

GENERALIZACION SOBRE MODULOS DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH Y SUS APLICACIONES

POR

BALTASAR R.-SALINAS

*A D. JOSÉ M.^a ORTS con motivo de
su 70 aniversario.*

INTRODUCCION

El interesante trabajo de BANACH-TARSKI sobre la descomposición de conjuntos de puntos en partes respectivamente congruentes [4] se basa principalmente en un resultado anterior de BANACH [2] y en otro de HAUSDORFF [10]; el primero de éstos para probar la imposibilidad de la descomposición finita en la recta y en el plano, y el segundo en la parte relativa a la posibilidad de la descomposición. Siguiendo la orientación de HAUSDORFF ha habido posteriores contribuciones importantes ⁽¹⁾. No ocurre lo mismo, que sepamos nosotros, en la parte concerniente a la imposibilidad de la descomposición. Esta cuestión conduce de manera natural a una generalización sobre módulos del teorema de HAHN-BANACH. Se ve en seguida, en virtud de los teoremas de HAUSDORFF y de BANACH-TARSKI sobre descomposición finita de conjuntos, que tal generalización planteada convenientemente no será siempre posible, pero aquí precisamente radica un mayor interés en el estudio de esta cuestión para decidir cuándo es válida o no dicha generalización.

Este trabajo consta de tres partes. En §1 hacemos un estudio sobre la prolongación de funciones aditivas en grupos aditivos. En §2 obtenemos varios resultados sobre la generalización para módulos del teorema de HAHN-BANACH. Finalmente, en §3 aplicamos estos resultados al *problema de la extensión (o del contenido)*. Este problema consiste en lo siguiente :

⁽¹⁾ Recordamos los trabajos de H. HADWIGER, M. R. ROBINSON y W. SIERPINSKI.

Sea E un conjunto no vacío, G un grupo de permutaciones de E que supondremos opera a la derecha, \mathfrak{S}_0 un anillo de BOOLE de subconjuntos de E invariante por G : $\mathfrak{S}_0 G = \mathfrak{S}_0$, y μ_0 una extensión sobre \mathfrak{S}_0 compatible con G , es decir, una función real de conjunto, no negativa y finitamente aditiva sobre \mathfrak{S}_0 y tal que

$$\mu_0(S\sigma) = \mu_0(S)k(\sigma)$$

para $S \in \mathfrak{S}_0$ y $\sigma \in G$, siendo k una función real definida sobre G . Entonces se trata de averiguar si existe una extensión μ , prolongación de μ_0 , definida sobre la clase \mathfrak{S} de todas las partes de los conjuntos $S \in \mathfrak{S}_0$, y compatible con G . Aquí demostramos que esta extensión « ultracompleta » existe siempre que G sea un *grupo accesible*, concepto que introducimos valiéndonos de ciertas series normales y que comprende los casos de que G sea resoluble o finito.

El problema precedente se plantea, entre otras partes, en el Cálculo de Probabilidades cuando se pretende encontrar una función de probabilidad, finitamente aditiva, definida sobre la clase de todos los subconjuntos de E e invariante por un grupo G de permutaciones de E : $k = 1$.

Concluimos esta introducción haciendo notar que este trabajo pone de manifiesto que, como era de esperar, la demostración analítica del teorema de HAHN-BANACH es apta de una mejora a la que difícilmente podrá llegar la demostración sintética ⁽²⁾.

§ 1. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE PROLONGACION DE FUNCIONES ADITIVAS.

DEFINICIÓN 1. *Dado un conjunto X diremos que f es una función aditiva en X si X es un grupo aditivo (conmutativo) y f es una función real finita, definida sobre un subgrupo Y de X y que satisface*

$$(1.1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo par (x, y) de elementos de Y .

Para expresar abreviadamente que Y es el dominio de f escribiremos: $Y = D(f)$.

⁽²⁾ Véase, BOURBAKI [5], pág. 69; GROTHENDIECK [8], pág. 79 y KÖTHE [11], pág. 189.

DEFINICIÓN 2. Dado un conjunto X diremos que p es una función subaditiva sobre X si X es un grupo aditivo y p es una función real finita, definida sobre X , que satisface

$$(1.2) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

para todo par (x, y) de elementos de X .

OBSERVACIÓN 1. Si $p < +\infty$ es una función real, finita o no, definida sobre un grupo aditivo X y que satisface (1.2) y $p(0) \geq 0$, se sigue que p es una función subaditiva sobre X .

En efecto, siendo

$$\begin{aligned} p(x) &\geq p(0) - p(-x) \\ &\geq -p(-x) > -\infty \end{aligned}$$

para cada $x \in X$, resulta p finita.

OBSERVACIÓN 2. Si $p < +\infty$ es una función real, finita o no, definida sobre un grupo aditivo X y que satisface (1.2) y $p(0) < 0$, resulta $p = -\infty$.

En efecto, siendo $p(0) < 0$,

$$p(0) \leq p(0) + p(0)$$

y

$$p(x) \leq p(x) + p(0)$$

para cada $x \in X$, resulta $p(0) = -\infty$ y $p(x) = -\infty$ para cada $x \in X$.

DEFINICIÓN 3. Un conjunto no vacío P de funciones subaditivas sobre X diremos que es un conjunto dirigido si para todo par (p_1, p_2) de funciones de P existe una función $p \leq \inf\{p_1, p_2\}$ perteneciente a P . En particular, diremos que P es un conjunto totalmente ordenado si para todo par (p_1, p_2) de funciones de P se tiene $p_i = \inf\{p_1, p_2\}$ para $i = 1$ o $i = 2$. En otras palabras, diremos que un conjunto $P \neq \emptyset$ de funciones subaditivas sobre X es dirigido (o totalmente ordenado) si P es un conjunto dirigido (o totalmente ordenado) respecto de la relación de ordenación parcial « \geq » definida en el conjunto de funciones reales sobre X .

PROPOSICIÓN 1. Si P es un conjunto dirigido de funciones subaditivas sobre X , la función real

$$(1.3) \quad p^* = \inf\{p \mid p \in P\}$$

es una función subaditiva.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, cualesquiera que sean los elementos x e y de X y los números reales $\lambda > \phi^*(x)$ y $\mu > \phi^*(y)$, existen dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 , pertenecientes a P , que satisfacen

$$\phi_1(x) < \lambda \text{ y } \phi_2(y) < \mu.$$

De esto resulta, siendo P un conjunto dirigido, que existe una función $\phi \leq \inf \{\phi_1, \phi_2\}$ perteneciente a P y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \phi^*(x+y) &\leq \phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y) \\ &\leq \phi_1(x) + \phi_2(y) < \lambda + \mu \end{aligned}$$

para cada $\lambda > \phi^*(x)$ y $\mu > \phi^*(y)$. Por tanto,

$$\phi^*(x+y) \leq \phi^*(x) + \phi^*(y) \quad (\phi^* < +\infty)$$

para todo par (x, y) de elementos de X .

Basta aplicar ahora la observación 1, teniendo presente que $\phi^* < +\infty$ y $\phi^*(0) = \inf \{\phi(0) \mid \phi \in P\} \geq 0$, para probar que ϕ^* es una función subaditiva sobre X .

DEFINICIÓN 4. Un conjunto P de funciones subaditivas sobre X diremos que es un conjunto (\mathfrak{S}_1) (sobre X) si para todo subconjunto P_0 de P , totalmente ordenado, la función

$$(1.3) \quad \phi^* = \inf \{\phi \mid \phi \in P_0\}$$

pertenece a P .

PROPOSICIÓN 2. Si f es una función real finita definida sobre un subconjunto Y del grupo aditivo X , el conjunto de las funciones subaditivas sobre X que satisfacen

$$\phi(x) \geq f(x) \quad (\phi(x) \leq f(x))$$

para cada $x \in Y$ es un conjunto (\mathfrak{S}_1) . En particular, los conjuntos total y vacío de funciones subaditivas sobre X son conjuntos (\mathfrak{S}_1) .

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la proposición 1.

PROPOSICIÓN 3. La intersección $\cap \{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de una familia, vacía o no, de conjuntos (\mathfrak{S}_1) sobre X es un conjunto (\mathfrak{S}_1) .

DEMOSTRACIÓN. Si la familia $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es vacía, la conclusión resulta de la proposición 2 puesto que entonces $\cap \{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es el conjunto de todas las funciones subaditivas sobre X . En el caso que la

familia $\{P_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ sea no vacía basta tener presente que si P_0 es un subconjunto totalmente ordenado de $P = \cap \{P_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, la función

$$p^* = \inf \{p | p \in P_0\}$$

pertenece a cada P_λ y, por consiguiente, a P .

DEFINICIÓN 5. Si p es una función subaditiva sobre X y f es una función aditiva en X , designaremos por $f[p]$ a la función real q definida así :

$$(1.4) \quad q(x) = \inf_{y \in Y} [p(x + y) - f(y)] \quad (Y = D(f))$$

para cada $x \in X$.

PROPOSICIÓN 4. Si p es una función subaditiva sobre X y f es una función aditiva en X tal que

$$f(x) \leq p(x)$$

para cada $x \in D(f)$, $q = f[p]$ es una función subaditiva sobre X que satisface

$$(1.5) \quad f(x) \leq q(x) \text{ y } q(x) \leq p(x)$$

para $x \in D(f)$ y $x \in X$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, como cualesquiera que sean los elementos x e y de X y los números $\lambda > q(x)$ y $\mu > q(y)$, existen dos elementos u y v de $Y = D(f)$ que satisfacen

$$p(x + u) - f(u) < \lambda \text{ y } p(x + v) - f(v) < \mu,$$

tendremos

$$\begin{aligned} q(x + y) &\leq p(x + y + u + v) - f(u + v) \\ &\leq [p(x + u) - f(u)] + [p(x + v) - f(v)] \\ &< \lambda + \mu \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$q(x + y) \leq q(x) + q(y).$$

De aquí resulta, según la observación 1, que q es una función subaditiva sobre X por ser $q < +\infty$ y $q(0) = \inf_{y \in Y} [p(y) - f(y)] \geq 0$ ($Y = D(f)$).

Finalmente,

$$q(x) \leq p(x) - f(0) = p(x)$$

para $x \in X$ y

$$\begin{aligned} q(x) &= \inf_{y \in Y} [\phi(x+y) - f(y)] \quad (Y = D(f)) \\ &\geq \inf_{y \in Y} [f(x+y) - f(y)] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

para $x \in D(f)$.

OBSERVACIÓN 3. Si $p(y) < f(y)$ para algún $y \in D(f)$ resulta $q = -\infty$, según la observación 1, por ser $q(0) < 0$.

PROPOSICIÓN 5. Sea p una función subaditiva sobre X y f una función aditiva en X . Entonces, $f[p] = p$ si y sólo si

$$(1.6) \quad f(y) = \phi(x+y) - \phi(x)$$

para cada $x \in X$ e $y \in D(f)$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, si se verifica (1.6) resulta $f[\phi] = \phi$. Recíprocamente, si $f[\phi] = \phi$ para $x \in X$ e $y \in D(f)$ tendremos

$$\phi(x) \leq \phi(x+y) - f(y)$$

y

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &\leq \phi(x) - f(-y) \\ &= \phi(x) + f(y) \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$f(y) = \phi(x+y) - \phi(x)$$

para $x \in X$ e $y \in D(f)$.

COROLARIO 1. Si $f[p] = p$ y g es la restricción de f sobre un subgrupo de $D(f)$ resulta $g[p] = p$.

COROLARIO 2. Si $f[p] = p$ y $p(0) = 0$ resulta

$$(1.7) \quad f(x) = \phi(x)$$

para $x \in D(f)$, y

$$(1.8) \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

para $x \in X$ e $y \in D(f)$.

PROPOSICIÓN 6. Sea p una función subaditiva sobre X y f una función aditiva en X . Si $f[p] = q$ resulta $f[q] = q$.

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, siendo

$$\begin{aligned} q(x+y) - f(y) &= \inf_{z \in Y} [\phi(x+y+z) - f(z)] - f(y) \quad (Y = D(f)) \\ &= \inf_{z \in Y} [\phi(x+y+z) - f(y+z)] \\ &= \inf_{z \in Y} [\phi(x+z) - f(z)] \\ &= q(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $y \in D(f)$, en virtud de la proposición 5 resulta $f[q] = q$.

PROPOSICIÓN 7. Sean p y q funciones subaditivas sobre X y f una función aditiva en X . Entonces $f[p] = q$ si y sólo si:

1. $q \leq p$.
2. Para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un elemento $y \in D(f)$ tal que

$$(1.9) \quad \phi(x+y) < q(x+y) + \varepsilon$$

3. $f[q] = q$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f[\phi] = q$ las propiedades 1 y 3 se siguen de las proposiciones 4 y 6. Además, como para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un $y \in D(f)$ tal que

$$\phi(x+y) - f(y) < q(x) + \varepsilon,$$

teniendo presente 3 y aplicando la proposición 6 resulta 2.

Recíprocamente, de las propiedades 1 y 3 se deduce

$$q = f[q] \leq f[\phi].$$

Como por otra parte para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un elemento $y \in D(f)$ tal que

$$\phi(x+y) < q(x+y) + \varepsilon,$$

por la propiedad 3 y la proposición 6 tendremos

$$f[\phi](x) \leq \phi(x+y) - f(y) < q(x) + \varepsilon$$

y, por consiguiente, $f[\phi] \leq q$ y $f[\phi] = q$.

DEFINICIÓN 6. Dado un conjunto P de funciones subaditivas sobre X y una función aditiva f en X , designamos por $P(f)$ el conjunto de las funciones $p \in P$ tales que $f[p] \in P$.

