [**48**]) y sus generalizaciones no permiten el estudio de la varianza, momentos de orden superior o distribución de las variables aleatorias en cuestión. Para el plano, utilizando métodos de la teoría de martingalas, Groeneboom [**34**] establece vínculos entre el número de vértices de la cápsula convexa H_n y ciertos procesos estocásticos que, ajustados adecuadamente, resultan ser marcovianos y a partir de los cuales obtiene, por ejemplo,

$$\operatorname{var}_n(f_0; P) \sim \frac{10}{27} m \log n$$

para un polígono convexo P de m lados.

(3) Recientemente Dwyer [**27**] ha considerado el caso de n puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un producto de esferas unidad B^i de diferentes dimensiones. Sea

$$K = B^{d_1} \times B^{d_2} \times \cdots \times B^{d_k}$$

tal que $d_1 = d_2 = \cdots = d_m > d_{m+1} \geq d_{m+2} \geq \cdots \geq d_k$ y $d_1 + \cdots + d_k = d$. Dwyer demuestra que

$$\mathbb{E}_n(f_0; K) = \Theta\left(n^{\frac{d_1-1}{d_1+1}} \log^{m-1} n\right).$$

Como casos particulares resultan

$$\text{(i)} \qquad d_1 = 1, m = d : \qquad \mathbb{E}_n(f_0, C^d) = \Theta(\log^{d-1} n) \qquad \text{y}$$
$$\text{(ii)} \qquad d_1 = d, m = 1 : \qquad \mathbb{E}_n(f_0, B^d) = \Theta(n^{\frac{d-1}{d+1}}).$$

El método de Dwyer se basa en las siguientes estimaciones utilizadas anteriormente por Devroye [**24**]: sea H_n la cápsula convexa de n puntos aleatorios $X_1, \ldots, X_n$ distribuidos de manera uniforme en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$. Si $H_1, \ldots, H_d$ son d hiperplanos mutuamente ortogonales que se intersectan en X_1, tenemos que $H_1, \ldots, H_d$ dividen a K en 2^d regiones convexas $\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_{2^d}$. Llamando

$$\hat{V}(K) = \min\{V(\hat{K}_1), \ldots, V(\hat{K}_{2^d})\}$$

tenemos que

$$\text{Prob}(X_1 \text{ sea vértice de } H_n) \leq 2^d \left(1 - \frac{\hat{V}(K)}{V(K)}\right)^{n-1}.$$

Por otro lado, si H es un hiperplano que pasa por X_1 y $\tilde{V}(K) = \min\{V(\tilde{K}_1),\, V(\tilde{K}_2)\}$, donde $\tilde{K}_1$ y $\tilde{K}_2$ son las regiones en que H divide a K, tenemos que

$$Prob(X_1 \text{ sea vértice de } H_n) \geq \left(1 - \frac{\tilde{V}(K)}{V(K)}\right)^{n-1}.$$

Citemos finalmente un par de problemas abiertos relacionados con el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$.

Problema 3. Determinar el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(f_r; B^d)$, $r \in \{1, 2, \ldots, d-3\}$, para el caso de la d-esfera $B^d, d \geq 6$.

Para $d = 3, 4$ y 5 las constantes del comportamiento asintótico de $\mathbb{E}_n(f_r; B^d)$, $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, se deducen de las relaciones de Dehn-Sommerville conociendo los respectivos comportamientos asintóticos de $\mathbb{E}_n(f_0; B^d)$ y $\mathbb{E}_n(f_{d-1}; B^d)$.

Problema 4. En [**8**, pág. 3], Bárány conjetura que si K es un cuerpo convexo suave y $\kappa(s)$ la curvatura de Gauss-Kronecker en el punto $s \in \partial K$, entonces vale

$$\mathbb{E}_n(f_r; K) \sim c(r, d) \int\limits_{\partial K} \kappa(s)^{\frac{1}{d+1}} d\sigma(s) \left(\frac{n}{V(K)}\right)^{\frac{d-1}{d+1}}, r \in \{0, 1, \ldots, d-1\},$$

donde σ es la usual medida de superficie de K y $c(r, d)$ una constante numérica que depende únicamente de r y d (para $r = 0, d-2$ y $d-1$ cf.

[8] y [58]).

