

UNA INTRODUCCIÓ A L'ESTUDI CANÒNIC DELS SISTEMES AMB LLIGAMS

Carles Batlle i Arnau
Departament de Física Teòrica
Universitat de Barcelona

Resum

En aquest treball presentem una introducció als aspectes clàssics de la teoria canònica per a sistemes amb lligams, Desenvolupem el formalisme per al cas de camps de la manera més autocontinguda possible. Tractem els temes més importants i estudiem alguns exemples il·lustratius.

Abstract

In this work we present an introduction to the classical aspects of the canonical theory for constrained systems. The formalism is developed for the case of fields and it is self-contained as possible. We treat the most important topics and study some relevant examples.

0. INTRODUCCIÓ

Quasi totes les descripcions relativistes de la Natura es presenten sota la forma de lagrangians singulars. S'entenen per tals aquells lagrangians que d'entrada no generen una correspondència biunívoca entre els punts de l'espai d'evolució $(q, \dot{q})$ i de l'espai de fases (q, p) : molts punts $(q, \dot{q})$ van a parar a un mateix punt (q, p) . Això degut a que en aquests casos la definició dels moments canònics

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$$

no permet expressar totes les velocitats en funció de q i p , donat que la matriu hessianna

$$W(q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}}$$

no té rang màxim. Aquesta no invertibilitat de la transformació de Legendre fa que les equacions del moviment, tant lagrangianes com canòniques, no es puguin posar en forma normal, és a dir,

$$\dot{q} = f(q, p) \quad \dot{p} = g(q, p)$$

a l'espai de fases i

$$\ddot{q} = h(q, \dot{q})$$

a l'espai d'evolució. Degut a això no es pot aplicar el teorema d'existència i unicitat de les solucions del sistema d'equacions diferencials. Pot demostrar-se que les solucions han de satisfer uns lligams

$$\mathcal{C}(q, p) = 0$$

a l'espai de fases i, en general, també uns lligams

$$\psi(q, \dot{q}) = 0$$

a l'espai d'evolució. A més les solucions no seran, en general, úniques, sinó que dependran de funcions arbitràries, fet que està relacionat amb les transformacions de gauge.

Alguns dels lligams hamiltonians, anomenats primaris, s'obtenen directament de la no invertibilitat de la transformació de Legendre. Els altres lligams canònics s'obtenen demanant que els primaris, i tots els que succesivament van apareixent, siguin compatibles amb les equacions del moviment. Això és el que s'anomena algoritme d'estabilització. Quelcom de semblant es realitza en el formalisme lagrangià. En ambdós formalismes, paral·lelament a l'aparició de nous lligams, algunes arbitrarietats poden ser eliminades.

Per a posar de manifest la importància dels sistemes amb lligams, tant sols cal esmentar alguns exemples [1]: partícula lliure relativista i models relativistes d'acció a distància [2]; camps lliures: Dirac, Proca, Maxwell, Rarita-Schwinger; camps amb interacció: electrodinàmica, Yang-Mills, gravetat, supergravetat. També les teories de strings i superstrings, que aspiren a ser "la teoria de tot", són teories amb lligams. En definitiva, totes les teories amb llibertat de gauge són singulars, encara que no tots els sistemes singulars admeten transformacions de gauge.

Cal assenyalar també que la quantització de tots aquests sistemes, tant en el formalisme operacional com en el funcional, requereix un perfecte coneixement de les seves estructures de lligams.

Pretenem aquí presentar una introducció del formalisme canònic a nivell clàssic. Un tractament més detallat, així

com el formalisme lagrangià, poden trobar-se a [3]. Els problemes de la quantització es discuteixen a [4].

A la secció 1 exposem una obtenció original de les equacions d'Hamilton-Dirac i dels lligams primaris [5] per a teories de camps (la reducció a teories puntuals es trivial).

A la secció 2 comentem l'algorisme de Dirac, introduïm la classificació dels lligams en 1 i 2 classe, construïm el parèntesi de Dirac, donem les seves propietats i definim els graus de llibertat físics.

A la secció 3 donem dos exemples de teories que sols tenen lligams de 2 classe. A la secció 4 tractem especialment els sistemes que tenen lligams de 1 classe, donem la relació dels mateixos amb les transformacions de gauge i parlem de la fixació del gauge. L'exemple més important, el camp electromagnètic, es tracta a la secció 5. A la secció 6 es presenta el camp de Yang-Mills $SU(2)$ com a sistema de 1 classe més complicat que el camp electromagnètic i s'analitza també un sistema que presenta alhora lligams de 1 i 2 classe, tot indicant directament amb l'exemple la teoria general que es troba a la referència [3].