PROPOSICIÓN 8. Sea P un conjunto de funciones subaditivas sobre X y f una función aditiva en X . Si $P^* = P(f)$ resulta $P^*(f) = P^*$.

DEMOSTRACIÓN. Siendo $P^*(f) \subset P^*$, bastará probar que $P^* \subset P^*(f)$. Efectivamente, si $\phi \in P^*$ la función $q = f[\phi] \in P$ y como, según la proposición 6, $f[q] = q$, tendremos $q \in P^*$ y, por tanto, $\phi \in P^*(f)$.

PROPOSICIÓN 9. Si $P = \bigcap \{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es intersección de una familia no vacía de conjuntos P_λ de funciones subaditivas sobre X resulta

$$(1.10) \quad P(f) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda(f).$$

DEMOSTRACIÓN. La omitimos por no ofrecer dificultades.

PROPOSICIÓN 10. Si P es un conjunto (\mathfrak{S}_1) sobre X , $P(f)$ es también un conjunto (\mathfrak{S}_1) .

DEMOSTRACIÓN. Sea P_0 un subconjunto totalmente ordenado de $P(f)$. Entonces, $Q_0 = f[P_0]$ es un subconjunto de P . Además, como cualesquiera que sean las funciones q_1 y q_2 de Q_0 existen dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 tales que $q_i = f[\phi_i]$ ($i = 1, 2$) y $\phi_k = \inf \{\phi_1, \phi_2\}$ para $k = 1$ o $k = 2$, se deduce $q_k = \inf \{q_1, q_2\}$ y, por consiguiente, que Q_0 es un subconjunto totalmente ordenado de P .

Siendo P_0 y Q_0 subconjuntos totalmente ordenados de P , las funciones

$$\phi^* = \inf \{\phi \mid \phi \in P_0\}$$

y

$$q^* = \inf \{q \mid q \in Q_0\}$$

pertenecen a P , y como

$$\begin{aligned} q^*(x) &= \inf_{q \in Q_0} q(x) = \inf_{\phi \in P_0} f[\phi](x) \\ &= \inf_{\phi \in P_0} \inf_{y \in Y} [\phi(x+y) - f(y)] \quad (Y = D(f)) \\ &= \inf_{y \in Y} \inf_{\phi \in P_0} [\phi(x+y) - f(y)] \\ &= \inf_{y \in Y} [\phi^*(x+y) - f(y)] \\ &= f[\phi^*](x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$, resulta $\phi^* \in P(f)$. Por tanto, $P(f)$ es un conjunto (\mathfrak{S}_1) .

DEFINICIÓN 7. Dado un par (f_1, f_2) de funciones aditivas en X escribiremos $f_1 \subset f_2$ o $f_2 \supset f_1$ para expresar que f_1 es una restricción de f_2 o bien que f_2 es una prolongación de f_1 , es decir, $f_1(x) = f_2(x)$ para $x \in D(f_1) \subset D(f_2)$.

La relación « \mathbf{C} » así definida es una relación de ordenación parcial según puede comprobarse fácilmente ⁽³⁾.

De acuerdo con esta ordenación parcial si dado un conjunto F de funciones aditivas en X existe una función aditiva f^* con las propiedades :

1. $f^* \supset f$ para cada $f \in F$,

2. Si g es una función aditiva en X que satisface $g \supset f$ para cada $f \in F$ resulta $g \supset f^*$;

designaremos dicha función así :

$$(1.11) \quad f^* = \sup \{f | f \in F\} \quad (\mathbf{C}),$$

donde escribimos a la derecha el signo \mathbf{C} encerrado entre paréntesis para expresar que este supremo se refiere a la ordenación parcial últimamente definida.

PROPOSICIÓN 11. Dado un par (f_1, f_2) de funciones aditivas en X , existe

$$(1.12) \quad \sup \{f_1, f_2\} \quad (\mathbf{C})$$

si y sólo si

$$(1.13) \quad f_1(x) = f_2(x)$$

para todo $x \in D(f_1) \cap D(f_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, si existe (1.12) resulta (1.13).

Recíprocamente, sea $f_1(x) = f_2(x)$ para $x \in D(f_1) \cap D(f_2)$. Entonces, si $x'_1 + x'_2 = x''_1 + x''_2$, $\{x'_1, x'_2\} \subset D(f_1)$ y $\{x''_1, x''_2\} \subset D(f_2)$, resulta $x'_1 - x''_1 = x''_2 - x'_2 \in D(f_1) \cap D(f_2)$,

$$\begin{aligned} f_1(x'_1) - f_1(x''_1) &= f_1(x'_1 - x''_1) \\ &= f_2(x''_2 - x'_2) = f_2(x''_2) - f_2(x'_2) \end{aligned}$$

y

$$f_1(x'_1) + f_2(x'_2) = f_1(x''_1) + f_2(x''_2).$$

Por tanto, si para cada $x = x_1 + x_2 \in D(f_1) + D(f_2)$ ponemos

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad (x_i \in D(f_i)),$$

f es una función aditiva en X con

$$D(f) = D(f_1) + D(f_2),$$

⁽³⁾ Obsérvese que $f_1 \subset f_2$ equivale a que $\{(x, f_1(x)) | x \in D(f_1)\}$ sea un subgrupo de $\{(x, f_2(x)) | x \in D(f_2)\} \subset X \times R$.

que verifica las condiciones :

1. $f \supseteq f_i$ para $i = 1, 2$.
2. Si g es una función aditiva en X que satisface $g \supseteq f_i$ para $i = 1, 2$ resulta $g \supseteq f$.

Luego,

$$f = \sup \{f_1, f_2\} \quad (\mathbf{C}).$$

DEFINICIÓN 8. Dado un conjunto no vacío F de funciones aditivas en X , diremos que F es un conjunto dirigido si cualesquiera que sean las funciones f_1 y f_2 de F existe una función $f \supseteq \sup\{f_1, f_2\}$ (\mathbf{C}) perteneciente a F . En particular, diremos que F es totalmente ordenado si cualesquiera que sean las funciones f_1 y f_2 de F se tiene $f_1 = \sup \{f_1, f_2\}$ o $f_2 = \sup \{f_1, f_2\}$ (\mathbf{C}).

PROPOSICIÓN 12. Si F es un conjunto dirigido de funciones aditivas en X existe

$$(1.11) \quad f^* = \sup \{f \mid f \in F\} \quad (\mathbf{C}).$$

DEMOSTRACIÓN. Como según la proposición 11, cualquiera que sea el par (f_1, f_2) de funciones de F resulta

$$f_1(x) = f_2(x)$$

para $x \in D(f_1) \cap D(f_2)$, si ponemos

$$f^*(x) = f(x)$$

para $x \in D(f)$ y cada $f \in F$ queda definida una función f^* sobre

$$Y^* = \cup \{D(f) \mid f \in F\}.$$

Esta función f^* es una función aditiva. En efecto, como para todo par (x_1, x_2) de elementos de Y^* existen dos funciones f_1 y f_2 pertenecientes a F tales que

$$x_1 \in D(f_1) \text{ y } x_2 \in D(f_2)$$

y, por ser F un conjunto dirigido (\mathbf{C}), existe una función $f \supseteq \sup\{f_1, f_2\}$ perteneciente a F , tendremos :

a) $x_1 - x_2 \in D(f) \subset Y^*$ y, por consiguiente, Y^* ($\neq \emptyset$) es un subgrupo de X .

b) $x_1 + x_2 \in D(f)$ y

$$\begin{aligned} f^*(x_1 + x_2) &= f(x_1 + x_2) \\ &= f(x_1) + f(x_2) = f^*(x_1) + f^*(x_2). \end{aligned}$$

Con esto queda probado que f^* es una función aditiva en X .

Finalmente, $f^* \supset f$ para cada $f \in F$ y si g es una función aditiva en X tal que $g \supset f$ para cada $f \in F$ resulta $g \supset f^*$. Por tanto,

$$f^* = \sup \{f | f \in F\} \quad (\mathbf{C})$$

y existe este supremo.

DEFINICIÓN 9. Un conjunto F de funciones aditivas en X diremos que es un conjunto (\mathfrak{S}_2) (en X) si para todo subconjunto F_0 de F , totalmente ordenado (\mathbf{C}) , la función

$$(1.14) \quad f^* = \sup \{f | f \in F_0\} \quad (\mathbf{C})$$

pertenece a F .

PROPOSICIÓN 13. Si f_0 es una función aditiva en X , el conjunto de las funciones aditivas en X que satisfacen

$$f \supset f_0 \quad (f \in F_0)$$

es un conjunto (\mathfrak{S}_2) . En particular, el conjunto de las funciones aditivas en X es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la proposición 12.

PROPOSICIÓN 14. La intersección $\cap \{F_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ de una familia, vacía o no, de conjuntos (\mathfrak{S}_2) en un grupo aditivo X es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

DEMOSTRACIÓN. Se puede proceder de manera análoga como en la proposición 3.

PROPOSICIÓN 15. Sea P un conjunto (\mathfrak{S}_1) sobre X y $p \in P$. Si F es un conjunto (\mathfrak{S}_2) en X , el conjunto F_p de las funciones $f \in F$ que satisfacen $p \in P(f)$ es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

DEMOSTRACIÓN. Sea $F_0 = \{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ un subconjunto totalmente ordenado (\mathbf{C}) de F_p , y

$$f = \sup \{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \quad (\mathbf{C}).$$

Entonces, si ponemos $q = f[p]$ y $q_\lambda = f_\lambda[p]$, resulta

$$\begin{aligned} q(x) &= \inf_{y \in Y} [p(x+y) - f(y)] && (Y = D(f)) \\ &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \inf_{y \in Y_\lambda} [p(x+y) - f_\lambda(y)] && (Y_\lambda = D(f_\lambda)) \\ &= \inf_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$.

Por otra parte, $Q_0 = \{q_\lambda | \lambda \in A\} = F_0[\hat{p}]$ es un subconjunto totalmente ordenado de P puesto que: 1) $q_\lambda = f_\lambda[\hat{p}] \in P$ por ser $f_\lambda \in F_p$. 2) F_0 es un subconjunto totalmente ordenado (\mathbf{C}) de F . 3) Si $f_\lambda, \mathbf{C} f_{\lambda'}$, resulta $q_{\lambda'} \geq q_\lambda$. Por tanto, siendo P un conjunto (\approx_1) y $f \in F$, tendremos $q = f[\hat{p}] \in P$, $\hat{p} \in P(f)$ y $f \in F_p$, de donde se deduce que F_p es un conjunto (\approx_2).

TEOREMA 1. *Sea P un conjunto (\approx_1) sobre X y F un conjunto (\approx_2) en X . Si $p_0 \in P$, $f_0 \in F$ y $p_0 \in P(f_0)$ existen dos funciones $p \in P$ y $f \in F$ tales que:*

- 1 a) $f \supset f_0$.
- b) $p_0 \in P(f)$.
- c) Si $g \in F$, $p_0 \in P(g)$ y $g \supset f$ resulta $g = f$.
- 2 a) $p \leq p_0$.
- b) $f(y) = p(x + y) - p(x)$ para $x \in X$ e $y \in D(f)$.
- c) Si $q \in P(f)$ y $q \leq p$ resulta $q = p$.

DEMOSTRACIÓN. Por las proposiciones 2, 3 y 4,

$$P^* = \{\hat{p} | \hat{p} \in P, \hat{p} \leq p_0\}$$

es un conjunto (\approx_1) con $p_0 \in P^*$ y $p_0 \in P^*(f_0)$ y, por las proposiciones 13 y 14,

$$F^* = \{f | f \in F, f \supset f_0\}$$

es un conjunto (\approx_2). Entonces, por la proposición 15 y el axioma de ZORN, existe una función $f \in F^*$ con $p_0 \in P^*(f)$ tal que si $g \in F^*$, $p_0 \in P^*(g)$ y $g \supset f$ resulta $g = f$. Con esto se ve fácilmente que las condiciones 1a), b) y c) quedan satisfechas.

De manera análoga por la proposición 10 y el axioma de ZORN existe una función $\hat{p} \in P^*(f) \mathbf{C} P^*$ tal que si $q \in P^*(f)$ y $q \leq \hat{p}$ resulta $q = \hat{p}$. De aquí se deducen inmediatamente 2a) y 2c). Para demostrar 2b) es suficiente probar, según la proposición 5, que $f[\hat{p}] = \hat{p}$. Efectivamente, como por la proposición 6 para $q = f[\hat{p}]$ se verifica $q = f[q] \in P^*(f)$ y $q \leq \hat{p}$, resulta $f[\hat{p}] = \hat{p}$.

COROLARIO 3. *Con las mismas condiciones y notaciones del teorema 1, si $g \in F$, $q \in P(g)$, $g \supset f$ y $q \leq p$ resulta $q = p$ y $g[p] = p$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, entonces para $r = g[q] \in P$ por la proposición 6 y corolario 1 tendremos $r = g[r] = f[r]$, $r \in P(f)$ y $r \leq q \leq \hat{p}$, de donde en virtud de 2c) resulta $r = \hat{p}$ y $q = \hat{p}$ y, por consiguiente, $g[\hat{p}] = \hat{p}$.

