RESULTADOS ACERCA DE UNA GENERALIZACIÓN DE LA SEMEJANZA EN EL ESPACIO DE HILBERT

por

ANTONIO PLANS

Sea $\mathfrak{H}$ el espacio de Hilbert separable real.

1. *Si un operador acotado* A, *con inverso a la izquierda acotado* A^{-1}, *hace corresponder a los rayos* r_n, s_n $(n = 1,2,..)$, $\alpha(r_n, s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, r_n y s_n *sin rayo de acumulación débil, los rayos* r_n', s_n' $(n = 1,2,..)$ *con la misma propiedad :*

$$\alpha(r_n', s_n') \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

entonces A *conserva los sistemas heterogonales fuertes* (*v.* [3]).[1]

Sea

$$\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ldots \mathbf{a}_n \ldots$$

un sistema heterogonal fuerte. Sea

$$\mathbf{a}_1' \ \mathbf{a}_2' \ \mathbf{a}_3' \ldots \mathbf{a}_n' \ldots$$

el sistema homólogo, que será desde luego heterogonal. Supongamos que no sea fuerte. Habrá al menos una sucesión parcial

$$\theta'_{p_n} = \alpha\,[\mathbf{a}'_{p_n} \ \ \mathbf{a}'_{p_n+1} \ldots] < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Sea $\qquad \theta_{p_n} = \alpha\,[\mathbf{a}_{p_n} \ \ \mathbf{a}_{p_n+1} \ldots],\ \theta_{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$

Existen dos vectores $\mathbf{x}'_{p_n}$, $\mathbf{y}'_{p_n}$, que tomaremos unitarios, contenidos en dos subespacios subtendidos por sucesiones disjuntas

---

(1) Los números entre corchetes corresponden a la nota bibliográfica.

$\subset \mathbf{a}'_{p_n}, \mathbf{a}'_{p_{n+1}}, \cdots$, tales que

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) = \theta'_{p_n} + \varepsilon_{p_n},$$

$$\varepsilon_{p_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Luego

$$\alpha(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) < \bar{\beta} < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Sean $\mathbf{x}_{p_n} = \mathrm{A}^{-1}\,\mathbf{x}'_{p_n}$, $\mathbf{y}_{p_n} = \mathrm{A}^{-1}\,\mathbf{y}'_{p_n}$. Se verifica

$$\alpha\,(\mathbf{x}_{p_n}, \mathbf{y}_{p_n}) \geq \theta_{p_n},$$

luego

$$\alpha\,(\mathbf{x}_{p_n}, \mathbf{y}_{p_n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Ni $\mathbf{x}_{p_n}$ ni $\mathbf{y}_{p_n}$ tienen vector $\neq \mathbf{o}$ de acumulación débil (v. [3]), es decir, los rayos correspondientes no presentan rayo de acumulación débil. Por tanto, en virtud de la hipótesis del teorema,

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2},$$

lo que está en contradicción con (1).

2. *Recíprocamente, sea* A *acotado, con inverso acotado a la izquierda* A^{-1}, *y conservando los sistemas heterogonales fuertes. Entonces hace corresponder a los rayos* r_n, s_n $(n = 1,2,..)$, $\alpha\,(r_n, s_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2}$, r_n y s_n *sin rayo de acumulación débil, los rayos* r'_n, s'_n $(n = 1,2,..)$ *con la misma propiedad:*

$$\alpha\,(r'_n, s'_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Según [3], § 1, 1.1, si tomamos en los rayos r_n, s_n representantes doblemente acotados $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, éstos convergen débilmente al vector nulo: $\mathbf{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{o}$, $\mathbf{y}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{o}$.

Sean $\mathbf{x}'_n = \mathrm{A}\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}'_n = \mathrm{A}\mathbf{y}_n$ representantes de r'_n, s'_n doblemente acotados. Supongamos que existan sucesiones parciales $\mathbf{x}'_{p_n}$, $\mathbf{y}'_{p_n}$ tales que

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) < \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Consideremos $\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}$. Se puede formar un sistema heterogonal fuerte intercalado $\left\{ \mathbf{x}_{q_n}, \mathbf{y}_{q_n} \right\}$, $\left\{ \mathbf{x}_{q_n} \right\} \subset \left\{ \mathbf{x}_{p_n} \right\}$, $\left\{ \mathbf{y}_{q_n} \right\} \subset \left\{ \mathbf{y}_{p_n} \right\}$.

Por la hipótesis del teorema, el sistema homólogo $\left\{ \mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n} \right\}$ es también heterogonal fuerte. Luego

$$O\,[\mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n+1}, \mathbf{y}'_{q_n+1}, \ldots] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

de donde

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

lo que está en contradicción con (2).

3. *Sean dos sucesiones de rayos r_n, s_n $(n = 1, 2, ..)$, sin rayo de acumulación débil, y con $\underline{lim}\ \alpha\,(r_n, s_n) > o$. Sea entonces el rayo $l_n \,\varepsilon\, \pi_n = [r_n, s_n]$ $(n = 1, 2, ..)$.*

l_n no puede tener rayo de acumulación débil.

Equivale a afirmar que una sucesión de representantes $\mathbf{x}_n \,\varepsilon\, l_n$ $(n = 1, 2, ..)$ doblemente acotados, $\mathbf{x}_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o}$. En efecto, sean $\mathbf{a}_n \,\varepsilon\, r_n$, $\mathbf{b}_n \,\epsilon\, s_n$, y por ejemplo unitarios, $\mathbf{x}_n = x_1^{(n)}\, \mathbf{a}_n + x_2^{(n)}\, \mathbf{b}_n$.