Problema 5. Estudiar las varianzas de f_r y W_r, $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, para $d \geq 3$ (cf. [34]).

Problema 6. (cf. [27]). Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un cuerpo convexo y x un punto sobre el borde de K. Si en x coinciden k hiperplanos de apoyo afínmente independientes, demostrar que entonces

$$W(K) - \mathbb{E}_n(W;K) = \Omega\left(n^{-\frac{2}{d+k}}\right)$$

(para el caso $k = d$ cf. [52, p. 309]).

5. Desigualdades para $\mathbb{E}_n(\varphi; K)$

En el año 1885 Crofton (cf. [22]) retomó el problema de Sylvester y propuso determinar aquellos recintos convexos para lo cuales $P(K)$ es máxima o mínima. Recordemos que $P(K)$ es la probabilidad de que 4 puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un recinto convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ sean los vértices de un cuadrilátero convexo.

Años más tarde Blaschke (cf. [11] y [12]) demostró que

$$\frac{35}{48\pi^2} \leq \frac{\mathbb{E}_3(A;K)}{A(K)} \leq \frac{1}{12} \tag{14}$$

con igualdad a la izquierda si y sólo si K es una elipse y a la derecha si y sólo si K es un triángulo. De (8) y (14) se deduce que

$$\frac{2}{3} \leq P(K) \leq 1 - \frac{35}{12\pi^2} (= 0.704).$$

La primera desigualdad de Blaschke fue generalizada a más dimensiones y para un número arbitrario de puntos aleatorios por Groemer (cf. [32], [33])

$$\frac{\mathbb{E}_n(V;B^d)}{\rho_d} \leq \frac{\mathbb{E}_n(V;K)}{V(K)} \tag{15}$$

con igualdad si y sólo si K es un elipsoide. Fórmulas integrales que permiten el cálculo explícito de $\mathbb{E}_n(V; B^d), d \geq 2, n \geq d+1$, están dadas en [1]. Las demostraciones de Blaschke y Groemer se basan en el proceso de simetrización de Steiner.

Recordemos que si K es un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^d$ y H un hiperplano que contiene al origen de $\mathbb{R}^d$, entonces se define

$$K^* := \bigcup\{s_g : g \text{ recta ortogonal a } H\}$$

siendo s_g el segmento de longitud $\lambda_1(g \cap K)$ y cuyo centro está contenido en H. Se comprueba fácilmente que K^* es convexo, simétrico respecto de H y que $V(K^*) = V(K)$. Tanto Blaschke como Groemer utilizan el hecho de que

$$\mathbb{E}_n(V; K) \geq \mathbb{E}_n(V; K^*)$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si los centros de todos los segmentos $g \cap K, g \cap K \neq \emptyset$ y g ortogonal a H, están incluídos en un hiperplano. Esta última propiedad caracteriza a los elipsoides. El resto de los detalles puede ser consultado en **[32]** y **[33]** (más información sobre el proceso de simetrización de Steiner se encuentra en **[40]**).

Problema 7. Generalizar a más dimensiones y para un número arbitrario de puntos aleatorios la segunda desigualdad de Blaschke en (14); es decir, demostrar que

$$\frac{\mathbb{E}_n(V; K)}{V(K)} \leq \frac{\mathbb{E}_n(V; T^d)}{V(T^d)}, \qquad d \geq 2, n \geq d+1,$$

con igualdad si y sólo si K es un d-simple T^d.

Esta conjetura ha despertado el interés de muchos matemáticos y está relacionada directamente con el problema 1 de Klee **[39]** (cf. sección 3) que propone calcular explícitamente el valor de $\mathbb{E}_n(V; T^d)$ para el caso particular $d = 3, n = 4$.

La observación de Blaschke (cf. **[11]**) de que su demostración se generaliza sin mayores dificultades a más dimensiones parece ser errónea. La argumentación de Blaschke se basa en cierta caracterización del triángulo no generalizable a más dimensiones o para un número arbitrario de puntos aleatorios.