1. LES EQUACIONS D'HAMILTON-DIRAC

Sigui un sistema descrit per N camps $\phi^A(\mathcal{Z}, x) \equiv \phi^A(x)$, $A=1, \dots, N$, a on $\mathcal{Z}$ és el paràmetre d'evolució. Suposarem que la seva dinàmica es pot obtenir d'un lagrangià del primer ordre que no depèn explícitament de $\mathcal{Z}$:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d\tilde{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\tilde{x}} \phi, \dot{\phi}) \quad (1.1)$$

a on $\dot{f} \equiv \frac{df}{dz}$. L és una funcional dels camps i les velocitats i és una densitat lagrangiana que depèn com a màxim de les derivades primeres dels camps i que pot ser considerada alhora com un funcional elemental (veure apèndix).

Les equacions lagrangianes del moviment són

$$\left[L \right]_A(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)} - \frac{d}{dz} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^A(x)} = 0 \quad (1.2)$$

on les derivades funcionals són a $z = \text{constant}$ i l'operador d'evolució és

$$\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \int d\bar{y} \left(\dot{\phi}^B(\bar{y}) \frac{\delta}{\delta \phi^B(\bar{y})} + \ddot{\phi}^B(\bar{y}) \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}^B(\bar{y})} \right) \quad (1.3)$$

Definint

$$\alpha_A(x) = \frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)} - \int d\bar{y} \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\phi}^A(x) \delta \phi^B(\bar{y})} \dot{\phi}^B(\bar{y}) \quad (1.4)$$

$$W_{AB}(x, \bar{y}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\phi}^A(x) \delta \dot{\phi}^B(\bar{y})} \quad (1.5)$$

les equacions del moviment (1.2) es poden escriure en la forma

$$\alpha_A(x) - \int d\bar{y} W_{AB}(x, \bar{y}) \ddot{\phi}^B(\bar{y}) = 0 \quad (1.6)$$

Si L és del tipus (1.1), α_A conté els camps i totes les seves derivades fins a segon ordre, excepte les acceleracions, que han estat separades explícitament. Observi's que el paràmetre

d'evolució τ té un paper privilegiat respecte a les altres coordenades $\bar{x}$. Això està associat al fet de que el sistema és preparat en un cert i s'observa la seva evolució en τ successius; en altres paraules, està associat a la manera de donar les dades de Cauchy.

La distinció entre sistemes regulars i singulars prové de l'estudi de la matriu hessiana $W_{AB}(x, y)$: Aquesta és una matriu quadrada $N \times \infty^D$ dimensional, a on D és la dimensió de l'espai C de coordenades $(\tau, \bar{x})$. Ens interessarà el rang de W respecte als índex discrets. Això vol dir que si escrivim $\text{rang } W = k$, significarà que existeix un menor d'ordre $k \times k$ tal que el seu determinant calculat respecte els índex discrets és diferent de zero a tot $C \times C$ excepte possiblement a conjunts de mesura nul·la.

Si $\text{rang } W = N$, existirà una W^{-1} tal que

$$\int d\bar{z} W^{AC}(x, z) W_{CB}^{-1}(z, y) = \delta^A_B \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (1.7)$$

Utilitzant aquesta W^{-1} a (1.6) es poden aïllar les acceleracions:

$$\ddot{\phi}^A(x) = \int d\bar{y} W^{-1 AB}(x, y) \alpha_B(\bar{y}) \quad (1.8)$$

En aquest cas el sistema d'equacions diferencials s'anomena normal i poden aplicar-se els teoremes d'existència i unicitat. Llavors el coneixement de les dades de Cauchy:

$$\left. \phi(x) \right|_{\tau=\tau_0} \quad \left. \dot{\phi}(x) \right|_{\tau=\tau_0} \quad (1.9)$$

sobre una certa hipersuperfície $z = z_0$ de C , que proporciona alhora

$$\left. \partial_i \phi(x) \right|_{z=z_0} \quad \left. \partial_i \partial_j \phi(x) \right|_{z=z_0} \quad \left. \partial_i \ddot{\phi}(x) \right|_{z=z_0}$$

ens permet, tal com es veu de (1.8), calcular

$$\left. \ddot{\phi}(x) \right|_{z=z_0}$$

i a partir d'aquí, derivant i utilitzant repetidament (1.8), ja és possible calcular totes les derivades respecte a z i per $\bar{x}$ i construir les funcions analítiques úniques $\phi^A(x)$ que satisfan el contorn (1.9) donat. Quan això és així el sistema s'anomena regular.