Sea $\mathbf{z}$ un vector cualquiera de $\mathfrak{H}$. Tendremos

$$(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) = x_1^{(n)}\, (\mathbf{a}_n, \mathbf{z}) + x_2^{(n)}\, (\mathbf{b}_n, \mathbf{z}),$$

$$(\mathbf{a}_n, \mathbf{z}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o, \text{ pues } \mathbf{a}_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o},$$

$$(\mathbf{b}_n, \mathbf{z}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o, \text{ pues } \mathbf{b}_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o},$$

y por otra parte $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$ $(n = 1, 2, ..)$ están acotados, por la condición supuesta $\underline{lim}\ \alpha(r_n, s_n) > o$. Luego

$$(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

es decir,

$$\mathbf{x}_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o}.$$

Podemos dar otra demostración, manejando solamente los rayos. Supongamos la existencia de un rayo l de acumulación de l_n, $l_{p_n} \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} l$ (v. [2]). Como $\alpha\,(r_n, l) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, $\alpha(s_n, l) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, resulta

$\alpha\,(\pi_n,\, l) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. Luego, en particular, $\alpha\,(l_n,\, l) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, lo que contradice $l_{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

4. *Sea* A *acotado regular, es decir, con inverso* A^{-1} *a los dos lados:* $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$, *haciendo corresponder a los rayos* r_n, s_n $(n=1, 2..)$, *sin rayo de acumulación débil,* $\alpha\,(r_n, s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, *los rayos* r'_n, s'_n $(n=1,2,..)$ *con la misma propiedad:* $\alpha\,(r'_n,\, s'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. (En adelante, esto lo expresaremos diciendo que A presenta la propiedad $\overrightarrow{\dfrac{\pi}{2}}$).

Entonces A^{-1} *posee también la propiedad* $\overrightarrow{\dfrac{\pi}{2}}$.

Sean r'_n, s'_n $(n = 1, 2,..)$ sin rayo de acumulación débil, $\alpha(r'_n,\, s'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. Por la bicontinuidad angular uniforme de A, desde luego se verifica

$\underline{lim}\ \alpha\,(r_n,\, s_n) > o$, siendo $r_n = A^{-1}\,r'_n$, $s_n = A^{-1}\,s'_n$ $(n = 1, 2,..)$, y tanto r_n como s_n no pueden tener rayo de acumulación débil. Tomemos en el plano $\pi_n = [r_n, s_n]$ el rayo $t_n \perp s_n$. Por 3, la sucesión así construida $t_1, t_2,\ldots, t_n,\ldots$ no tiene rayo de acumulación débil. Apliquemos, pues, a t_n, s_n $(n = 1,2,..)$ la propiedad $\overrightarrow{\dfrac{\pi}{2}}$, que por hipótesis tiene el operador dado A. Resulta

$$\alpha\,(t'_n,\, s'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, sale

$$\alpha\,(t'_n,\, r'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o,$$

luego también

$$\alpha\,(t_n,\, r_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o,$$

de donde, finalmente

$$\alpha\,(r_n,\, s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

s.q.d.

5. *Los operadores acotados regulares con la propiedad* $\overrightarrow{\dfrac{\pi}{2}}$ *forman grupo.*

Pues el producto de dos operadores regulares con la propiedad $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$ es regular con dicha propiedad. Y con A, también A^{-1} verifica la propiedad $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$, de acuerdo con el teorema anterior.

6. *Sea* A *un operador regular, transformando un sistema cualquiera ortogonal de rayos en un sistema heterogonal fuerte de rayos.*

Entonces A *posee la propiedad* $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$.

Sean dos sucesiones de vectores $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{y}_n| = 1$, $\mathbf{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, $\mathbf{y}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, $\alpha(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Tenemos que probar

$$\alpha(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

donde $\mathbf{x}'_n = A\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}'_n = A\mathbf{y}_n$. $(n = 1, 2, ..)$

Supongamos que esto no sea cierto, existiendo una sucesión parcial $\left\{\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}\right\}$ tal que

$$\alpha(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) < \beta < \frac{\pi}{2}. \quad (n = 1, 2, ..) \tag{3}$$

Existe otra sucesión parcial

$$\left\{\mathbf{x}_{q_n}, \mathbf{y}_{q_n}\right\} \subset \left\{\mathbf{x}_{p_n}, \mathbf{y}_{p_n}\right\} \quad (n = 1, 2, ..)$$

que constituye un sistema heterogonal fuerte. A dicho sistema le aplicamos el proceso de ortogonalización de Schmidt, y sea

$$\left\{\overline{\mathbf{x}}_{q_n}, \overline{\mathbf{y}}_{q_n}\right\}$$

el sistema ortogonal resultante. Se verifica (v. [3]):

$$\alpha(\mathbf{x}_{q_n}, \overline{\mathbf{x}}_{q_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o,$$

$$\alpha(\mathbf{y}_{q_n}, \overline{\mathbf{y}}_{q_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o.$$

Sean $\overline{\mathbf{x}}'_{q_n} = A\overline{\mathbf{x}}_{q_n}$, $\overline{\mathbf{y}}'_{q_n} = A\overline{\mathbf{y}}_{q_n}$. El sistema

$$\left\{\overline{\mathbf{x}}'_{q_n}, \overline{\mathbf{y}}'_{q_n}\right\}, \quad (n = 1, 2, ..)$$

por la hipótesis del teorema, es heterogonal fuerte. En particular (v. [3]) tendremos

$$\alpha\,(\bar{\mathbf{x}}'_{q_n}, \bar{\mathbf{y}}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Por la bicontinuidad uniforme angular se verifica

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{q_n}, \bar{\mathbf{x}}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} o,$$

$$\alpha\,(\mathbf{y}'_{q_n}, \bar{\mathbf{y}}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} o.$$

Luego

$$\alpha\,(\mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

lo cual está en contradicción con (3).

s.q.d.