Recientemente Dalla y Larman **[23]** han demostrado que

$$\frac{\mathbb{E}_n(A; K)}{A(K)} \leq \frac{\mathbb{E}_n(A; T^2)}{A(T^2)}$$

siendo la desigualdad estricta en caso de que K sea un polígono convexo de por lo menos 4 vértices. Los autores demuestran asimismo que

$$\frac{\mathbb{E}_n(V; P)}{V(P)} \leq \frac{\mathbb{E}_n(V; T^d)}{V(T^d)}$$

siendo P un poliedro convexo de a lo sumo $d+2$ vértices (la igualdad se cumple si y sólo si P es un d-simple).

Más accesibles resultan ser las desigualdades que se obtienen suponiendo que n, el número de puntos aleatorios en cuestión, es suficientemente grande.

En el caso de la anchura media $W(K)$ (o equivalente el $(d-1)$-ésimo funcional de Minkowski) Schneider **[52]** demuestra que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$ existen constantes positivas $c_1(K)$ y $c_2(K)$ tales que

$$c_1(K)n^{-\frac{2}{d+1}} \leq W(K) - \mathbb{E}_n(W;K) \leq c_2(K)n^{-\frac{1}{d}} \tag{16}$$

para todo n suficientemente grande (la igualdad a la izquierda se cumple si K es un cuerpo convexo suave y a la derecha si K es un poliedro convexo).

Problema 8. Demostrar que los cuerpos convexos suaves se caracterizan por ser los únicos cuerpos convexos que cumplen

$$W(K) - \mathbb{E}_n(W;K) = \Theta(n^{-\frac{2}{d+1}}).$$

El resultado análogo para el caso en que φ es el volumen fue demostrado por Bárány y Larman **[10]**: si K es un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^d$ y n suficientemente grande se tiene que

$$c_3(K)\frac{\log^{d-1} n}{n} \leq V(K) - \mathbb{E}_n(V;K) \leq c_4(K)n^{-\frac{2}{d+1}} \tag{17}$$

donde la igualdad a la izquierda se cumple si K es un poliedro convexo y a la derecha si K es un cuerpo convexo suave.

Resulta notable que el papel que juegan los cuerpos convexos suaves y los poliedros convexos se invierta en (16) y (17). Resultados parecidos para el caso en que φ es el número de lados de dimensión r, $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, han sido establecidos recientemente por Bárány **[7]**.

Problema 9. Demostrar que los poliedros convexos se caracterizan por ser los únicos cuerpos convexos que cumplen

$$V(K) - \mathbb{E}_n(V;K) = \Theta(\frac{\log^{d-1} n}{n}).$$

Problema 10. Para los funcionales de Minkowski $W_i(K)$, $i \in \{1, \ldots, d-1\}$, Bárány [7, pág. 675], conjetura que para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$ y n suficientemente grande existen constantes positivas

$c_5(K), \ldots, c_8(K)$ tales que

$$c_5(K)n^{-\frac{2}{d+1}} \leq W_i(K) - \mathbb{E}_n(W_i; K) \leq c_6(K)n^{-\frac{1}{d-i+1}}, 1 \leq i \leq \left[\frac{d+1}{2}\right],$$

y

$$\begin{aligned} c_7(K)n^{-\frac{1}{d-i+1}} &\leq W_i(K) - \mathbb{E}_n(W_i; K) \\ &\leq c_8(K)n^{-\frac{2}{d+1}}, \left[\frac{d+1}{2}\right] + 1 \leq i \leq d-1. \end{aligned}$$

6. Otros modelos estudiados

6.1. El modelo dual (aproximación por fuera). Sean K y L dos cuerpos convexos en $\mathbb{R}^d$ tales que $K \subset \operatorname{int} L$ y $0 \in \operatorname{int} K$. Consideremos n hiperplanos aleatorios isotrópicos $H_1, \ldots, H_n$ tales que

$$H_i \cap L \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad H_i \cap K = \emptyset, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

El modelo se rige por la medida invariante en el espacio de hiperplanos en $\mathbb{R}^d$ (cf. [**50**, pág. 204]). La intersección de los n semiespacios de dimensión d, acotados por los hiperplanos y que contienen a K, define un conjunto poliédrico $\bar{H}_n$ que no tiene por qué ser acotado. Rényi y Sulanke [**49**] estudian el comportamiento asintótico ($n \to \infty$) de valores medios relacionados con $\bar{H}_n$ en el plano euclídeo. El modelo tiene importancia en problemas de optimación lineal ($\bar{H}_n$ puede ser interpretado como el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades lineales) y ha sido investigado recientemente por Kaltenbach [**38**].