TEOREMA 2. Sea P un conjunto (\mathfrak{S}_1) sobre X y F un conjunto (\mathfrak{S}_2) en X . Si $p_0 \in P$, $f_0 \in F$ y $p_0 \in P(f_0)$ existen dos funciones $p \in P$ y $f \in F$ tales que :

- 1 a) $p \leq p_0$.
- b) Si $q \in P(f_0)$ y $q \leq p$ resulta $q = p$.
- 2 a) $f \supset f_0$.
- b) $f(y) = p(x + y) - p(x)$ para $x \in X$ e $y \in D(f)$.
- c) Si $g \in F$, $p \in P(g)$ y $g \supset f$ resulta $g = f$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$P^* = \{p \mid p \in P, p \leq p_0\}$$

y

$$F^* = \{f \mid f \in F, f \supset f_0\}$$

entonces, como en el teorema 1, se deduce que P^* es un conjunto (\mathfrak{S}_1) y F^* es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

Por la proposición 10 y el axioma de ZORN existe una función $p \in P^*(f_0) \subset P^*$ tal que si $q \in P^*(f_0)$ y $q \leq p$ resulta $q = p$ y, por tanto, 1a) y 1b).

Análogamente por la proposición 15 y el axioma de ZORN existe una función $f \in F^*$ con $p \in P^*(f)$ tal que si $g \in F^*$, $p \in P^*(g)$ y $g \supset f$ resulta $g = f$. De aquí se deducen de manera inmediata 2a) y 2c). Finalmente, como según la proposición 6 y el corolario 1 $q = f[p]$ satisface $q \in P^*$, $q = f[q] = f_0[q]$, $q \in P^*(f_0)$ y $q \leq p$, teniendo presente 1b) resulta $f[p] = p$ y, por consiguiente, 2b).

COROLARIO 4. Con las condiciones y notaciones del teorema 2, si $g \in F$, $q \in P(g)$, $g \supset f_0$ y $q \leq p$ resulta $q = p$ y $g[p] = p$. Si además $g \supset f$ se sigue $g = f$.

DEMOSTRACIÓN. Basta proceder de manera análoga como en el corolario 3 teniendo presente 1b) y 2c).

OBSERVACIÓN 4. Si se aplica el teorema 1 o el teorema 2 a las funciones p y f que se obtienen aplicando éste a p_0 y f_0 se sigue del corolario 4 que las nuevas funciones obtenidas p^* y f^* son respectivamente idénticas a p y f . Si se realiza la misma operación con las funciones p y f obtenidas aplicando el teorema 1 a p_0 y f_0 parece que solamente se puede asegurar que $p^* = p$.

PROPOSICIÓN 16. Con las condiciones y notaciones del teorema 1 o del teorema 2 si para cada entero $n \geq 1$ la función

$$(1.15) \quad \phi_n: \phi_n(x) = \frac{\phi(nx)}{n} \quad (x \in X)$$

pertenece a P resulta

$$(1.16) \quad \phi(nx) = n\phi(x)$$

para cada $x \in X$ y cada entero $n \geq 1$ y, por tanto, $\phi(0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, siendo evidentemente

$$f(y) = \phi_n(x + y) - \phi_n(x)$$

para $x \in X$ e $y \in D(f)$, por la proposición 5 tendremos $\phi_n \in P(f) \subset P(f_0)$ para cada entero $n \geq 1$. De aquí y de $\phi_n \leq \phi$ se deduce, teniendo presente 2c) (teorema 1) y 1b) (teorema 2), que $\phi_n = \phi$, es decir, (1.16).

PROPOSICIÓN 17. Con las condiciones y notaciones del teorema 1 o del teorema 2 si $\phi(0) = 0$ son equivalentes las propiedades siguientes:

1. $f \in P$.
2. $D(f) = X$.
3. $f = \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente :

1. Si $f \in P$ es $D(f) = X$.
2. Si $D(f) = X$ de 2b) resulta $f(x) = \phi(x)$ para cada $x \in X$, es decir, $f = \phi$.
3. Si $f = \phi$ se sigue $f \in P$.

PROPOSICIÓN 18. Con las condiciones y notaciones del teorema 2 se tiene $f = \phi$ si y sólo si $\phi \in F$.

DEMOSTRACIÓN. Desde luego $\phi \in F$ si $\phi = f$. Recíprocamente, si $\phi \in F$ se verifica $g \in F$, $\phi \in P(g)$ y $g \supset f$ para $g = \phi$ y, por tanto, $\phi = f$ en virtud de 2c).

TEOREMA 3. Con las condiciones del teorema 2 (o teorema 1) supongamos que P y F verifican las hipótesis :

H_1 . Para cada $f^* \in F$, $P(f^*)$ es el conjunto de las funciones $\phi^* \in P$ que satisfacen

$$\phi^*(x) \geq f^*(x)$$

para todo $x \in D(f^*)$ (4).

H_2 . Si f_1 y f_2 pertenecen a F y existe

$$f^* = \sup \{f_1, f_2\} \quad (\mathbf{C})$$

resulta $f^* \in F$.

Entonces, si $g \in F$, $p \in P(g)$ y $p(0) = 0$, se tiene $g \mathbf{C} f$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar vamos a probar la existencia de

$$f^* = \sup \{f, g\} \quad (\mathbf{C}).$$

En efecto, como por H_1 , 2b) y $p(0) = 0$ se verifica

$$g(x) \leq p(x) = f(x)$$

y

$$-g(x) = g(-x) \leq p(-x) = -f(x)$$

para cada $x \in D(f) \cap D(g)$, resulta

$$g(x) = f(x)$$

para cada $x \in D(f) \cap D(g)$. Por tanto, según la proposición 11, existe $f^* = \sup \{f, g\} \quad (\mathbf{C})$.

Como además para todo $x \in D(f^*) = D(f) + D(g)$ se pueden encontrar dos elementos $y \in D(f)$ y $z \in D(g)$ de manera que $x = y + z$, tendremos

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(y) + g(z) \leq f(y) + p(z) \\ &= p(x) \leq p_0(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in D(f^*)$ en virtud de 2b). De esto resulta, teniendo presente H_2 y H_1 , que $f^* \in F$, $p \in P(f^*)$ ($p_0 \in P(f^*)$) y $f^* \supset f$ y, por consiguiente, que $f^* = f$ y $g \mathbf{C} f$.

COROLARIO 5. Con las hipótesis y notaciones del teorema 3 supongamos:

H_3 . Cualquiera que sea la función $p^* \in P$ se verifica

$$(1.17) \quad \cup \{D(g) \mid g \in F, p^* \in P(g)\} = X.$$

Entonces, si $p(0) = 0$, es $D(f) = X$.

⁽⁴⁾ Según la observación 3 si $p \in P(f)$ se verifica $p(x) \geq f(x)$ para cada $x \in D(f)$.

§ 2. GENERALIZACION SOBRE MODULOS DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH

DEFINICIÓN 10. En esta parte designaremos por A un anillo con elemento unidad 1 y por r un homomorfismo real no nulo sobre A , es decir, un homomorfismo no constante de A en el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Por tanto,

$$(2.1) \quad r(a + b) = r(a) + r(b)$$

y

$$(2.2) \quad r(ab) = r(a)r(b)$$

para cada par (a, b) de elementos de A , y

$$(2.3) \quad r(0) = 0 \text{ y } r(1) = 1.$$

DEFINICIÓN 11. Igualmente designaremos aquí por X un módulo sobre A o un A -módulo, esto es, un grupo aditivo tal que a cada par $(a, x) \in A \times X$ se hace corresponder un elemento $ax \in X$ de forma que:

1. $a(x + y) = ax + ay$ para todo par (x, y) de elementos de X y $a \in A$.

2. $(a + b)x = ax + bx$ para todo par (a, b) de elementos de A y $x \in X$.

3. $(ab)x = a(bx)$ para todo par (a, b) de elementos de A y $x \in X$

4. $1x = x$ para todo $x \in X$.

DEFINICIÓN 12. Diremos que f es una función modular o A -modular (en X) si f es una función aditiva en X , definida sobre un submódulo Y de X , que satisface

$$(2.4) \quad f(ax) = r(a)f(x)$$

para cada $(a, x) \in A \times Y$.

OBSERVACIÓN 5. Si f es una función aditiva en X , definida sobre un submódulo Y de X y no nula, que satisface

$$(2.5) \quad f(ax)f(y) = f(ay)f(x)$$

para cada par (x, y) de elementos de Y y $a \in A$, se sigue que

$$r: r(a) = \frac{f(ax_0)}{f(x_0)} \quad (f(x_0) \neq 0)$$

es un homomorfismo no nulo de A en \mathbb{R} .

DEFINICIÓN 13. Diremos que A^+ es un semi-anillo (r) generador de A si

1. $A^+ + A^+ \subset A^+$.
2. $A^+ A^+ \subset A^+$.
3. $r(A^+) \subset (0, +\infty)$, es decir, $r(a) > 0$ para todo $a \in A^+$.
4. $A = A^+ - A^+$ ⁽⁵⁾.

DEFINICIÓN 14. Diremos que p es una función semi-modular o A^+ -semi-modular (sobre X) si p es una función subaditiva sobre X que satisface

$$(2.6) \quad p(ax) \leq r(a)p(x)$$

para cada $(a, x) \in A^+ \times X$.

OBSERVACIÓN 6. Sea H un subconjunto de A^+ tal que todo elemento de A^+ es suma de productos de uno o más factores de H . Entonces, si p es una función subaditiva sobre X que verifica (2.6) para cada $(a, x) \in H \times X$, resulta que p es una función semi-modular sobre X . Por tanto sin ningún inconveniente podemos suponer en este trabajo, debido al papel que desempeña A^+ , que $1 \in A^+$.

PROPOSICIÓN 19. Sea P el conjunto de las funciones A^+ -semi-modulares sobre X y F el conjunto de las funciones A -modulares en X . Entonces:

H_0 . P es un conjunto (\mathfrak{S}_1) y F es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

H_1 . Para cada $f \in F$, $P(f)$ es el conjunto de las funciones $p \in P$ que satisfacen

$$p(x) \geq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$.

H_2 . Si f_1 y f_2 pertenecen a F y existe

$$f = \sup \{f_1, f_2\} \quad (\subset)$$

resulta $f \in F$.

DEMOSTRACIÓN. H_0 . En efecto, si P_0 es un subconjunto totalmente ordenado de P se deduce por la proposición 2 que

$$p^* = \inf \{p \mid p \in P_0\}$$

⁽⁵⁾ De acuerdo con esta definición decimos que un subconjunto S de un anillo es un semi-anillo si $S + S \subset S$ y $SS \subset S$. El conjunto de los números naturales es un semi-anillo.

es una función subaditiva sobre X y como además

$$\begin{aligned}\phi^*(ax) &= \inf \{\phi(ax) \mid \phi \in P_0\} \\ &\leq r(a) \inf \{\phi(x) \mid \phi \in P_0\} \quad (r(a) > 0) \\ &= r(a)\phi^*(x)\end{aligned}$$

para todo $(a, x) \in A^+ \times X$, resulta $\phi^* \in P$ y, por consiguiente, que P es un conjunto (\mathfrak{S}_1) .

De manera análoga, si F_0 es un subconjunto totalmente ordenado (\mathbf{C}) de F , se obtiene que

$$f^* = \sup \{f \mid f \in F_0\} \quad (\mathbf{C})$$

es una función modular en X , es decir, $f^* \in F$ y, por tanto, que F es un conjunto (\mathfrak{S}_2) .

H_1 . Desde luego si $\phi \in P(f)$ se verifica

$$\phi(x) \geq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$. Recíprocamente, si $f \in F$ y ϕ satisface esta desigualdad para todo $x \in D(f)$, se deduce por la proposición 4 que $q = f[\phi]$ es una función subaditiva sobre X .

Como además

$$\begin{aligned}q(ax) &= \inf_{y \in Y} [\phi(ax + y) - f(y)] \quad (Y = D(f)) \\ &\leq \inf_{y \in Y} [\phi(ax + ay) - f(ay)] \\ &\leq r(a) \inf_{y \in Y} [\phi(x + y) - f(y)] \\ &= r(a)q(x)\end{aligned}$$

para cada $(a, x) \in A^+ \times X$, resulta $f[\phi] \in P$ y, por tanto, $\phi \in P(f)$.

H_2 . Si f_1 y f_2 pertenecen a F y existe

$$f = \sup \{f_1, f_2\} \quad (\mathbf{C}),$$

por la demostración de la proposición 11 es

$$D(f) = D(f_1) + D(f_2)$$

y

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

para $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in D(f_1)$ y $x_2 \in D(f_2)$. Por tanto, para todo $x \in D(f)$ existen dos elementos $x_1 \in D(f_1)$ y $x_2 \in D(f_2)$ tales que $x = x_1 + x_2$ y

$$\begin{aligned}f(ax) &= f_1(ax_1) + f_2(ax_2) \quad (ax_k \in D(f_k)) \\ &= r(a)[f_1(x_1) + f_2(x_2)] \\ &= r(a)f(x)\end{aligned}$$

para cada $(a, x) \in A^+ \times D(f)$, y de aquí resulta $f \in F$.

TEOREMA 4. Sea P el conjunto de las funciones A^+ —semimodulares sobre X y F el conjunto de las funciones A —modulares en X . Entonces, si $p_0 \in P$ y $f_0 \in F$ satisfacen

$$(2.7) \quad f_0(x) \leq p_0(x)$$

para todo $x \in D(f_0)$, existen dos funciones $p \in P$ y $f \in F$ tales que :

1. $p \leq p_0$ y $f \supseteq f_0$.

2. Para cada $x \in X$ e $y \in D(f)$ se verifica

$$(2.8) \quad f(y) = p(x + y) - p(x) = p(y).$$

3. Si $q \in P$ satisface

$$f_0(x) \leq q(x)$$

para todo $x \in D(f_0)$ y $q \leq p$, resulta $q = p$.

4. Si $g \in F$ satisface

$$g(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in D(g)$, resulta $g \subset f$.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de los teoremas 2 y 3 teniendo en cuenta las proposiciones 19 y 16.