Resulta inmediatamente

7. *Corolario* 1. *Un operador* A *regular posee la propiedad* $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$ *cuando y sólo cuando transforma sistemas ortogonales en sistemas heterogonales fuertes.*

Corolario 2. *Referido* $\mathfrak{H}$ *a un sistema onc* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots$, *un operador* A *regular posee la propiedad* $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$ *cuándo y sólo cuando la sucesión*

$$\mathbf{a}_n = \mathrm{A}\mathbf{e}_n \qquad (n = 1,2,..)$$

es un sistema heterogonal fuerte, cualquiera que sea el sistema onc elegido $\{\mathbf{e}_n\}$ $(n = 1,2,..)$.

8. *Si* A, *acotado y regular, posee la propiedad* $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$, *también goza de la propiedad* $\vec{\theta}$, *donde* θ *puede tener cualquier valor* $\neq o$, *una vez fijado, entre* o *y* $\frac{\pi}{2}$.

La propiedad $\vec{\theta}$ significa, como la $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$, que dados los rayos r_n, s_n $(n = 1,2,..)$, sin rayo de acumulación débil, $\alpha\,(r_n, s_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$, tienen por homólogos rayos r'_n, s'_n $(n = 1, 2,..)$ con la misma propiedad: $\alpha\,(r'_n, s'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$. (La propiedad $\vec{o}$, $\theta = o$, desde luego se verifica, pues significa exactamente la continuidad uniforme angular).

Demostración. Sean los rayos $r_n \perp s_n$ $(n = 1,2,..)$ sin rayo de acumulación débil, y elijamos representantes unitarios $\mathbf{x}_n \in r_n$, $\mathbf{y}_n \in s_n$. Se verifica $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = o$ $(n = 1, 2,..)$. Sean $\mathbf{x}'_n = A\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}'_n = A\mathbf{y}_n$, serán representantes doblemente acotados de los rayos homólogos r'_n, s'_n $(n = 1,2,..)$. Como por hipótesis se verifica la propiedad $\frac{\pi}{2}$, tendremos

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o.$$

Sean ahora $\mathbf{x}_n \perp \mathbf{y}_n$ $(n = 1, 2,..)$, $|\mathbf{x}_n| \leq 1$, $|\mathbf{y}_n| \leq 1$, $\frac{\mathbf{x}_n}{|\mathbf{x}_n|} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{o}$, $\frac{\mathbf{y}_n}{|\mathbf{y}_n|} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{o}$. Luego, por lo anterior,

$$\left(A \frac{\mathbf{x}_n}{|\mathbf{x}_n|}, A \frac{\mathbf{y}_n}{|\mathbf{y}_n|}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

de donde

$$(A\mathbf{x}_n, A\mathbf{y}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o.$$

(Aplíquese la regularidad de A).

Consideremos ahora los rayos r_n, s_n $(n = 1, 2,..)$, sin acumulación débil, formando un ángulo fijo θ. Sean $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$ $(n = 1, 2,..)$ sus respectivos representantes unitarios, y sean $Ar_n = r'_n$, $As_n = s'_n$, $A\mathbf{x}_n = \mathbf{x}'_n$, $A\mathbf{y}_n = \mathbf{y}'_n$. Tenemos

$$(\mathbf{y}_n - (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) = o,$$

donde $|\mathbf{y}_n - (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, \mathbf{x}_n| \leq 1$, $|\mathbf{x}_n| = 1$. Estamos, pues, en las condiciones de más arriba. Por consiguiente se ha de verificar

$$(\mathbf{y}'_n - (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, \mathbf{x}'_n, \mathbf{x}'_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) - (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, |\mathbf{x}'_n|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

y análogamente

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) - (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, |\mathbf{y}'_n|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o.$$

En otra forma,

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) = (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, |\mathbf{x}'_n|^2 + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) = (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\, |\mathbf{y}'_n|^2 + \eta_n, \quad \eta_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o.$$

Resulta inmediatamente, multiplicando miembro a miembro:

$$(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)^2 = (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)^2 \; |\mathbf{x}'_n|^2 \, |\mathbf{y}'_n|^2 + \xi_n, \; \xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} o.$$

Designemos por $\theta'_n = \alpha(r'_n, s'_n)$, $(n = 1, 2, ..)$. Resulta fácilmente

$$\theta'_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta.$$

Si $\alpha(r_n, s_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta$, tomaríamos un tercer rayo $\bar{s}_n$, coplanar con r_n, s_n, $\alpha(r_n, \bar{s}_n) = \theta$ y $\alpha(s_n, \bar{s}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} o$. Dicho rayo no tiene acumulación débil, por 3. — Luego, de acuerdo con lo anterior,

$$\alpha(r'_n, \bar{s}'_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta,$$

siendo $\bar{s}'_n = A\bar{s}_n$ $(n = 1, 2, ..)$. Como también $\alpha(s'_n, \bar{s}'_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} o$, resulta inmediatamente

$$\alpha(r'_n, s'_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta.$$

s.q.d.