Ens interessarà el cas en què

$$\text{rang } W = r < N \quad (1.10)$$

Llavors les equacions (1.6) no poden posar-se en forma normal per a $N-r=m_1$ de les acceleracions. A més existiran m_1 vectors nuls

$$\gamma_a^A(x, y) \quad a = 1, \dots, m_1$$

tals que

$$\int d\bar{y} \, W_{AB}(x, y) \gamma_a^B(y, z) \equiv 0 \quad (1.11)$$

W no tindrà ara una inversa, però sí que existirà una matriu M tal que

$$\int d\vec{y} \left(W_{AB}(x, y) M^{BC}(y, z) + \tilde{\gamma}_{aA}(x, y) \gamma_a^C(y, z) \right) = \delta_A^C \delta(\vec{x} - \vec{z}) \quad (1.12)$$

on els $\tilde{\gamma}_a$ són combinacions adjunts dels γ_a . La matriu M és la inversa de W en el subespai ortogonal al dels vectors nuls. Operant (1.6) amb

$$\int d\vec{x} M^{CA}(z, x)$$

i utilitzant (1.11) i (1.12) resulta

$$\ddot{\phi}^C(z) = \int d\vec{x} \left(M^{CA}(z, x) \alpha_A(x) - \int d\vec{y} \tilde{\gamma}_{aB}(y, x) \gamma_a^C(x, z) \ddot{\phi}^B(y) \right)$$

Aquí veiem que efectivament hi ha acceleracions que no poden ser aïllades, ja que apareixen a la dreta formant part de combinacions de vectors nuls. De (1.6) es veu però que si $\ddot{\phi}$ és solució també ho és $\ddot{\phi} +$ vectors nuls, de manera que la solució més general és, agrupant tots els termes proporcionals a vectors nuls sota coeficients indeterminats,

$$\ddot{\phi}^A(x) = \int d\vec{y} \left(M^{AB}(x, y) \alpha_B(y) + \beta_a(y) \gamma_a^A(y, x) \right) \quad (1.13)$$

Degut a l'aparició de les funcions indeterminades β_a , les solucions no resten en principi determinades pel coneixement de les dades de Cauchy. Totes les solucions satisfan però les equacions del moviment (1.6) i estem per tant en presència de possibles transformacions de gauge. Aquelles variables $\ddot{\phi}^A$ que no depèn de les β_a descriuen els graus de llibertat físics, mentre que les altres són candidates a variables de gauge. S'ha de tenir en compte que la consistència de la teoria pot eliminar total o parcialment la suposada llibertat

de gauge, determinant totes o algunes de les β_a . L'estudi detallat d'això es troba a la referència [3].

L'aparició de les β_a és una primera conseqüència de la impossibilitat d'escriure les equacions del moviment en forma normal. Una altra conseqüència és que les solucions sols existeixen en general en una certa subvarietat de l'espai d'evolució $(\phi, \dot{\phi})$.

Estudiarem tot seguit el formalisme canònic associat a aquests sistemes singulars.

Els moments canònics es defineixen segons

$$\pi_A(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^A(x)} = \pi_A[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.14)$$

és a dir, els π són funcions elementals dels camps i les velocitats.

Cal notar que

$$\frac{\delta \pi_A(x)}{\delta \dot{\phi}^B(y)} = W_{AB}(x, y)$$

i per tant si el lagrangià és singular, és a dir, si W no té rang màxim, el teorema de la funció inversa, referit als índex discrets, ens assegura que no podrem aïllar totes les velocitats com a funcionals elementals dels camps i els moments (és a dir, com a funcions de $\phi, \partial_x \phi$ i π).