PROPOSICIÓN 20. Con las condiciones y notaciones del teorema 4, $x \in D(f)$ si y sólo si

$$(2.9) \quad p(ax) = r(a)p(x)$$

para todo $a \in A^+$.

DEMOSTRACIÓN. Desde luego si $x \in D(f)$ de (2.8) resulta

$$\begin{aligned} p(ax) &= f(ax) = r(a)f(x) \\ &= r(a)p(x) \end{aligned}$$

para todo $a \in A^+$.

Recíprocamente vamos a probar que $x \in D(f)$ si se verifica (2.9) para todo $a \in A^+$. En efecto, si a y b son dos elementos de A tales que $ax = bx$, siendo $a - b = c'' - c'$ para algún par (c', c'') de elementos de A^+ , tendremos

$$\begin{aligned} r(a)p(x) - r(b)p(x) &= r(c'' - c')p(x) \\ &= r(c'')p(x) - r(c')p(x) \\ &= p(c''x) - p(c'x) = 0 \end{aligned}$$

puesto que $c''x - c'x = (a - b)x = 0$.

Por tanto,

$$g : g(ax) = r(a)p(x)$$

es una función real definida sobre el submódulo Ax de X . Esta función pertenece evidentemente a F , es decir, es una función modular en X . Además, como cualquiera que sea $a \in A$ existen dos elementos a' y a'' de A^+ tales que $a = a'' - a'$, se deduce

$$\begin{aligned} g(ax) &= r(a)p(x) \\ &= r(a'')p(x) - r(a')p(x) \\ &= p(a''x) - p(a'x) \\ &\leq p(ax) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Aplicando entonces el teorema 4.4 resulta $g \subset f$ y, por consiguiente, $x \in D(f)$ puesto que $x \in Ax$ por poseer A elemento unidad.

PROPOSICIÓN 21. *Con las condiciones y notaciones del teorema 4 resulta*

$$(2.10) \quad D(f) = \{x | p(x) + p(-x) \leq 0\} \quad (x \in X).$$

DEMOSTRACIÓN. Desde luego

$$D(f) \subset \{x | p(x) + p(-x) \leq 0\} \quad (x \in X)$$

puesto que

$$p(x) + p(-x) = f(x) + f(-x) = 0$$

para cada $x \in D(f)$.

Recíprocamente, si

$$p(x) + p(-x) \leq 0 \quad (x \in X),$$

resulta

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(ax) + p(-ax) \\ &\leq r(a)[p(x) + p(-x)] \leq 0 \end{aligned}$$

para todo $a \in A^+$ y, por tanto,

$$p(ax) = r(a)p(x)$$

para todo $a \in A^+$, de donde se deduce $x \in D(f)$ según la proposición 20. Por consiguiente,

$$D(f) \supset \{x | p(x) + p(-x) \leq 0\} \quad (x \in X)$$

y la proposición queda probada.

TEOREMA 5. Con las condiciones y notaciones del teorema 4 si C es el centro de A y existe un subgrupo multiplicativo G de A^+ tal que

$$(2.11) \quad A^+ \subset GC$$

resulta $D(f) = X$.

DEMOSTRACIÓN. Designemos por ϕ_a para $a \in A^+$ la función definida poniendo

$$(2.12) \quad \phi_a(x) = \frac{\phi(ax)}{r(a)}$$

para cada $x \in X$. Siendo evidentemente ϕ_a una función subaditiva sobre X , para demostrar que $\phi_a \in P$ será suficiente probar que

$$\phi_a(bx) \leq r(b)\phi_a(x)$$

para todo $(b, x) \in A^+ \times X$, o lo que es equivalente que

$$(2.13) \quad \phi(abx) \leq r(b)\phi(ax)$$

para todo $(b, x) \in A^+ \times X$. En efecto, como

$$\phi(ax) = r(a)\phi(x)$$

para cada $(a, x) \in G \times X$ y, por hipótesis, para $(a, b) \in A^+ \times A^+$ se pueden encontrar dos elementos a' y b' de G y otros dos a'' y b'' de C de modo que $a = a'a''$ y $b = b'b''$, tendremos:

$$\begin{aligned} \phi(abx) &= \phi(a'b'a''b''x) \\ &= r(a')r(b')\phi(a''b''x) \\ &= r(b')r(a')\phi(b''a''x) \\ &= \phi(b'a'b''a''x) \\ &= \phi(bax) \\ &\leq r(b)\phi(ax) \end{aligned}$$

para toda terna $(a, b, x) \in A^+ \times A^+ \times X$. Por tanto, $\phi_a \in P$ y, como evidentemente $\phi_a \leq \phi$ y se verifica

$$f_0(x) \leq \phi_a(x) \quad (a \in A^+)$$

para cada $x \in D(f_0)$, aplicando el teorema 4.3 resulta $\phi_a = \phi$ para todo $a \in A^+$, es decir,

$$\phi(ax) = r(a)\phi(x)$$

para todo par $(a, x) \in A^+ \times X$. Entonces, según la proposición 20, $x \in D(f)$ para cada $x \in X$ y el teorema queda demostrado.

COROLARIO 6. *Con las condiciones y notaciones del teorema 4, si A es un anillo conmutativo existe una función modular $f \supseteq f_0$ definida sobre X que satisface*

$$(2.14) \quad f(x) \leq p_0(x)$$

para cada $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce inmediatamente del teorema 5 teniendo presente que según la observación 6 puede suponerse que $1 \in A^+$.

OBSERVACIÓN 7. *Si A es un cuerpo, r es un isomorfismo de A en R y, por consiguiente, A es conmutativo. En efecto, como $I_r = r^{-1}(0)$ es un ideal bilateral de A que no contiene a 1, resulta $r^{-1}(0) = 0$ y de aquí se sigue la afirmación.*

PROPOSICIÓN 22. *Dada una función semimodular p sobre X con $p(0) = 0$, sea*

$$(2.15) \quad X_p = \{x | x \in X, p(x) \leq 0 \text{ y } p(-x) \leq 0\}$$

e

$$(2.16) \quad I_p = \{a | a \in A, p(ax) \leq 0 \text{ para } \forall x \in X\}.$$

Entonces,

1. X_p es un submódulo de X .
2. I_p es un ideal bilateral de A .
3. $X^* = X/X_p$ es un módulo sobre $A^* = A/I$, siendo $I = I_p \cap I_r$ e $I_r = r^{-1}(0)$.
4. La función real r^* definida por

$$(2.17) \quad r^*(a^*) = r(a)$$

para $a^* = a + I \in A^*$ es un homomorfismo no nulo de A^* en R .

DEMOSTRACIÓN. Como evidentemente $X_p \neq \emptyset$ e $I_p \neq \emptyset$, basta probar

- 1a) $X_p - X_p \subset X_p$
- b) $AX_p \subset X_p$
- 2a) $I_p - I_p \subset I_p$
- b) $I_p A \subset I_p$
- c) $AI_p \subset I_p$,

ya que las propiedades 3 y 4 se siguen de 1 y 2 y de $I_p X \subset X_p$.

No ofreciendo ninguna dificultad la demostración de 1a), 2a) y 2b) nos limitaremos a probar 1b) y 2c). Efectivamente, como para cada $a \in A$ existen dos elementos a' y a'' de A^+ tales que $a = a'' - a'$, para todo $(a, x) \in A \times X_p$ tendremos

$$\begin{aligned} \phi(ax) &\leq \phi(a''x) + \phi(-a'x) \\ &\leq r(a'')\phi(x) + r(a')\phi(-x) \leq 0 \end{aligned}$$

y

$$\phi(-ax) \leq 0.$$

Por tanto, $AX_p \subset X_p$.

De igual forma para cada $(a, b) \in A \times I_p$ resulta

$$\phi(abx) \leq r(a'')\phi(bx) + r(a')\phi(-bx) \leq 0$$

para todo $x \in X$ y, por consiguiente, $AI_p \subset I_p$.

OBSERVACIÓN 8. Si p es una función subaditiva sobre X con $p(0) = 0$,

$$(2.16) \quad I_p = \{a \mid a \in A, \phi(ax) \leq 0 \text{ para } \forall x \in X\}$$

es un ideal a la derecha de A .

PROPOSICIÓN 23. Sea p una función subaditiva sobre X con $p(0) = 0$ y f una función modular en X que satisface

$$f(x) \leq \phi(x)$$

para todo $x \in D(f)$ y

$$f(x_0) \neq 0$$

para algún $x_0 \in D(f)$. Entonces, $I_p \subset I_f$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, como para cada $a \in I_p$ es

$$r(a)f(x_0) = f(ax_0) \leq \phi(ax_0) \leq 0$$

y

$$r(a)f(-x_0) \leq 0,$$

resulta $r(a)f(x_0) = 0$ y $r(a) = 0$ para todo $a \in I_p$ y, por tanto, $I_p \subset I_f$.

PROPOSICIÓN 24. Con las notaciones de la proposición 22 sea p una función semimodular sobre X con $p(0) = 0$ y

$$(2.18) \quad \phi^*(x^*) = \{\phi(x') \mid x' \in x^* = x + X_p\}.$$

Entonces p^* es una función $(A^*)^+$ - semimodular sobre X^* , siendo $(A^*)^+ = (A^+ + I)/I$.

DEMOSTRACIÓN. Desde luego se puede comprobar fácilmente que $(A^*)^+$ es un semi-anillo (r^*) generador de A^* .

Si $x' - x \in X_p$ tendremos

$$\phi(x') \leq \phi(x) + \phi(x' - x) \leq \phi(x)$$

y

$$\phi(x) \leq \phi(x').$$

Por tanto,

$$\phi^*(x^*) = \phi(x)$$

para $x^* = x + X_p$ y ϕ^* es una función real definida sobre X^* .

Finalmente, siendo

$$\begin{aligned} \phi^*(x^*_1 + x^*_2) &= \phi(x_1 + x_2) \\ &\leq \phi(x_1) + \phi(x_2) \\ &= \phi^*(x^*_1) + \phi^*(x^*_2) \end{aligned}$$

para $x^*_i = x_i + X_p \in X^*$ ($i = 1, 2$) y

$$\begin{aligned} \phi^*(a^*x^*) &= \phi(ax) \\ &\leq r(a)\phi(x) \\ &= r^*(a^*)\phi^*(x^*) \end{aligned}$$

para $a^* = a + I \in (A^*)^+$, se deduce que ϕ^* es una función $(A^*)^+$ -semimodular sobre X^* .

TEOREMA 6. Con las condiciones y notaciones del teorema 4 y proposición 22, sean ϕ^* y f^* las funciones reales definidas así:

$$(2.18) \quad \phi^*(x^*) = \phi(x)$$

para $x^* = x + X_p \in X^*$ y

$$(2.19) \quad f^*(x^*) = f(x) \quad (= \phi^*(x^*))$$

para $x^* = x + X_p \in D(f)/X_p$ ⁽⁶⁾.

Entonces:

1. Para cada $x^* \in X^*$ e $y^* \in D(f^*) = D(f)/X_p$ se verifica

$$(2.20) \quad f^*(y^*) = \phi^*(x^* + y^*) - \phi^*(x^*) = \phi^*(y^*).$$

⁽⁶⁾ Obsérvese que de la proposición 21 se sigue $X_p \subset D(f)$.

2. Si q^* es una función $(A^*)^+$ —semimodular sobre X^* que satisface

$$f^*(x^*) \leq q^*(x^*)$$

para todo $x^* \in D(f^*)$ y $q^* \leq p^*$ resulta $q^* = p^*$.

3. Si g^* es una función modular en X^* que satisface

$$g^*(x^*) \leq p^*(x^*)$$

para todo $x^* \in D(g^*)$ resulta $g^* \subset f^*$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente del teorema 4 tomando

$$q(x) = q^*(x^*)$$

para $x \in X^*$ y

$$g(x) = g^*(x^*)$$

para $x \in D(g^*)$.

TEOREMA 7. Con las condiciones y notaciones del teorema 4 y proposición 22 son equivalentes las propiedades:

1. $I_r \subset I_p$.
2. A/I es un anillo conmutativo ⁽⁷⁾.
3. $D(f) = X$.
4. $p = f$.

DEMOSTRACIÓN. 1 \rightarrow 2. En efecto, siendo entonces $I = I_r$, se sigue que A/I es isomorfo a un subanillo de R .

2 \rightarrow 3. Si $A^* = A/I$ es un anillo conmutativo, se deduce del teorema 6 y del corolario 6 que $D(f^*) = X^*$ y, por tanto, $D(f) = X$.

3 \rightarrow 4. Basta aplicar la proposición 17.

4 \rightarrow 1. En efecto, si $p = f$ resulta

$$\begin{aligned} p(ax) &= f(ax) \\ &= r(a) f(x) = 0 \end{aligned}$$

para todo $a \in I_r$ y, por consiguiente, $I_r \subset I_p$.

⁽⁷⁾ A/I es conmutativo si y sólo si $(A^+ + I)/I$ es conmutativo.

COROLARIO 7. Con las condiciones y notaciones del teorema 4 y proposición 22, $D(f) = X$ si y sólo si se verifica una cualquiera de las condiciones:

1. $p(ax) \leq 0$ para todo $x \in X$ siempre que $r(a) = 0$.
2. $ab - ba \in I_p$ para todo par (a, b) de elementos de A o de A^+ .

COROLARIO 8. Con las condiciones y notaciones del teorema 4, si $D(f) \neq X$ para cada $x \in X \sim D(f)$ se puede encontrar un elemento $a \in I_r = r^{-1}(0)$ de forma que $p(ax) > 0$ ⁽⁸⁾.