La propiedad $\vec{\theta}$ incluye, como caso particular, la $\vec{\frac{\pi}{2}}$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$. Por consiguiente

9. *Las propiedades* $\vec{\frac{\pi}{2}}$ *y* $\vec{\theta}$ *son equivalentes.*

En particular, A^{-1} verifica $\vec{\theta}$ si A verifica $\vec{\frac{\pi}{2}}$ (v. 4.).

10. *Sea* A *regular, con la propiedad* $\vec{\theta}$. *Referido* $\mathfrak{H}$ *a un sistema onc* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, .., \mathbf{e}_n, ..$, *sea* $\mathbf{a}_n = A\mathbf{e}_n$ $(n = 1, 2, ..)$, *con lo que* A *viene representado por la matriz*

$$A = \| \mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \ldots \|.$$

Sea

$$A^{(n)} = \| \mathbf{a}_n \;\; \mathbf{a}_{n+1} \ldots \|.$$

Existe entonces un número positivo k^2 *tal que*

$$k^2 - \epsilon_n < |A^{(n)} \mathbf{x}|^2 < k^2 + \epsilon_n, \qquad (4)$$

$\epsilon_n > o$, $\epsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} o$ *dependiente sólo de* n, *y* $|\mathbf{x}| = 1$.

Sean M, m las cotas superior e inferior de A, es decir,

$$o < m \leq |A\mathbf{x}| \leq M < \infty, \; |\mathbf{x}| = 1,$$

y sean m_n, M_n $(n = 1,2,..)$ las de $A^{(n)}$. Se tiene
$o < m = m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n \leq \ldots \leq M_n \leq \ldots \leq M_2 \leq M_1 = M < \infty$.

Hay que probar

$$M_n - m_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o, \tag{5}$$

pues entonces hay un elemento único de separación k^2, y sale inmediatamente (4).

Supongamos que (5) no sea cierto, y que para una sucesión parcial M_{p_n}, m_{p_n} se tenga

$$M_{p_n} - m_{p_n} > l' > o. \quad (n = 1,2,..)$$

En la esfera $|\mathbf{x}| = 1$ existirán dos sucesiones $\mathbf{x}_{p_n}$, $\mathbf{y}_{p_n}$ tales que $A^{(p_n)}\, \mathbf{x}_{p_n} = \mathbf{x}'_{p_n}$, $A^{(p_n)}\, \mathbf{y}_{p_n} = \mathbf{y}'_{p_n}$ difieren en módulo tan poco como queramos de m_{p_n}, M_{p_n} respectivamente $(n = 1,2,..)$, es decir,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'_{p_n}| &= m_{p_n} + \epsilon_{p_n} \\ |\mathbf{y}'_{p_n}| &= M_{p_n} - \epsilon_{p_n}. \end{aligned} \qquad (\epsilon_{p_n} > o,\ \epsilon_{p_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o) \tag{6}$$

Como $|\mathbf{y}'_{p_n} - \mathbf{x}'_{p_n}| > l' - 2\epsilon_{p_n}$, dado ϵ, $l' > \epsilon > o$, a partir de un cierto $n = \nu$, $|\mathbf{y}'_{p_n} - \mathbf{x}'_{p_n}| > l' - \epsilon > o$, luego por la bicontinuidad uniforme de A, para $n > \nu$, $|\mathbf{y}_{p_n} - \mathbf{x}_{p_n}| > l > o$ para un cierto $l > o$. Por consiguiente

$$\alpha\,(\mathbf{x}_{p_n}, \mathbf{y}_{p_n}) > a > o \qquad (n = \nu + 1, \ldots)$$

para un cierto $a > o$, luego por la bicontinuidad uniforme angular de A,

$$\alpha(\mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n}) > a' > o. \qquad (n = \nu + 1, \ldots)$$

El ángulo $\alpha(\mathbf{y}_{p_n} - \mathbf{x}_{p_n}, \mathbf{x}_{p_n}) = \theta_{p_n}$ está comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$, quedando excluido $\underline{lim}\ \theta_{p_n} = o$, $\overline{lim}\ \theta_{p_n} = \frac{\pi}{2}$. Habrá una sucesión parcial $\{q_n\} \subset \{p_n\}$ para la cual

$$\theta_{q_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \theta, \qquad o < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Por otra parte, como

$$\mathbf{x}'_{q_n} \in [\mathbf{a}_{q_n}, \mathbf{a}_{q_n+1}, \ldots],$$

se ha de verificar (v. [3])

$$\mathbf{x}'_{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0},$$

luego

$$\mathbf{x}_{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}.$$

Análogamente

$$\mathbf{y}_{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0},$$

luego también

$$\mathbf{y}_{q_n} - \mathbf{x}_{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0},$$

siendo esta sucesión doblemente acotada.

Al no haber vectores $\neq \mathbf{0}$ de acumulación débil, podemos aplicar la propiedad $\vec{0}$ supuesta, y tendremos

$$\alpha\,(\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta,$$

$$\alpha\,(\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

es decir, vectorialmente,

$$\frac{|(\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n})|}{|\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}|\cdot|\mathbf{x}'_{q_n}|} = \frac{|(\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}, \mathbf{y}'_{q_n})|}{|\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}|\cdot|\mathbf{y}'_{q_n}|} + \eta_{q_n}, \quad \eta_{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} o.$$

Sabemos que $|\mathbf{y}'_{q_n} - \mathbf{x}'_{q_n}|$ está doblemente acotado, y podemos suprimirlo.