Siguin $\dot{\phi}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, r$, les velocitats que és possible aïllar, és a dir, suposem que

$$\text{rang} \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\phi}^\alpha(x) \delta \dot{\phi}^\beta(y)} = r \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r$$

Llavors

$$\dot{\phi}^{\alpha} = f^{\alpha}[\phi^A, \pi_{\beta}, \dot{\phi}^a]$$

amb $\alpha, \beta = 1, \dots, r$; $a = r+1, \dots, N$. Substituint això a les definicions dels moments (1.14) serà

$$\pi_A = \mathcal{C}_A[\phi^B, f^{\alpha}[\phi^C, \pi_{\beta}, \dot{\phi}^a], \dot{\phi}^b]$$

Per a $A = 1, \dots, r$, això no són més que identitats $\pi_{\alpha} = \pi_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, r$

(ja que corresponen al canvi invers d'aquelles velocitats que són aïllables). En canvi, per a $A = r+1, \dots, N$ tenim relacions no trivials

$$\pi_a = \mathcal{C}_a[\phi^B, f^{\alpha}[\phi^C, \pi_{\beta}, \dot{\phi}^b], \dot{\phi}^d]$$

amb $a, b, d = r+1, \dots, N$. El punt important és que aquestes relacions no poden contenir les velocitats, ja que si així fos noves velocitats podrien ser aïllades, en contra de la suposició de que rang $W=r$.

Tenim així els anomenats lligams primaris

$$\pi_a - \mathcal{C}_a[\phi^A, \pi_{\alpha}] = 0 \quad (1.15)$$

o bé

$$A_a[\phi^A, \pi_A] = 0 \quad a = r+1, \dots, N = 1, \dots, m_1 \quad (1.16)$$

Aquests funcionals elementals contenen els camps, els seus gradients $\partial_{\bar{x}} \phi$ i els moments, però no els gradients dels mo-

ments. Per tant, en el formalisme canònic una primera conseqüència del fet que la matriu hessiana no tingui rang màxim és l'existència de relacions entre els camps, els seus gradients i els moments.

D'altra banda, en no poder-se expressar totes les velocitats com a funcionals de ϕ i π , algunes expressions lagrangianes no tindran correspondència en el formalisme canònic. Quan aquesta correspondència existeix es diu que la quantitat lagrangiana considerada és canonitzable.

Més concretament, un funcional $f[\phi, \dot{\phi}]$ de l'espai d'evolució s'anomena canonitzable si existeix un funcional $g[\phi, \pi]$ de l'espai de fases tal que

$$f[\phi, \dot{\phi}] = g[\phi, \pi[\phi, \dot{\phi}]] \equiv FL^* g[\phi, \pi] \quad (1.17)$$

a on FL^* és el pull-back de l'aplicació $FL(\phi, \dot{\phi}) = (\phi, \pi)$ i equival a fer $\pi = \pi[\phi, \dot{\phi}]$. Tal com es demostra a les referències i, per a que una quantitat sigui canonitzable s'ha de verificar

$$\Gamma_a(x) f = 0 \quad a = 1, \dots, m_1 \quad (1.18)$$

a on

$$\Gamma_a(x) = \int d\tau \, \gamma_a^A(x, \gamma) \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}^A(\gamma)} \quad (1.19)$$

Aquesta condició es debilita quan es demana la canonitzabilitat en una subvarietat de l'espai d'evolució.

L'energia lagrangiana és el funcional de l'espai d'evo-

lució definit com

$$E_L[\phi, \dot{\phi}] = \int d\vec{x} \pi_A[\phi, \dot{\phi}] \dot{\phi}^A - L[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.20)$$

Aquest funcional és canonitzable. En efecte, donat que E_L no depèn de gradients de les velocitats, l'aplicació de (1.19) proporciona

$$\begin{aligned} \Gamma_a(x) E_L &= \\ &= \int d\vec{y} d\vec{z} \gamma_a^A(x, y) \left(\frac{\delta \pi_B(z)}{\delta \dot{\phi}^A(y)} \dot{\phi}^B(z) + \pi_B(z) \delta_A^B \delta(\vec{z} - \vec{y}) \right) - \int d\vec{y} \gamma_a^A(x, y) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^A(y)} \\ &= \int d\vec{z} \dot{\phi}^B(z) W_{AB}(y, z) \gamma_a^A(x, y) + \int d\vec{y} \gamma_a^A(x, y) (\pi_A(y) - \pi_A(y)) = \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Existeix per tant un funcional $H_C[\phi, \pi]$ de l'espai de fases tal que

$$H_C[\phi, \pi[\phi, \dot{\phi}]] = E_L[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.21)$$