DEMOSTRACIÓN. Sea Z el mínimo submódulo de X que contiene a $D(f)$ y x . Entonces, aplicando el corolario 7.1, se deduce que existen dos elementos $a' \in I_r$ y $z = y + a''x \in Z$ con $y \in D(f)$ y $a'' \in A$ que verifican $p(a'z) > 0$. Por consiguiente, para $a = a'a'' \in I_r$, resulta en virtud de (2.8) que

$$p(ax) = p(a'z) - f(a'y) = p(a'z) > 0.$$

Antes de pasar al teorema 8 conviene exponer algunos conceptos y proposiciones de la teoría de grupos. Por brevedad omitimos aquí las demostraciones de estas proposiciones, pero el lector podrá encontrarlas en [13] junto con otras relacionadas con la misma cuestión.

DEFINICIÓN 15. Diremos que un grupo G es perfecto si para todo subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_0}; \beta_1, \dots, \beta_{j_0}\}$ de G se puede encontrar otro $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h_0}; \eta_1, \dots, \eta_{k_0}\} \subset G$ tal que se pueda establecer una correspondencia biunívoca φ entre los conjuntos $\{(h, i) | 1 \leq h \leq h_0; 1 \leq i \leq i_0\}$ y $\{(k, j) | 1 \leq k \leq k_0; 1 \leq j \leq j_0\}$ de forma que sea $\xi_h \alpha_i = \eta_k \beta_j$ siempre que $(k, j) = \varphi(h, i)$ ⁽⁹⁾.

PROPOSICIÓN 25. Sea G un grupo y H un subconjunto de G tal que todo subconjunto finito de H está contenido en un subgrupo finito de G . Entonces, si cada elemento de G es producto de un elemento del centro de G y de otro perteneciente a H , G es un grupo perfecto.

COROLARIO 9. Todo grupo abeliano o finito es perfecto.

PROPOSICIÓN 26. Sea G un subgrupo multiplicativo de un anillo A , G_0 un divisor normal de G e I el ideal bilateral de A engendrado

⁽⁸⁾ Designamos por $A \sim B$ la diferencia conjuntista de A y B , es decir, la intersección de A y el complementario de B .

⁽⁹⁾ En realidad deberíamos llamar « grupos perfectos por la izquierda » a estos grupos, pero se ve fácilmente considerando $\{\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots; \beta_1^{-1}, \dots, \beta_{j_0}^{-1}\}$ que un grupo es perfecto por la derecha si y sólo si lo es por la izquierda.

por $G_0 - G_0$. Entonces, si G/G_0 es un grupo perfecto, para cada par (a, b) de elementos del semi-anillo S engendrado por G se puede encontrar otro par $\{a', b'\} \subset S$ de forma que $a'a - b'b \in I$.

DEFINICIÓN 16. Una familia $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ de subgrupos de G diremos que es una serie normal transfinita de G si Λ es un conjunto bien ordenado con último elemento y se verifican las condiciones:

1. $G_{\lambda_*} = \{1\}$ y $G_{\lambda^*} = G$, siendo λ_* y λ^* el primero y último elemento, respectivamente, de G .

2. Si λ es de primera especie y $\lambda - 1$ es el elemento precedente de λ , $G_{\lambda-1}$ es un divisor normal de G_λ ⁽¹⁰⁾.

3. Si λ es de segunda especie, $G_\lambda = \bigcup \{G_{\lambda'} | \lambda' < \lambda\}$.

Los grupos $G_{\lambda+1}/G_\lambda$ ($\lambda < \lambda^*$) se llaman los grupos cocientes de dicha serie normal.

DEFINICIÓN 17. Un grupo G se dice accesible si existe una serie normal transfinita de G cuyos grupos cocientes son todos perfectos.

OBSERVACIÓN 9. Todo grupo resoluble es accesible.

PROPOSICIÓN 27. Si G es un grupo accesible y G_0 es un subgrupo de G , G_0 es también un grupo accesible.

TEOREMA 8. Con las condiciones y notaciones del teorema 4 resulta $D(f) = X$ si existe un subgrupo multiplicativo G de A^+ que cumple las condiciones:

1. G es un grupo accesible.

2. Todo elemento a de A^+ es suma finita $\sum_1^n c_i \alpha_i$ de productos $c_i \alpha_i$ donde los primeros factores c_i pertenecen al centro $C^+ = C \cap A^+$ de A^+ y los segundos $\alpha_i \in G$.

DEMOSTRACIÓN. Como según la proposición 27

$$G^* = \{\alpha | \alpha \in G, r(\alpha) = 1\}$$

es un grupo accesible, existe una serie normal transfinita $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda^*\}$ de G^* cuyos grupos cocientes $G_{\lambda+1}/G_\lambda$ ($\lambda < \lambda^*$) son todos perfectos.

⁽¹⁰⁾ Análogamente designaremos por $\lambda + 1$ el elemento siguiente a λ ($\lambda < \lambda^*$).

Sean :

- a) $G_{\lambda^*+1} = G$ para $\lambda^* = \sup\{\lambda | \lambda \in A^*\}$ y $A = A^* \cup \{\lambda^* + 1\}$.
 b) S_λ el semi-anillo engendrado por G_λ , es decir, el conjunto de los elementos de A que son suma finita de elementos de G_λ ($\lambda \in A$).
 c) A_λ el anillo $S_\lambda - S_\lambda$ ($\lambda \in A$).
 d) I_λ el ideal bilateral de $A_{\lambda+1}$ engendrado por $G_\lambda - G_\lambda$ ($\lambda \in A^*$).
 Entonces, si ponemos

$$(2.21) \quad \phi_\lambda = \inf \{\phi_a | a \in S_\lambda\} \quad (\lambda \in A)$$

con

$$\phi_a(x) = \frac{\phi(ax)}{r(a)} \quad (x \in X),$$

para $\lambda \leq \mu$ y $\{\lambda, \mu\} \subset A$ resulta

$$\begin{aligned} \inf_{b \in S_\mu} \frac{\phi_\lambda(bx)}{r(b)} &= \inf_{b \in S_\mu} \frac{1}{r(b)} \inf_{a \in S_\lambda} \frac{\phi(abx)}{r(a)} \\ &= \inf_{(a,b) \in S_\lambda \times S_\mu} \frac{\phi(abx)}{r(ab)} \\ &= \inf_{c \in S_\mu} \frac{\phi(cx)}{r(c)} \quad (S_\lambda S_\mu = S_\mu) \end{aligned}$$

o sea

$$(2.22) \quad \phi_\mu = \inf \{\phi_{\lambda,a} | a \in S_\mu\} \quad (\lambda \leq \mu)$$

si

$$\phi_{\lambda,a}(x) = \frac{\phi_\lambda(ax)}{r(a)} \quad (x \in X).$$

Ahora vamos a probar por inducción transfinita que cada ϕ_λ con $\lambda \in A$ es una función subaditiva y que el ideal a la derecha asociado $I_{\phi_\lambda} \supset I_\lambda$ para $\lambda \in A^*$. Para ello basta tener presente :

1. Si λ_* es el primer elemento de A^* o A resulta

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda_*} &= \inf \{\phi_a | a \in S_{\lambda_*}\} \\ &= \phi \end{aligned}$$

e $I_{\phi_{\lambda_*}} \supset I_{\lambda_*} = \{0\}$ pues según la proposición 16 se tiene $\phi_a = \phi$ para $a \in S_{\lambda_*} = \{a | a = 1, 2, \dots\}$.

2. Si ϕ_λ es una función subaditiva sobre X y $\lambda \in A^*$ se sigue $I_\lambda \subset I_{\phi_\lambda}$ y que $\phi_{\lambda+1}$ es también subaditiva. En efecto, siendo

$$(2.23) \quad \phi_\lambda = \inf \{\phi_{\lambda,a} | a \in S_\lambda\}$$

en virtud de (2.22), para $\alpha \in G_\lambda \subset S_\lambda$ resulta

$$\phi_\lambda(x) \leq \phi_\lambda(\alpha x) / r(\alpha)$$

y

$$\phi_\lambda(\alpha x) \leq \phi_\lambda(x) / r(\alpha^{-1})$$

y, por consiguiente,

$$(2.24) \quad \phi_\lambda(\alpha x) = r(\alpha) \phi_\lambda(x) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

para todo $x \in X$.

De esto se deduce para $(\lambda, x) \in \Lambda^* \times X$,

$$\begin{aligned} \phi_\lambda((\alpha - 1)x) &\leq \frac{\phi_\lambda((\alpha^n - 1)x)}{r(\sum_0^{n-1} \alpha^k)} \quad (\sum_0^{n-1} \alpha^k \in S_\lambda) \\ &\leq \frac{\phi_\lambda(x) + \phi_\lambda(-x)}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

y

$$\phi_\lambda((\alpha - 1)x) \leq 0,$$

puesto que $r(\alpha) = 1$ para $\alpha \in G_\lambda$ y $\lambda \in \Lambda^*$. Por tanto, $G_\lambda - 1 \subset I_{\phi_\lambda}$; $G_\lambda - G_\lambda \subset I_{\phi_\lambda}$, $G_{\lambda+1}(G_\lambda - G_\lambda) = (G_\lambda - G_\lambda)G_{\lambda+1} \subset I_{\phi_\lambda}$ ⁽¹¹⁾ y finalmente, $I_\lambda \subset I_{\phi_\lambda}$ para $\lambda \in \Lambda^*$.

Para demostrar que

$$(2.25) \quad \phi_{\lambda+1} = \inf \{ \phi_{\lambda,a} \mid a \in S_{\lambda+1} \} \quad (\lambda \in \Lambda^*)$$

es una función subaditiva sobre X será suficiente probar, según la proposición 1, que para cada par (a, b) de elementos de $S_{\lambda+1}$ existe otro $c \in S_{\lambda+1}$ tal que $\phi_{\lambda,c} \leq \inf \{ \phi_{\lambda,a}, \phi_{\lambda,b} \}$. Efectivamente, siendo $G_{\lambda+1}/G_\lambda$ un grupo perfecto, por la proposición 26 se pueden encontrar dos elementos a' y b' de $S_{\lambda+1}$ de forma que $a'a - b'b \in I_\lambda \subset I_{\phi_\lambda}$. Entonces para $c = b'b$ resulta

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(cx) &= \phi_\lambda(a'ax) \\ &\leq \sum_1^n \phi_\lambda(\alpha'_i ax) \quad (a' = \sum_1^n \alpha'_i, \alpha'_i \in G_\lambda) \\ &= r(a') \phi_\lambda(ax) \end{aligned}$$

y

$$\phi_{\lambda,c}(x) \leq \phi_{\lambda,a}(x)$$

⁽¹¹⁾ Obsérvese que también G_{λ^*} es un divisor normal de G_{λ^*+1} y que $G_{\lambda^*+1}/G_{\lambda^*}$ es un grupo abeliano y, por consiguiente, perfecto.

y, análogamente,

$$\phi_{\lambda,c}(x) \leq \phi_{\lambda,b}(x)$$

para todo $x \in X$.

3. Si $\lambda \in \Lambda$ es de segunda especie se tiene

$$(2.26) \quad \phi_\lambda = \inf \{ \phi_{\lambda'} \mid \lambda' < \lambda \}.$$

Desde luego $\phi_\lambda \leq \phi_{\lambda'}$ para $\lambda > \lambda'$ puesto que $S_\lambda \supset S_{\lambda'}$. Por otra parte, como para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $a = a(x) \in S_\lambda$ tal que

$$\phi_a(x) < \phi_\lambda(x) + \varepsilon,$$

y $a \in S_{\lambda'}$ para un cierto $\lambda' = \lambda'(x) < \lambda$ por ser $S_\lambda = \bigcup \{ S_{\lambda'} \mid \lambda' < \lambda \}$, resulta

$$\phi_{\lambda'}(x) < \phi_\lambda(x) + \varepsilon$$

para todo $x \in X$ con $\lambda' = \lambda'(x) < \lambda$ y, por consiguiente, (2.26).

Con esto podemos afirmar que cada ϕ_λ con $\lambda \in \Lambda$ es una función subaditiva sobre X y que $I_{\phi_\lambda} \supset I_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda^*$. El paso que vamos a dar ahora consiste en probar que $\phi_\lambda = \phi$ para todo $\lambda \in \Lambda$. En efecto, como cada $a \in A^+$ se puede expresar en la forma $a = \sum_1^m c_i \alpha_i$ con $c_i \in C^+$ y $\alpha_i \in G$ y se verifican:

$$(2.24) \quad \phi_\lambda(\alpha x) = r(\alpha) \phi_\lambda(x) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

para $(\alpha, x) \in G_\lambda \times X$ y

$$(2.27) \quad \phi_\lambda(cx) \leq r(c) \phi_\lambda(x) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

para $(c, x) \in C^+ \times X$, tendremos

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda^*+1}(ax) &\leq \sum_1^m \phi_{\lambda^*+1}(c_i \alpha_i x) \\ &\leq \sum_1^m r(c_i) r(\alpha_i) \phi_{\lambda^*+1}(x) \\ &= r(a) \phi_{\lambda^*+1}(x) \end{aligned}$$

para todo $(a, x) \in A^+ \times X$ y ϕ_{λ^*+1} es una función A^+ -semimodular sobre X . Por tanto, como evidentemente $f_0(x) \leq \phi_{\lambda^*+1}(x)$ para todo $x \in D(f_0)$ y $\phi_{\lambda^*+1} \leq \phi$, en virtud del teorema 4.3 resulta $\phi_{\lambda^*+1} = \phi$ y $\phi_\lambda = \phi$ para cada $\lambda \in \Lambda$ puesto que $\phi \geq \phi_\lambda \geq \phi_{\lambda^*+1}$.