6.2. Puntos aleatorios no uniformes en $\mathbb{R}^d$. Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^d$. La calidad de la aproximación aleatoria aumentará considerablemente si elegimos los puntos aleatorios directamente sobre el borde de K siguiendo una ley de probabilidad dada. Han sido estudiados los siguientes casos:

- n puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme sobre el borde de un cuerpo convexo suave, en particular sobre el borde de la d-esfera (cf. [**20**], [**1**] y [**45**]),

- n puntos aleatorios sobre un cuerpo convexo suave que admiten una distribución absolutamente continua respecto de la medida de superficie de ∂K y cuya densidad de distribución cumple ciertos requisitos de continuidad (cf. [**44**]),

- n puntos aleatorios de los cuales $n - i$ están distribuidos de manera uniforme en la d-esfera B^d y los restantes i de manera uniforme sobre el borde de B^d (cf. [**43**], [**1**]).

Asimismo es accesible el caso en que los puntos aleatorios tienen una distribución invariante bajo rotaciones, en particular los puntos aleatorios con distribución normal en $\mathbb{R}^d$ (cf. [**28**], [4]).

6.3. Intersecciones aleatorias de poliedros convexos. Si $P \subset \mathbb{R}^d$ es un poliedro convexo y L_i una variedad lineal aleatoria de dimensión i (cf. [**50**, pág. 204]) que intersecta a P, tenemos que $P \cap L_i$ será un poliedro aleatorio de dimensión i. Este modelo ha sido considerado detalladamente por Miles [**42**].

6.4. Proyecciones aleatorias de poliedros convexos. Si $P \subset \mathbb{R}^d$ es un poliedro convexo y U_i un subespacio aleatorio de dimensión i (cf. [**50**, pág. 204]) la proyección $\Pi_i(P)$ de P sobre U_i será un poliedro aleatorio de dimensión i. En el caso particular de un d-simple regular T^d se tiene que, para $k \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$, f_k, el número de lados de dimensión k de $\Pi_i(T^d)$, cumple

$$\mathbb{E}(f_k(\Pi_i(T^d))) \sim \frac{2^i}{\sqrt{i}}\binom{i}{k+1}\beta(T^k, T^{i-1})(\pi \log d)^{\frac{i-1}{2}}, \quad d \to \infty,$$

donde $\beta(T^k, T^{i-1})$ es el ángulo interno de T^{i-1} en T^k. Observemos que en este caso el comportamiento asintótico se refiere a $d \to \infty$ (cf. [**5**]). También este modelo tiene importancia en problemas de optimación lineal (cf. Borgwardt [**13**]).

7. Algunos problemas relacionados con puntos aleatorios

7.1. Triángulos aleatorios. Sean X_1, X_2 y X_3 tres puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$. ¿Cuál es la probabilidad geométrica $\bar{P}(K)$ de que X_1, X_2 y X_3 formen un triángulo acutángulo? Se conoce $\bar{P}(K)$ para el rectángulo y la d-esfera (cf. Langford [**40**] y Hall [**37**], respectivamente).

Problema 11 (Hall [**37**]). Demostrar que si $K \subset \mathbb{R}^d$ es un cuerpo convexo, entonces

$$\bar{P}(K) \leq \bar{P}(B^d)$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si K es la d-esfera B^d.

7.2. Esferas aleatorias en cuerpos convexos. Sean $X_1, \ldots, X_{d+1}$ $d+1$ puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$. Los puntos $X_1, \ldots, X_{d+1}$ determinan con probabilidad 1 una única d-esfera S (observemos que si $X_1, \ldots, X_{d+1}$ están en posición general, entonces existe una única d-esfera S en cuyo borde están contenidos $X_1, \ldots, X_{d+1}$). ¿Cuál es la probabilidad geométrica $\tilde{P}(K)$ de que S esté contenida en K?

Se conoce el valor de $\tilde{P}(K)$ para los polígonos regulares planos, el rectángulo y la d-esfera (cf. **[2]** y **[3]**). Se sabe, además, que $\tilde{P}(K)$ es máxima si y sólo si K es la d-esfera.