Sólo pueden ocurrir dos casos, al tener en cuenta los signos :

a) $$\frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) - |\mathbf{x}'_{q_n}|^2}{|\mathbf{x}'_{q_n}|} = \frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) - |\mathbf{y}'_{q_n}|^2}{|\mathbf{y}'_{q_n}|} + \eta_{q_n},$$

$$(|\mathbf{y}'_{q_n}| - |\mathbf{x}'_{q_n}|)\,\frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n})}{|\mathbf{y}'_{q_n}|\cdot|\mathbf{x}'_{q_n}|} = |\mathbf{x}'_{q_n}| - |\mathbf{y}'_{q_n}| + \eta_{q_n}.$$

Si excluimos

$$|\mathbf{y}'_{q_n}| - |\mathbf{x}'_{q_n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} o, \tag{7}$$

llegamos a un absurdo.

En efecto, para una sucesión parcial $\{s_n\} \subset \{q_n\}$, se tiene entonces

$$\infty > 2\mathrm{M} > \big|\,|\mathbf{y}'_{s_n}| - |\mathbf{x}'_{s_n}|\,\big| > b > o$$

para un cierto $b > o$. Luego resultaría, dividiendo por $|\mathbf{y}'_{s_n}| - |\mathbf{x}'_{s_n}|$,

$$\frac{(\mathbf{y}'_{s_n}, \mathbf{x}'_{s_n})}{|\mathbf{y}'_{s_n}| \cdot |\mathbf{x}'_{s_n}|} = -1 + \bar{\eta}_{s_n}, \ \bar{\eta}_{s_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o,$$

de donde

$$\frac{|(\mathbf{y}'_{s_n}, \mathbf{x}'_{s_n})|}{|\mathbf{y}'_{s_n}| \cdot |\mathbf{x}'_{s_n}|} = 1 + \bar{\bar{\eta}}_{s_n}, \ \bar{\bar{\eta}}_{s_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o. \tag{8}$$

b) $$\frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) - |\mathbf{x}'_{q_n}|^2}{|\mathbf{x}'_{q_n}|} = \frac{-(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) + |\mathbf{y}'_{q_n}|^2}{|\mathbf{y}'_{q_n}|} + \eta_{q_n},$$

$$\frac{|\mathbf{y}'_{q_n}| + |\mathbf{x}'_{q_n}|}{|\mathbf{y}'_{q_n}| \cdot |\mathbf{x}'_{q_n}|} (\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n}) = (|\mathbf{y}'_{q_n}| + |\mathbf{x}'_{q_n}|) + \eta_{q_n}.$$

La suma $|\mathbf{y}'_{q_n}| + |\mathbf{x}'_{q_n}|$ es inferiormente acotada, luego al dividir por ella sale

$$\frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n})}{|\mathbf{y}'_{q_n}| \cdot |\mathbf{x}'_{q_n}|} = 1 + \eta'_{q_n}, \ \eta'_{q_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o$$

$$\frac{(\mathbf{y}'_{q_n}, \mathbf{x}'_{q_n})}{|\mathbf{y}'_{q_n}| \cdot |\mathbf{x}'_{q_n}|} = 1 + \eta''_{q_n}, \ \eta''_{q_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o. \tag{9}$$

Las conclusiones (8) y (9) son absurdas. Pues admitamos que para una cierta sucesión parcial $\left\{ \mathbf{x}'_{k_n}, \mathbf{y}'_{k_n} \right\} \subset \left\{ \mathbf{x}'_{p_n}, \mathbf{y}'_{p_n} \right\}$ $(n = 1,2,..)$ se tenga

$$\frac{(\mathbf{x}'_{k_n}, \mathbf{y}'_{k_n})^2}{|\mathbf{x}'_{k_n}|^2 \cdot |\mathbf{y}'_{k_n}|^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Al ser $|\mathbf{x}'_{k_n}|$, $|\mathbf{y}'_{k_n}|$ doblemente acotados, esto equivale a

$$(\mathbf{x}'_{k_n}, \mathbf{y}'_{k_n})^2 - |\mathbf{x}'_{k_n}|^2 \cdot |\mathbf{y}'_{k_n}|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} o. \tag{10}$$

Pero esto es absurdo, pues fijado n, al variar el escalar λ_n, se tiene

$$|\mathbf{y}'_{k_n} - \lambda_n \mathbf{x}'_{k_n}|^2 > c > o \tag{11}$$

para un cierto $c > o$ fijo, a partir de un cierto k_μ. Al desarrollar $|\mathbf{y}'_{k_n} - \lambda_n \mathbf{x}'_{k_n}|^2$ y tomar el mínimo, sale

$$|\mathbf{x}'_{k_n}|^2 \cdot |\mathbf{y}'_{k_n}|^2 - (\mathbf{x}'_{k_n}, \mathbf{y}'_{k_n})^2 > c \cdot |\mathbf{x}'_{k_n}|^2 > o,,$$

$$|\mathbf{x}'_{k_n}|^2 \cdot |\mathbf{y}'_{k_n}|^2 - (\mathbf{x}'_{k_n}, \mathbf{y}'_{k_n})^2 > \bar{c} > o, \qquad (n = \mu, \mu + 1,..)$$

lo que contradice (10).