Para concluir es suficiente probar según el teorema 7 que el anillo cociente A/I con $I = I_\phi \cap I_r$ es conmutativo. Efectivamente, como

cualesquiera que sean los elementos a y b de A se tiene $a = \sum_1^m c_i \alpha_i$ y $b = \sum_1^n d_j \beta_j$ con $\{c_1, c_2, \dots, c_m; d_1, \dots, d_n\} \subset C$ y $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n\} \subset G$, resulta

$$\begin{aligned} ab - ba &= \sum_{i,j} c_i d_j (\alpha_i \beta_j - \beta_j \alpha_i) \\ &\subset \sum_{i,j} c_i d_j (I_{\lambda^*} \cap I_r) \\ &\subset \sum_{i,j} c_i d_j (I_p \cap I_r) \quad (\phi = \phi_{\lambda^*}) \\ &\subset I_p \cap I_r \end{aligned}$$

para todo par (a, b) de elementos de A y, por tanto, A/I es un anillo conmutativo.

OBSERVACIÓN 10. El teorema 8 sigue siendo cierto si se sustituye la condición 2 por esta otra :

2'. Para cada elemento a de A^+ se puede encontrar una suma $\sum_1^n c_i \alpha_i$ con $c_i \in C^+$ y $\alpha_i \in G$ de forma que $a - \sum_1^n c_i \alpha_i \in I_p \cap I_r$.

Estos resultados quedarán completados con los dos teoremas siguientes :

TEOREMA 9. Sea f_0 una función modular en X y ϕ_0 una función real definida sobre X . Entonces para que exista una función modular $f \supset \phi_0$ con $D(f) = X$ que verifique

$$(2.28) \quad f(x) \leq \phi_0(x)$$

para todo $x \in X$ es necesario y suficiente que

$$(2.29) \quad f_0(x) \leq \sum_1^m r(a_i) \phi_0(x_i)$$

para toda descomposición $x = \sum_1^m a_i x_i$ con $r(a_i) \geq 0$ y $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq m$, $m = 1, 2, \dots$) de cada elemento $x \in D(f_0)$.

DEMOSTRACIÓN. La condición es necesaria. En efecto, si existe una de tales funciones modulares f resulta

$$f_0(x) = \sum_1^m r(a_i) f(x_i) \leq \sum_1^m r(a_i) \phi_0(x_i).$$

La condición es suficiente. Por el teorema 7.1-3 y la observación 1 bastará probar que si H_x es el conjunto de los elementos $(a_1, a_2, \dots,$

$a_m: x_1, \dots, x_m$ de $\bigcup_1^\infty A^{\times m} \times X^{\times m}$ ⁽¹²⁾ que satisfacen $\sum_1^m a_i x_i = x$ y $r(a_i) \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$), la función real ϕ definida sobre X por

$$\phi(x) = \inf_{Hx} \sum_1^m r(a_i) \phi_0(x_i) \quad (x \in X)$$

cumple las condiciones :

1. $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$ para todo par (x, y) de elementos de X . Efectivamente,

$$\begin{aligned} \phi(x + y) &\leq \inf_{Hx} \sum_1^m r(a_i) \phi_0(x_i) + \inf_{Hy} \sum_1^n r(b_j) \phi_0(y_j) \\ &= \phi(x) + \phi(y) \end{aligned}$$

pues $\sum_1^m a_i x_i + \sum_1^n b_j y_j = x + y$, $r(a_i) \geq 0$ y $r(b_j) \geq 0$.

2. $\phi(cx) \leq r(c)\phi(x)$ para todo $x \in X$ siempre que $r(c) \geq 0$. En efecto, de igual forma que antes resulta

$$\begin{aligned} \phi(cx) &\leq \inf_{Hx} \sum_1^m r(ca_i) \phi_0(x_i) \\ &= r(c)\phi(x) \end{aligned}$$

puesto que $\sum_1^m ca_i x_i = cx$ y $r(ca_i) \geq 0$.

3. $f_0(x) \leq \phi(x)$ para cada $x \in D(f_0)$. Efectivamente, en virtud de (2.29) se tiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &\leq \inf_{Hx} \sum_1^m r(a_i) \phi_0(x_i) \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$.

TEOREMA 10. Sea f_0 una función modular en X , ϕ_0 una función real definida sobre X y φ la función definida por

$$(2.30) \quad \varphi(y) = \inf \left\{ \frac{\phi_0(x + ay) - f_0(x)}{r(a)} \mid x \in D(f_0), r(a) > 0 \right\}.$$

Entonces el conjunto F de las funciones modulares $f \supseteq f_0$ con $x_0 \in \epsilon D(f)$ que satisfacen

$$(2.28) \quad f(x) \leq \phi_0(x)$$

⁽¹²⁾ Aquí $A^{\times m} = A \times A \times \dots \times A$.

para todo $x \in D(f)$ es no vacío si y sólo si

$$(2.31) \quad f_0(x) \leq p_0(x + ax_0) \quad (x_0 \in X)$$

para cada $x \in D(f_0)$ y $r(a) = 0$, y

$$(2.32) \quad \varphi(x_0) + \varphi(-x_0) \geq 0.$$

En el caso que (2.31) y (2.32) queden satisfechas resulta

$$(2.33) \quad \{f(x_0) | f \in F\} = [-\varphi(-x_0), \varphi(x_0)] \quad (13).$$

DEMOSTRACIÓN. Desde luego, si $F \neq \emptyset$, para cada $f \in F$ tendremos

$$f(x + ax_0) \leq p_0(x + ax_0)$$

para $(a, x) \in A \times D(f_0)$ y, por consiguiente,

$$f_0(x) \leq p_0(x + ax_0)$$

para $x \in D(f_0)$ y $r(a) = 0$,

$$-\varphi(-x_0) \leq f(x_0) \leq \varphi(x_0)$$

y

$$\varphi(x_0) + \varphi(-x_0) \geq 0.$$

Luego,

$$\{f(x_0) | f \in F\} \subset J = [-\varphi(-x_0), \varphi(x_0)].$$

Recíprocamente, si se verifican (2.31) y (2.32) vamos a probar antes que nada que

$$f_t: f_t(x + ax_0) = \{f_0(x) + r(a)t | x \in D(f_0), a \in A\}$$

es una función real definida sobre $D(f_0) + Ax_0$ para cada $t \in J$.

Sea $x + ax_0 = 0$, $x \in D(f_0)$ y $r(a) = 0$, entonces

$$f_0(nx) \leq p_0(nx + nax_0) = p_0(0)$$

para todo entero n y, por consiguiente,

$$f_0(x) + r(a)t = f_0(x) = 0.$$

Si $x + ax_0 = 0$, $x \in D(f_0)$ y $r(a) > 0$, para cada $t \in J$ resulta

$$\begin{aligned} t \leq \varphi(x_0) &\leq \frac{p_0(0) - f_0(nx)}{r(na)} \\ &= \frac{p_0(0)}{nr(a)} - \frac{f_0(x)}{r(a)}, \end{aligned}$$

cualquiera que sea el entero $n \geq 1$ y, por tanto,

$$f_0(x) + r(a)t \leq 0.$$

(13) $[x_1, x_2] = \{x | x_1 \leq x \leq x_2\}$.

Como análogamente,

$$f_0(-x) + r(a)(-t) \leq 0 \quad (-t \leq \varphi(-x_0))$$

tendremos igual que antes,

$$f_0(x) + r(a)t = 0.$$

De estas conclusiones se sigue inmediatamente,

$$f_0(x') + r(a')t = f_0(x'') + r(a'')t$$

siempre que $x' + a'x_0 = x'' + a''x_0$, $\{x', x''\} \subset D(f_0)$, $\{a', a''\} \subset A$ y $t \in J$. Por tanto, para $t \in J$, f_t es una función real definida sobre $D(f_0) + Ax_0$ ⁽¹⁴⁾.

Ahora es fácil probar que $f_t \in F$ y $f_t(x_0) = t$ para cada $t \in J$ y, por consiguiente,

$$\{f(x_0) | f \in F\} = J$$

puesto que según hemos visto anteriormente $\{f(x_0) | f \in F\} \subset J$.

COROLARIO 10. *Sea f_0 una función modular en X y p_0 una función subaditiva sobre X tales que $f_0[p_0] = p_0$ y*

$$p_0(ax_0) \leq 0 \quad (x_0 \in X)$$

para cada $a \in A$ que verifique $r(a) = 0$. Entonces el conjunto de los valores $f(x_0)$ de las funciones modulares $f \supset f_0$ con $x_0 \in D(f)$ que satisfacen (2.28) es el intervalo cerrado $[-\varphi(-x_0), \varphi(x_0)]$ donde

$$\varphi(y) = \inf \left\{ \frac{p_0(ay)}{r(a)} \mid r(a) > 0 \right\}.$$

OBSERVACIÓN 11. *En el caso de que para cada función modular f^*_0 en X que verifique*

$$f^*_0(x) \leq p_0(x)$$

*para todo $x \in D(f^*_0)$ exista una función modular $f^* \supset f^*_0$ con $D(f^*) = X$ que cumpla (2.28), el corolario 10 es válido para las funciones modulares $f \supset f_0$ con $D(f) = X$ que verifican (2.28).*

⁽¹⁴⁾ Esto se puede demostrar también aplicando la proposición 11.

§ 3. PROBLEMA DE LA EXTENSION. EXTENSIONES ULTRACOMPLETAS

Haremos uso aquí de las siguientes notaciones :

1. E es un conjunto no vacío.
2. G es un grupo de permutaciones de E operando a la derecha.
3. \mathfrak{S}_0 es un anillo de BOOLE de subconjuntos de E invariante por G , es decir,

- a) $\emptyset \in \mathfrak{S}_0$.
- b) Si $S_1 \in \mathfrak{S}_0$ y $S_2 \in \mathfrak{S}_0$ resulta $S_1 - S_2 \in \mathfrak{S}_0$.
- c) Si $S_1 \in \mathfrak{S}_0$ y $S_2 \in \mathfrak{S}_0$ resulta $S_1 \cup S_2 \in \mathfrak{S}_0$.
- d) $\mathfrak{S}_0 G = \mathfrak{S}_0$.

4. μ_0 es una extensión (o contenido) sobre \mathfrak{S}_0 compatible con G , esto es, una función real de conjunto, definida sobre \mathfrak{S}_0 , que satisface:

- a) $\mu_0 \neq 0$, $\mu_0 \geq 0$ y $\mu_0 < +\infty$.
- b) Si S_1 y S_2 son conjuntos disjuntos pertenecientes a \mathfrak{S}_0 se tiene

$$(3.1) \quad \mu_0(S_1 \cup S_2) = \mu_0(S_1) + \mu_0(S_2).$$

- c) Si $S \in \mathfrak{S}_0$ y $\sigma \in G$ resulta

$$(3.2) \quad \mu_0(S\sigma) = \mu_0(S)k(\sigma),$$

siendo k una función real definida sobre G que llamaremos multiplicador de μ_0 . Por consiguiente, $k > 0$ y

$$(3.3) \quad k(\sigma\tau) = k(\sigma)k(\tau)$$

para cada par (σ, τ) de elementos de G .

5. A es el anillo $R[G]$ del grupo G construido sobre el cuerpo R y τ es la función real definida sobre A poniendo

$$(3.4) \quad \tau(a) = \sum_1^m \alpha_i k(\sigma_i)$$

para cada $a = \sum_1^m \alpha_i \sigma_i$, $\alpha_i \in R$ y $\sigma_i \in G$ ($1 \leq i \leq m$).

Se ve en seguida mediante (3.3) que τ es un homomorfismo de A en R con $\tau(1) = 1$ ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁵⁾ Como es habitual identificamos cada elemento $1\sigma \in A$ ($1 \in R$ y $\sigma \in G$) con $\sigma \in G$ y cada elemento $\alpha 1 \in A$ ($\alpha \in R$ y $1 \in G$) con $\alpha \in R$. En particular, quedan así identificados los elementos unidad de R , G y $A = R[G]$.

PROPOSICIÓN 28. Sea \mathfrak{S} la clase de las partes de los conjuntos pertenecientes a \mathfrak{S}_0 y \mathfrak{X} el conjunto de las funciones reales acotadas x , definidas sobre E , cuyo soporte pertenece a \mathfrak{S} , es decir,

$$\{t \mid x(t) \neq 0\} \in \mathfrak{S}.$$

Entonces,

1. \mathfrak{S} es un anillo de BOOLE de subconjuntos de E que contiene a \mathfrak{S}_0 .
2. $\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}$.
3. \mathfrak{X} es un A -módulo si se define $x_1 + x_2$ sobre $X \times X$ y ax sobre $A \times X$ poniendo

$$(3.5) \quad (x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

y

$$(3.6) \quad (ax)(t) = \sum_1^m \alpha_i x(t\sigma_i^{-1})$$

para cada $t \in E$ siempre que $a = \sum_1^m \alpha_i \sigma_i$, $\alpha_i \in R$ y $\sigma_i \in G$ ($1 \leq i \leq m$).

DEMOSTRACIÓN. Por no presentar dificultades no la efectuamos. Sin embargo conviene poner de manifiesto que se verifica $(ab)x = a(bx)$ para toda terna $(a, b, x) \in A \times A \times X$ por operar G a la derecha de E . Efectivamente, si $a = \sum_j \alpha_j \sigma_j$ ($\alpha_j \in R$ y $\sigma_j \in G$) y $b = \sum_j \beta_j \tau_j$ ($\beta_j \in R$ y $\tau_j \in G$) y ponemos $\alpha_{ij} = \alpha_i \beta_j$ y $\sigma_{ij} = \sigma_i \tau_j$, resulta

$$\begin{aligned} (ab)x(t) &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} x(t\sigma_{ij}^{-1}) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j x(t\tau_j^{-1} \sigma_i^{-1}) \\ &= a \sum_j \beta_j x(t\tau_j^{-1}) \\ &= a(bx)(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in E$ y, por consiguiente, $(ab)x = a(bx)$.