7.3. Mosaicos aleatorios. Sean $X_1, \ldots, X_n$ n puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$. Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ están en posición general. A partir de $X_1, \ldots, X_n$ obtenemos una descomposición simplicial de la cápsula convexa de $X_1, \ldots, X_n$ en d-simples (celdas duales de Voronoi). La cápsula convexa de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_{d+1}}, 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{d+1} \leq n$, será una celda dual de Voronoi si y sólo si los restantes $n-d-1$ puntos aleatorios no están incluidos en la d-esfera que determinan $X_{k_1}, \ldots, X_{k_{d+1}}$ (cf. 7.2). Dwyer **[25]** ha determinado recientemente el comportamiento asintótico del valor medio del número de celdas duales de Voronoi para el caso de la d-esfera.

Problema 12 (Dwyer **[25]**). Demostrar que el comportamiento asintótico será el mismo para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^d$.

Este tipo de mosaicos aleatorios interviene en el estudio de la complejidad de ciertos algoritmos vinculados a la Geometría Computacional.

Referencias bibliográficas

1. F. AFFENTRANGER, The expected volume of a random polytope in a ball, *J. Microscopy* **151** (1988), 277–287.
2. F. AFFENTRANGER, Random circles in the d-dimensional unit ball, *J. Appl. Prob.* **26** (1989), 408–412.
3. F. AFFENTRANGER, Random spheres in a convex body, *Arch. Math.* **55** (1990), 74–81.
4. F. AFFENTRANGER, The convex hull of random points with spherically symmetric distributions, Preprint, 1990.
5. F. AFFENTRANGER Y R. SCHNEIDER, Random projections of regular simplices, *Discrete Comput. Geom.*, por aparecer.
6. F. AFFENTRANGER Y J.A. WIEACKER, On the convex hull of uniform random points in a simple d-polytope, *Discrete Comput. Geom.*, por aparecer.

7. I. BÁRÁNY, Intrinsic volumes and f-vectors of random polytopes, *Math. Ann.* **285** (1989), 671–699.

8. I. BÁRÁNY, Random polytopes in smooth convex bodies, Preprint, 1990.

9. I. BÁRÁNY Y C. BUCHTA, On the convex hull of uniform random points in an arbitrary d-polytope, *Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* (1990), 25–27.

10. I. BÁRÁNY Y D.G. LARMAN, Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes, *Mathematika* **35** (1988), 274–291.

11. W. BLASCHKE, Lösung des 'Vierpunktproblems' von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.* **69** (1917), 436–453.

12. W. BLASCHKE, "*Vorlesungen über Differentialgeometrie II.*," Springer, Berlin, 1923, pp. 55–60.

13. K.H. BORGWARDT, "*The simplex method; a probabilistic analysis.*," Springer, Berlin, 1987.

14. C. BUCHTA, Zufallspolygone in konvexen Vielecken, *J. Reine angew. Math.* **347** (1984), 212–220.

15. C. BUCHTA, "*Zufällige Polyeder: Eine Übersicht. En: Zahlentheoretische Analysis*," (ed. por E. Hlawka), Lecture Notes in Math. **1114**, 1985, pp. 1–13.

16. C. BUCHTA, A note on the volume of a random polytope in a tetrahedron, *Ill. J. Math.* **30** (1986), 653–659.

17. C. BUCHTA, On a conjecture of R.E. Miles about the convex hull of random points, *Monatsh. Math.* **102** (1986), 91–102.

18. C. BUCHTA, A remark on random approximation of simple polytopes, *Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-Natur Kl.* (1989), 17–20.

19. C. BUCHTA Y J. MÜLLER, Random polytopes in a ball, *J. Appl. Prob.* **21** (1984), 753–762.

20. C. BUCHTA, J. MÜLLER Y R.F. TICHY, Stochastical approximation of convex bodies, *Math. Ann.* **271** (1985), 225–235.

21. D.L. COHN, "*Measure theory*," Birkhäuser, Boston, 1980.

22. M.W. CROFTON, Probability, *Encyclopeadia Britannica* **19** (1885), 768- -788.

23. L. DALLA Y D.G. LARMAN, Volumes of a random polytope in a convex set, Preprint, 1990.

24. L.P. DEVROYE, A note on finding convex hulls via maximal vectors, *Inf. Proc. Letters* **11** (1980), 53–56.

25. R.A. DWYER, Average-case analysis of algorithms for convex hulls

and Voronoi diagrams, Tesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1988.