Hemos de admitir pues, en definitiva, el resultado (7). Pero esto también encierra un absurdo, ya que, por (6) sale

$$|\mathbf{y}'_{p_n}| - |\mathbf{x}'_{p_n}| = \mathrm{M}_{p_n} - \mathrm{m}_{p_n} - 2\,\varepsilon_{p_n}, \quad (\varepsilon_{p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} o)$$

y

$$\mathrm{M}_{p_n} - \mathrm{m}_{p_n} > l' > o.$$

Queda pues demostrado, por reducción al absurdo, que

$$\mathrm{M}_n - \mathrm{m}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} o. \qquad \text{s.q.d.}$$

11. *Dada una sucesión* $\mathrm{A}^{(n)}$ *de operadores, las desigualdades*

$$k^2 - \eta_n < |\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}|^2 < k^2 + \eta_n, \qquad (n = 1,2,..) \qquad (12)$$

donde k^2 *es fijo,* $|\mathbf{x}| = 1$ *y* $\eta_n > o$, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} o$ *depende sólo de* n, *son equivalentes a las desigualdades*

$$k^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \bar{\eta}_n < (\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\mathbf{y}) < k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\eta}_n, \quad (n = 1,2,..) \quad (13)$$

donde $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$ *y* $\bar{\eta}_n > o$, $\bar{\eta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} o$ *depende sólo de* n.

(13) implica (12) para $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Tenemos que demostrar que, recíprocamente, (12) implica (13).

Sea $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}$ cualquiera, podemos aplicar (12) a $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, y resulta

$$(k^2 - \eta_n)\ |\mathbf{x}|^2 < |\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}|^2 < (k^2 + \eta_n)\,|\mathbf{x}|^2. \qquad (n = 1,2,..)$$

Apliquemos estas desigualdades al vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, siendo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vectores unitarios arbitrarios. Resulta

$$(k^2 - \eta_n)\ [2 + 2\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})] < |\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}|^2 + |\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{y}|^2 + 2\,(\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\mathbf{y}) <$$
$$< (k^2 + \eta_n)\ [2 + 2\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})].$$

Al restar a estas desigualdades, sucesivamente, las (12) aplicadas a $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, sale

$$-\,2\eta_n + (k^2 - \eta_n)\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) < (\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\mathbf{y}) < 2\eta_n + (k^2 + \eta_n)\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Observemos que

$$2\eta_n + \eta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_n [2 + (\mathbf{x}, \mathbf{y})] > o \qquad (n = 1,2,..)$$

$$2\eta_n + \eta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 3\eta_n,$$

luego resulta

$$k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 3\eta_n < (\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\mathbf{y}) < k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 3\eta_n. \qquad (n = 1,2,..)$$

Al hacer $3\eta_n = \overline{\eta}_n$ obtenemos las desigualdades (13), en las condiciones prescritas.

s.q.d.

12. *Teorema recíproco del T^a 10.*

Sea un operador A *regular. Referido* $\mathfrak{H}$ *a un sistema onc* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..,$ $\mathbf{e}_n, ..,$ *dicho operador vendrá representado por la matriz*

$$\mathrm{A} = ||\, \mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \ldots ||, \quad \mathbf{a}_n = \mathrm{A}\mathbf{e}_n.$$

Designemos por

$$\mathrm{A}^{(n)} = ||\, \mathbf{a}_n\ \mathbf{a}_{n+1} \ldots ||,$$

y supongamos que se verifica, para un cierto $k^2 > o$

$$k^2 - \varepsilon_n < |\,\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}\,|^2 < k^2 + \varepsilon_n,$$

para $|\,\mathbf{x}\,| = 1$ *y* $\varepsilon_n > o$, $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o$ *dependiente sólo de n.*

Entonces A *cumple la propiedad* $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$ *(luego su equivalente* $\vec{0}$*).*

Consideremos los subespacios $[\mathbf{e}_n\ \mathbf{e}_{n+1} \ldots]$. *Sean* $\mathbf{x}_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{0}$, $\mathbf{y}_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{0}$, $|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{y}_n| = 1$, $\alpha\,(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Como $[\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}]$ y $[\mathbf{e}_n\, \mathbf{e}_{n+1} \ldots]$ son ortogonales complementarios ($n = 1,2,..$), resulta inmediatamente la existencia de dos sucesiones de vectores, que tomaremos unitarios, $\overline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{y}}_n\ \varepsilon\ [\mathbf{e}_n\, \mathbf{e}_{n+1} \ldots]$, ($n = 1,2,..$) a los que corresponden dos sucesiones parciales que siempre se pueden elegir con los mismos índices p_n, $\{\mathbf{x}_{p_n}\} \subset \{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_{p_n}\} \subset \{\mathbf{y}_n\}$, tales que $\alpha(\mathbf{x}_{p_n}, \overline{\mathbf{x}}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o$, $\alpha(\mathbf{y}_{p_n}, \overline{\mathbf{y}}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o$. Luego también

$$\alpha(\overline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{y}}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Los operadores $\mathrm{A}^{(n)}$ ($n = 1,2,..$) cumplen las condiciones del teorema anterior, luego verifican las desigualdades

$$k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \overline{\varepsilon}_n < (\mathrm{A}^{(n)}\,\mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\,\mathbf{y}) < k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{\varepsilon}_n, \qquad (n = 1,2,..)$$

donde $\overline{\varepsilon}_n > o$, $\overline{\varepsilon}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o$ depende sólo de n, y $|\,\mathbf{x}\,| = |\,\mathbf{y}\,| = 1$.