OBSERVACIÓN 12. De aquí en adelante \mathfrak{S} y \mathfrak{X} tendrán el mismo significado que en la proposición 28.

LEMA 1. Para toda subclase finita $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ de \mathfrak{S}_0 se puede encontrar un número finito de conjuntos disjuntos $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ ($1 \leq N < 2^n$), pertenecientes a \mathfrak{S}_0 , de modo que cada S_i sea reunión de algunos de estos conjuntos S_j^* .

DEMOSTRACIÓN. ⁽¹⁶⁾ Sea

$$S_{i_1 \dots i_h}^* = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_h} - (S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup \dots \cup S_{j_{n-h}}),$$

siendo $(i_1, i_2, \dots, i_h, j_1, \dots, j_{n-h})$ una permutación de $(1, 2, \dots, n)$ y $1 \leq h \leq n$, entonces:

a) Si las combinaciones (i_1, i_2, \dots, i_h) y $(i'_1, i'_2, \dots, i'_k)$ son distintas los conjuntos $S_{i_1 \dots i_h}^*$ y $S_{i'_1 \dots i'_k}^*$ son disjuntos. Supongamos $k \geq h$, en este caso existe algún índice $i_{h'}$ ($1 \leq h' \leq h$) que no figura entre los índices i'_1, i'_2, \dots, i'_k , por tanto, $S_{i_1 \dots i_h}^* \subset S_{i_{h'}}^*$ y $S_{i'_1 \dots i'_k}^* \cap S_{i_{h'}}^* = \emptyset$, y resulta

$$S_{i_1 \dots i_h}^* \cap S_{i'_1 \dots i'_k}^* = \emptyset.$$

b) Cada S_i es reunión de conjuntos $S_{i_1 \dots i_h}^*$. Para establecer esto bastará probar que

$$S_i = \cup S_{i_1 \dots i_h}^*$$

si se extiende esta reunión sobre todas las combinaciones (i_1, \dots, i_h) donde figura el índice i . Desde luego $S_i \supset \cup S_{i_1 \dots i_h}^*$. Además, si $x \in S_i$ y $\{i'_1, i'_2, \dots, i'_h\}$ es el conjunto de todos los índices i' tales que $x \in S_{i'}$, tendremos $i_k = i$ para algún $k: 1 \leq k \leq h$ y $x \in S_{i_1 \dots i_h}^*$. Por tanto,

$$S_i \subset \cup S_{i_1 \dots i_h}^*$$

y

$$S_i = \cup S_{i_1 \dots i_h}^* \quad (S_{i_1 \dots i_h}^* \in S_0),$$

como queríamos probar.

LEMA 2. Si

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{S_i} = 0,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y χ_{S_i} es la función característica de $S_i \in \mathcal{S}_0$ ($1 \leq i \leq n$), resulta

$$(3.7) \quad \sum_1^n \alpha_i \mu_0(S_i) = 0.$$

⁽¹⁶⁾ Esta demostración se debe a nuestro alumno D. RAMIRO RAMIRO GARCIA. Para una demostración semejante véase CARATHEODORY [6] págs. 29-31.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 1 existe un número finito de conjuntos disjuntos $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$, pertenecientes a \mathcal{S}_0 , tales que cada S_i es reunión de algunos de dichos conjuntos S_j^* . Entonces, siendo

$$\sum_1^n \alpha_i \chi_{S_i} = \sum_1^N \alpha_j^* \chi_{S_j^*}$$

y

$$\sum_1^n \alpha_i \mu_0(S_i) = \sum_1^N \alpha_j^* \mu_0(S_j^*)$$

con coeficientes $\alpha_i^* \in R$, resulta $\sum_1^N \alpha_j^* \chi_{S_j^*} = 0$, $\alpha_j^* = 0$ o $S_j^* = \emptyset$ para $j = 1, 2, \dots, N$ y de aquí (3.7).

PROPOSICIÓN 29. Sea X_0 el submódulo de X engendrado por las funciones características χ_S de los conjuntos $S \in \mathcal{S}_0$, entonces

$$(3.8) \quad f_0(x) = \left\{ \sum_1^n \alpha_i \mu_0(S_i) \mid x = \sum_1^n \alpha_i \chi_{S_i} \in X_0 \right\} \quad (\alpha_i \in R \text{ y } S_i \in \mathcal{S}_0)$$

es una función (o funcional) modular en X con $D(f_0) = X_0$ que satisface

$$(3.9) \quad f_0(x) \geq 0 \quad (f_0 \neq 0)$$

para cada $x \geq 0$ perteneciente a X_0 .

DEMOSTRACIÓN. Del lema 2 se sigue inmediatamente

$$\sum_1^{n'} \alpha'_i \mu_0(S_i') = \sum_1^{n''} \alpha''_i \mu_0(S_i'')$$

y

$$\sum_1^{n'} \alpha'_i \chi_{S_i'} = \sum_1^{n''} \alpha''_i \chi_{S_i''}$$

$\alpha_i^{(k)} \in R$ y $S_i^{(k)} \in \mathcal{S}_0$ para $k = 1, 2$. Por tanto, f_0 es una función real definida sobre X_0 .

Para demostrar que f_0 es una función modular en X que satisface (3.9) será suficiente probar:

1. $f_0(x_1 + x_2) = f_0(x_1) + f_0(x_2)$ para cada par $(x_1, x_2) \in X_0 \times X_0$. Evidente.

2. $f_0(ax) = r(a)f_0(x)$ para cada $(a, x) \in A \times X$. En efecto, si $a = \sum_1^m \alpha_i \sigma_i$ ($\alpha_i \in R$ y $\sigma_i \in G$) y $x = \sum_1^n \beta_j \chi_{S_j}$ ($\beta_j \in R$ y $S_j \in \mathcal{S}_0$), resulta

$$\begin{aligned} f_0(ax) &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(\chi_{S_j \sigma_i}) && (\sigma_i \chi_{S_j} = \chi_{S_j \sigma_i}) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mu_0(S_j \sigma_i) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mu_0(S_j) k(\sigma_i) \\ &= r(a) f_0(x). \end{aligned}$$

3. f_0 satisface (3.9). Basta tener presente que cada $x \geq 0$ admite una representación $x = \sum_i \alpha_i \chi_{S_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ y $S_i \in \mathcal{S}_0$ y que $\mu_0 \neq 0$.

PROPOSICIÓN 30. Si

$$(3.10) \quad A^+ = \{a = \sum_i \alpha_i \sigma_i \mid \alpha_i > 0, \sigma_i \in G\}$$

y p_0 es la función real definida sobre X por

$$(3.11) \quad p_0(x) = \inf \{f_0(x') \mid x' \in X_0, x' \geq x\},$$

resulta:

1. A^+ es un semi-anillo (τ) generador de A tal que $ax \geq 0$ para cada $a \in A^+$ y $x \geq 0$.

2. p_0 es una función A^+ -semimodular sobre X con $p_0(0) = 0$ y $f_0[p_0] = p_0$, es decir,

$$(3.12) \quad p_0(x) = f_0(x)$$

para cada $x \in D(f_0)$ y

$$(3.13) \quad p_0(x + y) = p_0(x) + p_0(y)$$

para cada $(x, y) \in X \times X_0$.

DEMOSTRACIÓN. Nos limitaremos a demostrar 2. o lo que es equivalente:

a) p_0 es una función subaditiva sobre X . En efecto,

$$\begin{aligned} p_0(x + y) &= \inf \{f_0(z) \mid z \in X_0, z \geq x + y\} \\ &\leq \inf \{f_0(x' + y') \mid \{x', y'\} \subset X_0, x' \geq x, y' \geq y\} \\ &= p_0(x) + p_0(y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in X \times X$ y se tiene $p_0 < +\infty$ y $p_0(0) = 0$.

b) $\phi_0(ax) \leq r(a)\phi_0(x)$ para todo $(a, x) \in A^+ \times X$. Efectivamente, para cada $(a, x) \in A^+ \times X$ resulta

$$\begin{aligned}\phi_0(ax) &= \inf \{f_0(z) \mid z \in X_0, z \geq ax\} \\ &\leq \inf \{f_0(ax') \mid x' \in X_0, x' \geq x\} \\ &= r(a)\phi_0(x)\end{aligned}$$

c) ϕ_0 satisface (3.12) y (3.13). Desde luego ϕ_0 verifica (3.12) puesto que $f_0(x') \geq f_0(x)$ para cada $x' \geq x$ perteneciente a X_0 si $x \in X_0$. Además, como para cada $(x, y) \in X \times X_0$ resulta

$$\begin{aligned}\phi_0(x + y) - f_0(y) &= \inf \{f_0(z - y) \mid z \in X_0, z \geq x + y\} \\ &= \inf \{f_0(x') \mid x' \in X_0, x' \geq x\} \\ &= \phi_0(x),\end{aligned}$$

ϕ_0 satisface (3.13).

De estas proposiciones se deduce que podemos aplicar a estas funciones f_0 y ϕ_0 los resultados obtenidos en § 2.

DEFINICIÓN 18. Llamaremos *integral superior (sobre X)* y designaremos por \bar{f} a toda funcional A^+ -semimodular sobre X, es decir, a toda funcional real que posea las siguientes propiedades:

1. $\bar{f}(x + y) \leq \bar{f}x + \bar{f}y$ para cada $(x, y) \in X \times X$.
2. $\bar{f}\alpha x = \alpha\bar{f}x$ para cada número real $\alpha \geq 0$ y $x \in X$.
3. $\bar{f}\sigma x = k(\sigma)\bar{f}x$ para cada $\sigma \in G$ y $x \in X$.

Entonces la integral inferior $\underline{f} : \underline{f}x = -\bar{f}(-x)$ ($x \in X$) verifica

$$(3.14) \quad \underline{f} \leq \bar{f}$$

DEFINICIÓN 19. Llamaremos *integral (en X)* y designaremos por f a toda funcional modular f en X. Si $x \in D(f)$ diremos que x es *integrable*. Por tanto,

1. $f(x + y) = fx + fy$ para todo par (x, y) de funciones integrables.
2. $f\alpha x = \alpha fx$ para todo número real α y toda función integrable x .
3. $f\sigma x = k(\sigma)x$ para todo $\sigma \in G$ y toda función integrable x .

TEOREMA 11. Siempre existe una integral superior \bar{f} sobre X que satisface :

1. $\bar{f}(x + y) = \bar{f}x + \bar{f}y$ para cada $(x, y) \in X \times X_0$.
2. $\bar{f}\chi_S = \mu_0(S)$ para cada $S \in \mathcal{S}_0$.
3. $\bar{f}x_1 \leq \bar{f}x_2$ para cada par $(x_1, x_2) \in X \times X$ que verifique $x_1 \leq x_2$.
4. Si \bar{f}^* es una integral superior sobre X que satisface $\bar{f}^*x \leq \bar{f}x$ para toda $x \in X$ y $\bar{f}^*x \geq \bar{f}x$ para toda $x \in X_0$, resulta $\bar{f}^* = \bar{f}$.
5. Si f es una integral en X con $f x \leq \bar{f}x$ para cada función integrable x , resulta $f x = \bar{f}x$ para cada una de dichas funciones.

PROPOSICIÓN 31. Para toda integral superior \bar{f} sobre X que tenga las cuatro primeras propiedades del teorema 11 se tiene :

- a) $f_0(x) = \bar{f}x$ para toda $x \in D(f_0)$.
- b) $\bar{f} \leq p_0$.
- c) \bar{f} posee la propiedad 5 del teorema 11.

DEMOSTRACIÓN. a) Se deduce de las propiedades 1 y 2. b) Se sigue de a) y de la propiedad 3. c) Existiendo evidentemente,

$$f^* = \sup \{f, f_0\} \quad (\mathbf{c}),$$

basta aplicar la propiedad 4 a la integral superior \bar{f}^* definida así :

$$\bar{f}^*x = \inf \{f^*x' \mid x' \in X^*, x' \geq x\}$$

para cada $x \in X$, siendo X^* el dominio de f^* .

TEOREMA 12. Si G es un grupo accesible, existe una integral definida sobre X que satisface

$$(3.15) \quad f\chi_S = \mu_0(S)$$

para cada $S \in \mathcal{S}_0$ y

$$(3.16) \quad f x \geq 0$$

para cada $x \geq 0$ perteneciente a X .

DEMOSTRACIÓN. Resulta del teorema 8.

DEFINICIÓN 20. Llamaremos *ultracompleción* de μ_0 y designaremos por $\bar{\mu}_0$ a toda extensión μ , definida sobre la clase $\mathcal{S}(= \mathcal{S}_0)$ de las

partes de los conjuntos $S \in \mathfrak{S}_0$, que sea una prolongación de μ_0 . Si $\overline{\mu}_0 = \mu_0$ diremos que μ_0 es una extensión ultracompleta.

Evidentemente, $\overline{\overline{\mu}_0} = \overline{\mu}_0$.

COROLARIO 11. Si G es un grupo accesible, existe una ultracompleción μ de μ_0 , compatible con G , y con el mismo multiplicador k que μ_0 .

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar

$$(3.17) \quad \mu(S) = \int \chi_S$$

para cada $S \in \mathfrak{S}$.