Els lligams (1.16) són identitats lagrangianes, és a dir

$$A_a[\phi, \pi[\phi, \dot{\phi}]] = FL^* A_a[\phi, \pi] \equiv 0 \quad a = 1, \dots, m_1 \quad (1.22)$$

Derivant respecte a les velocitats serà

$$\int d\vec{y} FL^* \left(\frac{\delta A_a(x)}{\delta \pi_A(y)} \right) \frac{\delta \pi_A(y)}{\delta \dot{\phi}^B(z)} \equiv 0$$

és a dir

$$\int d\vec{y} FL^* \left(\frac{\delta A_a(x)}{\delta \pi_A(y)} \right) W_{AB}(y, z) \equiv 0$$

i per tant els m_1 vectors $FL^* \frac{\delta A_a(x)}{\delta \pi_A(y)}$ constitueixen una base de l'espai m_1 -dimensional dels vectors nuls de W (la independència lineal es dedueix de la independència dels funcionals A_a). Derivarem ara (1.21) respecte a les velocitats

$$\int d\vec{y} FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi^A(y)} \frac{\delta \pi^A(y)}{\delta \dot{\phi}^B(z)} = \int d\vec{y} \left(\frac{\delta \pi_A(y)}{\delta \dot{\phi}^B(z)} \dot{\phi}^A(y) + \pi_A(y) \delta_B^A \delta(y-z) \right) - \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^B(z)}$$

d'on

$$\int d\vec{y} \left(FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi^A(y)} - \dot{\phi}^A(y) \right) W_B^A(y, z) = 0$$

i per tant el terme () és una combinació de vectors nuls:

$$\dot{\phi}^A(y) = FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi^A(y)} + \int d\vec{x} \mathcal{V}_a(x) FL^* \frac{\delta A_a(x)}{\delta \pi^A(y)} \quad (1.23)$$

on els $\mathcal{V}_a$ són funcionals $\mathcal{V}_a[\phi, \dot{\phi}]$ coneguts a partir de la mateixa equació (1.23). Les $\mathcal{V}_a$ no són per tant funcions arbitràries: ben al contrari, són aquelles expressions lagrangianes que converteixen (1.23) en identitats. Derivarem ara (1.21) respecte als camps:

$$FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \phi^A(x)} + \int d\vec{y} FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi^B(y)} \frac{\delta \pi^B(y)}{\delta \phi^A(x)} = \int d\vec{y} \frac{\delta \pi^B(y)}{\delta \phi^A(x)} \dot{\phi}^B(y) - \frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)}$$

Posant-hi (1.23) queda

$$FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \phi^A(x)} = \int d\vec{z} d\vec{y} \frac{\delta \pi^B(y)}{\delta \phi^A(x)} \mathcal{V}_a(z) FL^* \frac{\delta A_a(z)}{\delta \pi^B(y)} - \frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)}$$

De (1.22) es dedueix però

$$FL^* \frac{\delta A_a(z)}{\delta \phi^A(x)} + \int d\tilde{y} FL^* \frac{\delta A_a(z)}{\delta \pi^B(y)} \frac{\delta \pi^B(y)}{\delta \phi^A(x)} = 0$$

i per tant resulta

$$FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \phi^A(x)} = - \int d\tilde{z} \mathcal{V}_a(z) FL^* \frac{\delta A_a(z)}{\delta \phi^A(x)} - \frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)} \quad (1.24)$$

Les equacions del moviment (1.2) es poden escriure com

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^A(x)} = \frac{d}{dz} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^A(x)} = \dot{\pi}_A(x) \quad (1.25)$$

i (1.24) esdevé finalment

$$\dot{\pi}_A(x) = - FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \phi^A(x)} - \int d\tilde{y} \mathcal{V}_a(y) FL^* \frac{\delta A_a(y)}{\delta \phi^A(x)} \quad (1.26)$$

Les equacions (1.26) i (1.23), juntament amb les definicions (1.14), (1.16) i (1.21), són equivalents a les equacions lagrangianes del moviment (1.2). Les equacions (1.23) són simplement les definicions de les $\mathcal{V}_a$ que apareixen a (1.26).