Hagamos $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_n$, $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}_n$, con lo cual

$$k^2(\bar{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{y}}_n) - \bar{\varepsilon}_n < (\mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{x}}_n, \mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{y}}_n) < k^2(\bar{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{y}}_n) + \bar{\varepsilon}_n. \qquad (n = 1,2,..)$$

Como $(\bar{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{y}}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} o$, resulta

$$(\mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{x}}_n, \mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{y}}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} o.$$

Por ser $\mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{x}}_n = \mathrm{A}\bar{\mathbf{x}}_n$, $\mathrm{A}^{(n)}\bar{\mathbf{y}}_n = \mathrm{A}\bar{\mathbf{y}}_n$, por la bicontinuidad uniforme angular, también

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_{p_n}, \mathrm{A}\bar{\mathbf{x}}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} o,$$

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{y}_{p_n}, \mathrm{A}\bar{\mathbf{y}}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} o,$$

luego

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_{p_n}, \mathrm{A}\mathbf{y}_{p_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Resulta fácilmente la propiedad $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$. Pues supongamos que para un par de sucesiones vectoriales $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{y}_n| = 1$, $\mathbf{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{o}$, $\mathbf{y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{o}$, $\alpha\,(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$, no se verificase $\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_n, \mathrm{A}\mathbf{y}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$. Existirían dos sucesiones parciales $\{\mathbf{x}_{q_n}\} \subset \{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_{q_n}\} \subset \{\mathbf{y}_n\}$ tales que

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_{q_n}, \mathrm{A}\mathbf{y}_{q_n}) < \gamma < \frac{\pi}{2}. \qquad (n = 1,2,..) \qquad (14)$$

Pero $\alpha\,(\mathbf{x}_{q_n}, \mathbf{y}_{q_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$, luego para ciertas sucesiones parciales $\{\mathbf{x}_{s_n}\} \subset \{\mathbf{x}_{q_n}\}$, $\{\mathbf{y}_{s_n}\} \subset \{\mathbf{y}_{q_n}\}$ se verificaría

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_{s_n}, \mathrm{A}\mathbf{y}_{s_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

lo que contradice (14).

s.q.d.

De los teoremas 10. 11. y 12. resulta, resumiendo:

13. *La condición necesaria y suficiente para que un operador regular* A *posea la propiedad* $\vec{\theta}$, *referido* $\mathcal{H}$ *a un sistema onc* $\{\mathbf{e}_n\}$ $(n = 1,2,..)$, *es*

$$k^2 - \varepsilon_n < |\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{x}|^2 < k^2 + \varepsilon_n, \qquad (n = 1,2,..)$$

donde $k^2 > o$ *es fijo,* $\varepsilon_n > o$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} o$ *dependiente sólo de* n,

$$|\mathbf{x}| = 1,\ y\ \mathrm{A}^{(n)} = \|\,\mathbf{a}_n\,\mathbf{a}_{n+1}\ldots\|,\ \mathbf{a}_i = \mathrm{A}\mathbf{e}_i \qquad (i,\, n = 1,2,..),$$

o las desigualdades equivalentes

$$k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{\varepsilon}_n < (\mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{y}) < k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\varepsilon}_n, \ (n = 1,2,..) \qquad (15)$$

donde $|\,\mathbf{x}\,| = |\,\mathbf{y}\,| = 1$ *y* $\bar{\varepsilon}_n > o$, $\bar{\varepsilon}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} o$, *dependiente sólo de n.*

14. Sea A regular, con la propiedad $\vec{\theta}$, $\{\mathbf{e}_n\}$ onc, $\mathrm{A}\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n$ $(n = 1,2,..)$. De (15) sale

$$-\bar{\varepsilon}_n < (\mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{x}, \mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{y}) - k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \bar{\varepsilon}_n\,,\,,$$

$$|\,([\mathrm{A}^{(n)\prime}\mathrm{A}^{(n)} - k^2]\, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,| < \bar{\varepsilon}_n,$$

$|\,\mathbf{x}\,| = |\,\mathbf{y}\,| = 1$ solamente. Luego

$$||\, \mathrm{A}^{(n)\prime}\, \mathrm{A}^{(n)} - k^2\, I\, || \leq \bar{\varepsilon}_n. \qquad (16)$$

Por otra parte, por ser $\{\mathbf{a}_n\}$ un sistema heterogonal fuerte, se verifica, cualquiera que sea $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, \mathbf{e}_i$, $|\,\mathbf{x}\,| = 1$, y, $|\,\mathbf{y}\,| = 1$:

$$\alpha\, (\mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{y}, x_1\, \mathbf{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\, \mathbf{a}_{n-1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2}\,.$$

Si designamos por $\mathrm{A}_{(n-1)} = ||\, \mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n-1}\, ||$, al tomar dos vectores unitarios cualesquiera $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, resultará

$$|\,(\mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{y}, \mathrm{A}_{(n-1)}\, \mathbf{x})\,| \xrightarrow[n \to \infty]{} o,$$

$$|\,(\mathrm{A}'_{(n-1)}\, \mathrm{A}^{(n)}\, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \xrightarrow[n \to \infty]{} o,$$

independientemente de los vectores $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ unitarios. Luego resulta

$$||\, \mathrm{A}'_{(n-1)}\, \mathrm{A}^{(n)}\, || \xrightarrow[n \to \infty]{} o. \qquad (17)$$