COROLARIO 12. Si G es un grupo accesible existe una extensión ultracompleta μ definida sobre la clase de todos los subconjuntos de E con $\mu(E) = 1$ e invariante por $G : k = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Resulta del corolario 11 tomando $\mathfrak{S}_0 = \{\emptyset, E\}$, $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu_0(E) = 1$.

OBSERVACIÓN 13. A partir de la extensión μ definida por (3.17) se puede expresar la integral $\int x$ para toda $x \in X$ así :

$$(3.18) \quad \int x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{k}{n} \mu(S_k^{(n)}),$$

donde

$$S_k^{(n)} = \left\{ t \mid \frac{k}{n} \leq x(t) < \frac{k+1}{n}, x(t) \neq 0 \right\}.$$

Esto justifica que escribamos $\int x d\mu$ en lugar de $\int x$. Haciendo uso de las notaciones habituales se puede escribir $\int x$ o $\int x d\mu$ para designar la integral $\int x \chi_s$ ($S \in \mathfrak{S}$).

Completamos esta observación con el teorema siguiente :

TEOREMA 13. Si μ es una extensión sobre \mathfrak{S} , compatible con G , existe una integral sobre X que satisface (3.16) y (3.17).

DEMOSTRACIÓN. Basta seguir el mismo camino que LEBESGUE en su teoría de la integración, definiendo $\int x$ mediante (3.18).

EXTENSIONES ULTRACOMPLETAS. EJEMPLOS :

1. Sea E el espacio euclideo R^n de dimensión $n = 1$ o $n = 2$, G el grupo de las semejanzas de R^n , \mathfrak{S}_0 un anillo de BOOLE, invariante por G , de conjuntos medibles (L) de R^n con medida finita, y μ_0 la

restricción a \mathfrak{S}_0 de la medida de LEBESGUE. Se ve inmediatamente que G es un grupo resoluble y, por tanto, accesible, y que μ_0 es una extensión compatible con G ⁽¹⁷⁾. Luego, según el corolario 11 *existe una extensión ultracompleta $\mu = \overline{\mu}_0$ compatible con G .*

2. Sea E el espacio euclideo R^n de dimensión $n = 1$ o $n = 2$ y G el grupo de las semejanzas de R^n . Entonces G es un grupo accesible y, por el corolario 12, *existe una extensión ultracompleta μ , definida sobre la clase de todos los subconjuntos de E , con $\mu(E) = 1$ e invariante por G .*

3. Sea E un espacio euclideo R^n de dimensión $n \geq 3$, G el grupo mínimo de permutaciones de E que contiene las translaciones, los movimientos que dejan invariante un poliedro regular de R^n y las homotecias de R^n , \mathfrak{S}_0 un anillo de BOOLE invariante por G de conjuntos medibles (L) de R^n con medida finita ⁽¹⁶⁾ y μ_0 la restricción a \mathfrak{S}_0 de esta medida de LEBESGUE. Entonces G es un grupo accesible. En efecto, si G_1 es el grupo de las translaciones de R^n y G_2 es el subgrupo de G engendrado por G_1 y los movimientos que dejan invariante el poliedro citado, resulta: a) G_1 es un grupo abeliano; b) G_2/G_1 es un grupo finito; c) G/G_2 es un grupo abeliano. Por consiguiente, *existe una extensión ultracompleta $\mu = \overline{\mu}_0$ compatible con G .*

4. Sea G un grupo accesible de permutaciones de E y E^* una clase de subconjuntos de E , invariante por $G: E^*G = E^*$. Entonces, si G_0 es el conjunto de elementos de G que dejan fijos a cada uno de los conjuntos pertenecientes a E^* , G_0 es un subgrupo y divisor normal de G y G induce sobre E^* un grupo de permutaciones G^* isomorfo a G/G_0 y, por consiguiente, accesible. Luego, *si \mathfrak{S}_0^* es un anillo de BOOLE de subconjuntos de E^* con $\mathfrak{S}_0^*G^* = \mathfrak{S}_0^*$ y μ_0^* es una extensión sobre \mathfrak{S}_0^* compatible con G^* , existe una extensión ultracompleta $\mu^* = \overline{\mu}_0^*$, definida sobre la clase $\mathfrak{S}^* = \overline{\mathfrak{S}_0^*}$ de las partes de los conjuntos pertenecientes a \mathfrak{S}_0^* , y compatible con G^* .*

OBSERVACIÓN 14. *El ejemplo 2 parece estar en desacuerdo con la condición necesaria y suficiente de S. S. CHERN [7] para que exista una medida o una extensión invariante por un grupo de LIE. Esto ocurre solamente si se olvida que las medidas o extensiones a las*

⁽¹⁷⁾ Si los conjuntos pertenecientes a \mathfrak{S}_0 son todos acotados y algunos de ellos poseen puntos interiores resulta $\mu_0 \neq 0$, $k(\sigma)$ igual a la potencia n de la razón de semejanza de σ y \mathfrak{S} es la clase de los conjuntos acotados de R^n .

que se refiere CHERN ⁽¹⁸⁾ son las expresadas por una integral:

$$\int f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \quad (f \neq 0)$$

y se afirma:

Con respecto al grupo lineal

$$G: \quad t' = at + b \quad (a \neq 0)$$

de permutaciones de \mathbb{R} no existe ninguna extensión (o medida) en \mathbb{R} invariante ⁽¹⁹⁾.

En seguida veremos con el colorario 13 que la restricción precedente, relativa a la integral, se puede sustituir por la propiedad de que la extensión $\mu(K)$ de todo conjunto compacto K que posea algún punto interior sea positiva.

TEOREMA 14. *Sea $E = G/g$ el espacio homogéneo definido en un grupo topológico (Γ_2) , localmente compacto, G por un subgrupo cerrado g y k una función real definida sobre G . Entonces para que exista una medida de RADON m en E que verifique*

$$(3.19) \quad m(S\sigma) = m(S)k(\sigma)$$

para todo $\sigma \in G$ y todo conjunto medible S es necesario y suficiente que:

1. k sea una función continua y positiva sobre G .
2. $k(\sigma\tau) = k(\sigma)k(\tau)$ para cada par (σ, τ) de elementos de G .
3. $k(\sigma)\Delta(\sigma) = \delta(\sigma)$ para cada $\sigma \in g$, siendo Δ y δ ciertas funciones reales asociadas a los grupos G y g , respectivamente.

Esta medida en el caso que exista está bien determinada, salvo un factor constante, sobre la clase de los conjuntos de BOREL, relativamente compactos.

DEMOSTRACIÓN. Véase, A. WEIL [15] págs. 42-45.

COROLARIO 13. *La parte del teorema 14 relativa a la existencia es válida si se sustituye m por una extensión μ^* , definida sobre un anillo de BOOLE \mathfrak{S}^* de subconjuntos de E que contiene a los conjuntos compactos, y que satisface*

$$(3.20) \quad \mu^*(S\sigma) = \mu^*(S)k(\sigma)$$

⁽¹⁸⁾ En realidad este teorema de CHERN se refiere a extensiones, esto es, a funciones reales de conjunto finitamente aditivas y no negativas, pero también es válido para medidas o funciones de conjunto completamente aditivas y no negativas.

⁽¹⁹⁾ Véase, SANTALÓ [14] págs. 90 y 88.

para $S \in \mathfrak{S}^*$ y $\sigma \in G$, y

$$(3.21) \quad \mu^*(K) > 0$$

para todo conjunto compacto K que posea algún punto interior.

DEMOSTRACIÓN. Como la restricción de toda medida de RADON sobre la clase de los conjuntos de medida finita es una extensión, bastará probar que si existe tal extensión μ^* la función k satisface las tres condiciones requeridas. En efecto, entonces existe una integral $\int x d\mu^*$ sobre el conjunto X^* de las funciones reales continuas con soporte relativamente compacto, y esta integral define una medida de RADON sobre el mínimo σ -anillo de BOOLE \mathfrak{C} que contiene a los conjuntos compactos de E si se pone

$$m(K) = \inf \{ \int x d\mu^* \mid x \in X^*, x \geq \chi_K \} (\geq \mu^*(K))$$

para cada conjunto compacto $K \subset E$. Por tanto, siendo

$$\int \sigma x d\mu^* = k(\sigma) \int x d\mu^*$$

para cada $(\sigma, x) \in G \times X^*$, resulta

$$m(S\sigma) = m(S)k(\sigma)$$

para todo $S \in \mathfrak{C}$ y $\sigma \in G$, de donde se deduce aplicando el teorema 14 que k satisface las condiciones mencionadas.

COROLARIO 14. Con las hipótesis y notaciones del teorema 14, si G es un grupo accesible y k verifica las condiciones 1, 2 y 3, existe una extensión ultracompleta μ sobre la clase \mathfrak{S} de los conjuntos relativamente compactos de E que admite el multiplicador k y satisface:

1. Si $\{B_n\}^\infty$ es una sucesión de conjuntos de BOREL disjuntos cuya reunión $B \in \mathfrak{S}$, resulta

$$(3.22) \quad \sum_1^\infty \mu(B_n) = \mu(B)$$

2. Para cada conjunto abierto $A \neq \emptyset$ perteneciente a \mathfrak{S} se tiene

$$(3.23) \quad \mu(A) > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 14 hay una medida de RADON m en E que verifica (3.19). Por tanto, si μ_0 es la restricción de m sobre la clase \mathfrak{S}_0 de los conjuntos de BOREL relativamente compactos, por el corolario 11 existe una extensión ultracompleta $\mu = \overline{\mu_0}$ sobre la clase \mathfrak{S} de los conjuntos relativamente compactos de E que admite el multiplicador k y satisface (3.22) y (3.23), puesto que si

$\{B_n\}_1^\infty$ es una sucesión de conjuntos de BOREL, disjuntos cuya reunión $B \in \mathfrak{S}$ resulta :

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \mu(B_n) &= \sum_1^\infty m(B_n) \\ &= m(B) = \mu(B), \end{aligned}$$

y para cada abierto $A \neq \emptyset$ perteneciente a \mathfrak{S} se tiene

$$\mu(A) = m(A) > 0.$$

OBSERVACIÓN 15. Si E es un espacio compacto, G un grupo transitivo de transformaciones topológicas de E y μ_0 es una extensión compatible con G , definida sobre un anillo \mathfrak{S}_0 de BOOLE de subconjuntos de E que contiene los conjuntos cerrados, resulta $\mu(A) > 0$ para todo abierto $A \neq \emptyset$. Basta tener presente que $\mu(A)$ está definido para todo abierto A y que existe un cubrimiento finito $\{A\sigma_\nu | 1 \leq \nu \leq n\}$ de E y, por consiguiente,

$$\mu(A) \sum_1^n k(\sigma_\nu) \geq \mu(E) > 0.$$

TEOREMA 15. Sea E un espacio métrico localmente compacto y G un grupo transitivo de transformaciones topológicas de E . Entonces, si $\{V_n\}_1^\infty$ es una sucesión de abiertos tal que

$$(3.24) \quad \sup \{d(V_n\sigma) | \sigma \in G\} \rightarrow 0$$

para $n \rightarrow \infty$, donde designamos por $d(V)$ el diámetro de V , existe una medida de HAAR en E , esto es, una medida m definida sobre la clase \mathfrak{B} de los conjuntos de BOREL de E y tal que :

1. m es invariante por G : $m(B\sigma) = m(B)$ para todo $B \in \mathfrak{B}$ y $\sigma \in G$.
2. Para todo conjunto compacto K , $m(K) < +\infty$.
3. Para cada conjunto abierto $A \neq \emptyset$, $m(A) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se puede seguir la misma marcha que MUNROE [12] págs. 135-140, utilizando (3.24) para probar (pág. 138) que

$$\tau(U_1 \cup U_2) = \tau(U_1) + \tau(U_2)$$

si U_1 y U_2 son conjuntos abiertos relativamente compactos ($\epsilon\mathcal{C}'$) cuya distancia : $\varrho(U_1, U_2) > 0$.

COROLARIO 15. Con las condiciones y notaciones del teorema 15, si G es un grupo accesible existe una extensión ultracompleta μ sobre la clase de los conjuntos relativamente compactos de E , invariante por G y que satisface (3.22) y (3.23).

B I B L I O G R A F I A

- [1] AUMANN, G. : *Reelle Funktionen*. Berlín, Springer-Verlag, 1954.
- [2] BANACH, S. : *Sur le problème de la mesure*. Fund. Math., Vol. 4 (1923) 7-33.
- [3] BANACH, S. : *Théorie des opérations linéaires* (Monografie Matematyczne. Tomo I) Warszawa, 1932.
- [4] BANACH, S. et A. TARSKI : *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math., Vol. 6 (1924) 244-277.
- [5] BOURBAKI, N. : *Éléments de mathématique*, Livre V, *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, Hermann, 1953.
- [6] CARATHEODORY, C. : *Mass und Integral und ihre Algebralisierung*. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1956.
- [7] CHERN, S. S. : *On Integral Geometry in Klein Spaces*. Annals of Math., Vol. 43 (1942) 178-189.
- [8] GROTHENDIECK, A. : *Espaces vectoriels topologiques*. Sao Paulo, 1958.
- [9] HALMOS, P. R. : *Measure Theory*. New York, D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [10] HAUSDORFF, F. : *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, 1914, págs. 401 y 461.
- [11] KÖTHE, G. : *Topologische lineare Räume, I*. Berlín, Springer-Verlag, 1960.
- [12] MUNROE, M. E. : *Introduction to Measure and Integration*. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1953.
- [13] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. : *Una generalización de grupo resoluble*. (En preparación).
- [14] SANTALÓ, J. A. : *Introduction to Integral Geometry*. Paris, Hermann, 1953.
- [15] WEIL, A. : *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*. Paris, Hermann, 1953.