26. R.A. DWYER, On the convex hull of random points in a polytope, *J. Appl. Prob.* **25** (1988), 688–699.

27. R.A. DWYER, Random convex hulls in a product of balls, *Probab. Th. Rel. Fields* **86** (1990), 457–468.

28. R.A. DWYER, Convex hulls of samples from spherically symmetric distributions, *Discrete Appl. Math.*, por aparecer.

29. R.A. DWYER Y R. KANNAN, Convex hull of randomly chosen points in a polytope, *Math. Res.* **38** (1987), 16–24.

30. B. EFRON, The convex hull of a random set of points, *Biometrika* **52** (1965), 331–343.

31. L. FEJES TÓTH, "*Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*," Springer, Berlin,, 1972.

32. H. GROEMER, On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set, *Pacific J. Math.* **45** (1973), 25–533.

33. H. GROEMER, On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set, *Arch. Math.* **25** (1974), 86–90.

34. P. GROENEBOOM, Limit theorems for convex hulls, *Probab. Th. Rel. Fields* **79** (1988), 327–368.

35. P. GRUBER, Approximation of convex bodies. En: *Convexity and its applications* (eds. P. Gruber y J. Wills), Birkhäuser, Basel, 1983, 131–162.

36. B. GRÜNBAUM, "*Convex polytopes*," Interscience, London, 1967.

37. G.R. HALL, Acute triangles in the n-ball, *J. Appl. Prob* **19** (1982), 712–715.

38. F.J. KALTENBACH, Asymptotisches Verhalten zufälliger konvexer Polyeder, Tesis, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i.Br., 1990.

39. V. KLEE, What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body?, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 286–288.

40. E. LANGFORD, Probability that a random triangle is abtuse, *Biometrika* **56** (1969), 689–690.

41. K. LEICHTWEISS, "*Konvexe Mengen*," Springer, Berlin, 1980.

42. R.E. MILES, Poisson flats in Euclidean spaces. Part I, *Adv. Appl. Prob.* **1** (1969), 211–237.

43. R.E. MILES, Isotropic random simplices, *Adv. Appl. Prob.* **3** (1971), 353–382.

44. J. MÜLLER, On the mean width of random polytopes, *Probab. Th. Rel. Fields* **82** (1989), 33–37.
45. J. MÜLLER, Approximation of a ball by random polytopes, *J. Approx. Theory* **63** (1990), 198–209.
46. L. NACHBIN, "*The Haar Integral*," Van Nostrand, Princeton, 1965.
47. A. RÉNYI Y R. SULANKE, Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **2** (1963), 75–84.
48. A. RÉNYI Y R. SULANKE, Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **3** (1964), 138–147.
49. A. RÉNYI Y R. SULANKE, Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **9** (1968), 146–157.
50. L.A. SANTALÓ, "*Integral geometry and geometric probability*," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.
51. H. SOLOMON, "*Geometric probability*," SIAM, Philadelphia, 1978.
52. R. SCHNEIDER, Approximation of convex bodies by random polytopes, *Aequationes Math.* **32** (1987), 304–310.
53. R. SCHNEIDER, Random approximation of convex sets, *J. Microscopy* **151** (1988), 211–227.
54. R. SCHNEIDER Y J.A. WIEACKER, Random polytopes in a convex body, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **52** (1980), 69–73.
55. D. STOYAN, W.S. KENDALL Y J. MECKE, "*Stochastic geometry and its applications*," Akademie-Verlag, Berlin, 1987.
56. J.J. SYLVESTER, On a special class of questions on the theory of probabilities, *Birmingham British Association Report* **35** (1865), 8–9.
57. B.F. VAN WEL, The convex hull of a uniform sample from the interior of a simple d-polytope, *J. Appl. Prob.* **27** (1989), 259–273.
58. J.A. WIEACKER, Einige Probleme der polyedrischen Aproximation, Diploma, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i.Br., 1978.

Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität
Hebelstr. 29
D-7800 Freiburg i. Br.
DEUTSCHLAND

Rebut el 19 de febrer de 1991