El pas que cal donar ara és convertir (1.23) i (1.26) en equacions diferencials del primer ordre respecte a $\mathcal{Z}$, és a dir, passar a considerar ϕ i π com a variables independents. Això pot fer-se simplement eliminant la substitució de les π . Al fer-ho no s'obtenen però equacions diferencials en forma normal, donat que en els membres drets apareixen les $\mathcal{V}_a$ i aquestes contenen les velocitats. A més, les $\mathcal{V}_a$ no són, de moment, expressables com a funcionals de l'espai de fases, ja que si això fos així estariem contradient la suposició sobre

el rang de W (de fet, si els lligams primaris s'agafen en la forma (1.15), llavors (1.23) mostra que les $\dot{\varphi}_a$ són simplement les velocitats no canonitzables).

Les equacions del moviment a l'espai de fases, anomenades d'Hamilton-Dirac, són per tant

$$\dot{\phi}^A(x) \stackrel{M_0}{=} \frac{\delta H_c}{\delta \pi_A(x)} + \int d\tilde{y} \, \varphi_a(\tilde{y}) \frac{\delta A_a(\tilde{y})}{\delta \pi_A(x)} \quad (1.27)$$

$$\dot{\pi}_A(x) \stackrel{M_0}{=} - \frac{\delta H_c}{\delta \phi^A(x)} - \int d\tilde{y} \, \varphi_a(\tilde{y}) \frac{\delta A_a(\tilde{y})}{\delta \phi^A(x)} \quad (1.28)$$

El signe $\stackrel{M_0}{=}$ indica igualtat sobre la subvarietat de l'espai de fases definida per $A_a[\phi, \pi] = 0$ (en el sentit que es verifica a tot C llevat de conjunts de mesura nul·la). Això és així ja que en els membres drets podem afegir combinacions arbitràries dels lligams primaris i al substituir els moments sempre obtindrem les mateixes (1.23) i (1.26), tal com indica (1.22). La impossibilitat d'escriure les equacions del moviment en forma normal porta com sempre a que les solucions sols existeixin en una carta subvarietat, part de la qual ve donada pel lligams primaris. La no unicitat de les solucions es reflexa en l'aparició de funcions arbitràries de $(\tau, \vec{x})$. Això es pot veure explícitament si tenim en compte que amb l'expressió (15) dels lligams primaris algunes de les equacions del moviment esdevenen

$$\dot{\phi}^a \stackrel{M_0}{=} \dot{\phi}^a$$

i per tant les velocitat $\dot{\phi}^a$ són funcions arbitràries de $(\tau, \vec{x})$.

El paral·lelisme amb el cas lagrangià es manifesta en el fet que allà, escollint els vectors nuls

$$\gamma_a^A(x, \gamma) = FL^* \frac{\delta A_a(x)}{\delta \pi_A(\gamma)}$$

les β_a són algunes de les acceleracions, que no queden per tant determinades, a aquest nivell, per les equacions del moviment.

Si definim una hamiltonià primari

$$H_p = H_c + \int d\vec{x} \gamma_a(x) A_a(x) \quad (1.29)$$

les equacions (1.27) i (1.28) s'escriuran

$$\ddot{\phi}^A(x) \stackrel{M_0}{=} \frac{\delta H_p}{\delta \pi_A(x)} \quad (1.30)$$

$$\dot{\pi}_A(x) \stackrel{M_0}{=} - \frac{\delta H_p}{\delta \phi^A(x)} \quad (1.31)$$

on hem negligit termes $\sim A^a$ que s'anul·len a M_0 . Cal recordar que totes les derivades funcionals són a $Z = \text{constant}$. Si, donats funcionals qualsevol de l'espai de fases $F[\phi, \pi]$ i $G[\phi, \pi]$, definim el seu parèntesi de Poisson a $Z = \text{constant}$ com

$$\{F, G\} = \int d\vec{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi^A(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi_A(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_A(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi^A(x)} \right) \quad (1.32)$$