Consideremos ahora la matriz

$$\mathrm{A}'\mathrm{A} - k^2\, \mathrm{I} = \left\| \begin{matrix} |\mathbf{a}_1|^2 - k^2 & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{n-1}) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) & \cdots \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_1) & \cdots & \cdots & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) & \cdots \\ & & & \vdots & |\mathbf{a}_n|^2 - k^2 & \\ & & & & & \ddots \end{matrix} \right\|$$

y en ella la matriz obtenida suprimiendo las $n-1$ primeras columnas:

$$(\mathrm{A'A} - k^2\,\mathrm{I})^{(n)} = \left\| \begin{matrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) & \cdots\cdots \\ \vdots & \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) & \cdots\cdots \\ |\mathbf{a}_n|^2 - k^2 & \cdots\cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \right\|$$

Por (16) y (17) tenemos

$$\|\, (\mathrm{A'A} - k^2\,\mathrm{I})^{(n)} \,\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o.$$

Sabemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz $\|\, \mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \ldots \mathbf{c}_n \ldots \|$ represente un operador completamente continuo, es precisamente que

$$\|\ \mathrm{C}^{(n)}\ \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o,$$

donde

$$\mathrm{C}^{(n)} = \|\, \mathbf{c}_n\ \mathbf{c}_{n+1} \ldots \|.$$

Por consiguiente

$$\mathrm{A'A} - k^2\mathrm{I}$$

es un operador completamente continuo. Si lo designamos por C, tendremos

$$\mathrm{A'A} = k^2\mathrm{I} + \mathrm{C}. \tag{18}$$

Recíprocamente, sea A regular verificando (18), y sean $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$,

$$|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{y}_n| = 1,\ \mathbf{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0},\ \mathbf{y}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0},\ \alpha\,(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\,.$$

Tendremos

$$(\mathrm{A}\mathbf{x}_n, \mathrm{A}\mathbf{y}_n) = ((k^2\mathrm{I} + \mathrm{C})\,\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = k^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + (\mathrm{C}\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} o,$$

lo que equivale a

$$\alpha\,(\mathrm{A}\mathbf{x}_n, \mathrm{A}\mathbf{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\,.$$

Es decir, A posee la propiedad $\vec{\frac{\pi}{2}} \prec\!=\!\succ \vec{0}$.

La relación (18) es independiente del sistema onc coordenado elegido. Pues sea U unitario : $U'U = UU' = I$, la matriz transformada de A será $U'AU$, y tendremos

$$(U'A'U)\ (U'AU) = k^2 I + C_1,$$

donde $C_1 = U'CU$.

Podemos, pues, enunciar el teorema

15. *La condición necesaria y suficiente para que el operador regular* A *posea la propiedad* $\vec{0}$ *es que verifique una ecuación de la forma*

$$A'A = k^2 I + C,$$

donde $k^2 > o$ *y* C *es un operador completamente continuo.*

16. Sea $|\mathbf{x}_n| = 1$, $\mathbf{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{0}$. Sea A regular, con la propiedad $\vec{0}$. De acuerdo con (18) se verifica

$$|A\mathbf{x}_n|^2 = (A\mathbf{x}_n, A\mathbf{x}_n) = k^2 + (C\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} k^2,$$

$$|A\mathbf{x}_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} k.$$

Este resultado junto con (18) nos permite considerar los operadores A en cuestión como semejanzas aproximadas, de razón k. Designemos por $\mathfrak{G}$ el grupo que forman. $\mathfrak{G}$ contiene como subgrupo el grupo $\mathfrak{S}$ de las semejanzas ($C = O$), como éste a su vez contiene el grupo unitario $\mathfrak{U}$ ($k = 1$, $C = O$) :

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{S} \supset \mathfrak{U}. \tag{19}$$

El grupo $\mathfrak{G}$ define una geometría en el espacio de Hilbert.

Es inmediato que un operador regular de la forma

$$kU + D,$$

donde U es unitario y D completamente continuo, pertenece a $\mathfrak{G}$.

17. *Propiedades.*

1. Como $A'A$ es un operador hermítico, resulta en (18) C hermítico. C es, por tanto, un operador completamente continuo y hermítico.
2. La relación (18) demuestra inmediatamente que el conjunto de los operadores regulares que la satisfacen forman grupo, como ya sabíamos: si A regular verifica (18), A^{-1} también, y si A, B regulares verifican relaciones de la forma (18), su producto también.

3. El grupo $\mathcal{G}$ es hermítico, es decir,

$$A \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow A' \in \mathcal{G}.$$

Pues

$$A'A = k^2 I + C$$

equivale a

$$AA' = k^2 I + ACA^{-1},$$

y es sabido que el ideal de los operadores completamente continuos es bilátero, en el anillo de los operadores lineales acotados.

18. *Observación.* Es fácil encontrar ejemplos de matrices acotadas $\| \mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \ldots \|$, con $\mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \ldots$ heterogonal fuerte, que no verifican una ecuación de la forma (18). De acuerdo con 7.Cor.2, esto significa que un operador regular, para un cierto sistema onc de referencia, puede venir dado por un sistema heterogonal fuerte, pero al cambiar de sistema coordenado esto no tiene por qué seguir ocurriendo.

SEMINARIO MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Noviembre 1961

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] DIXMIER, J. *Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications.* Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 77, p. 11-101, 1949.

[2] PLANS, A. *Propiedades angulares de la convergencia en el Espacio de Hilbert.* Revista Matemática Hispano Americana, T. XXI, p. 100-109, 1961.

[3] PLANS, A. *Propiedades angulares de los sistemas heterogonales.* En prensa: Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.

[4] PLANS, A. *Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonalsysteme.* Archiv der Mathematik, T. X, 1959, p. 304-306.