queda llavors

$$\ddot{\phi}^A(x) \stackrel{M_0}{=} \{ \phi^A(x), H_p \} \quad (1.33)$$

$$\dot{\pi}_A(x) \stackrel{M_0}{=} \{ \pi_A(x), H_p \} \quad (1.34)$$

Cal remarcar que els lligams $A_a = 0$ no poden ser usats dins els parèntesis de Poisson, donat que $A_a = 0$ no implica que les seves derivades funcionals també siguin nul·les. En canvi, si que es verifica $d_x A_a \stackrel{H_0}{=} 0$, ja que els lligams primaris s'han de satisfer a C quasi-arreu. Les relacions $d_c A_a \stackrel{H_0}{=} 0$ poden però ser incompatibles amb unes dades de Cauchy donades. En efecte, si col·loquem unes dades de Cauchy qualsevol sobre M no tenim cap garantia de que l'evolució posterior s'hi mantingui. En altres paraules, la subvarietat de l'espai de fases sobre la que existiran les solucions de les equacions del moviment no és, en general, M_0 , sinó una subvarietat més petita continguda dins M_0 . Per a trobar aquesta subvarietat, M_r , cal fer compatibles els lligams amb les equacions del moviment primàries, és a dir, cal imposar $d_c A_a = 0$. Això és el que s'anomena procés d'estabilització, del qual parlarem a la següent secció.

Suposarem per tant que per a un cert $\tau = \tau_0$ es donen unes dades de Cauchy

$$\phi^A(x) \Big|_{\tau=\tau_0} \quad \pi_A(x) \Big|_{\tau=\tau_0}$$

contingudes a M_r . El coneixement d'aquestes funcions permet calcular els membres drets de les equacions del moviment, llevat de les arbitrarietats ja esmentades (algunes de les quals poden però haver desaparegut en el procés d'estabilització).

zació) i a partir d'aquí poden construir-se analíticament les solucions. De la manera en que M_r és construïda, està garantit que les solucions hi romandran per a $\tau > \tau_0$.

2. CLASSIFICACIÓ DELS LLIGAMS. PARÈNTESE DE DIRAC. GRAUS DE LLIBERTAT FÍSICS

Tal com hem indicat, les equacions del moviment de la secció anterior han de fer-se compatibles amb l'estabilitat de la subvarietat M_0 . Aquesta estabilitat pot satisfer-se sobre M_0 (o idènticament) pot imposar nous lligams o pot conduir a expressar algunes de les funcions $\sqrt{a}$ en termes canònics. Si apareixen nous lligams definiran sobre M_0 una subvarietat M_1 més petita, a la qual caldrà també exigir estabilitat. El procés es repeteix fins que no apareixen nous lligams. El conjunt de tots els lligams obtinguts defineix una subvarietat M_f de l'espai de fases sobre la qual es desenvolupa la dinàmica del sistema.

En general, aquest procediment ens proporcionarà $2N+M'$ lligams, que anomenarem genèricament γ . Es diu que un lligam és de primera classe si, sobre la subvarietat total dels lligams M_f , fa parèntesi nul amb tots els lligams (inclòs ell mateix). En cas contrari s'anomena de segona classe. En altres paraules, els lligams de primera classe donen lligams al fer el seu parèntesi amb altres lligams.

Suposarem que existeixen $2M$ lligams de segona classe i M' lligams de primera classe:

$$\gamma \quad \begin{cases} \varphi_i & i = 1, \dots, M' \\ \chi_i & i = 1, \dots, 2M \end{cases}$$

Assumirem a més que no es possible efectuar combinacions lineals dels χ que siguin de primera classe. Llavors la matriu

$$C_{ij}(x, y) = \{ \chi_i(x), \chi_j(y) \}$$

tindrà determinant no nul sobre la subvarietat M_r i existirà la matriu inversa C^{-1} definida de tal manera que

$$\int d\bar{x} C_{ik}(x, \bar{x}) C_{lj}^{-1}(\bar{x}, y) = \delta_{ij} \delta(\bar{x} - y)$$

En general, cal fixar condicions de contorn per a assegurar la unicitat de C^{-1} . El que el nombre de lligams de segona classe sigui parell és degut a que una matriu antisimètrica sols té determinant no nul si és d'ordre parell. Donades dues quantitats qualsevol de l'espai de fases, es defineix el seu parèntesi de Dirac respecte als lligams χ mitjançant

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \int d\bar{x} d\bar{y} \{A, \chi_i(\bar{x})\} C_{ij}^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) \{\chi_j(\bar{y}), B\}$$

Aquest parèntesi té les propietats

$$\begin{aligned} \{\varphi_i, -\}^* &\stackrel{M_f}{=} \{\varphi_i, -\} \\ \{\chi_i, -\}^* &\stackrel{M_f}{=} 0 \end{aligned}$$

La segona d'aquestes igualtats ens diu que dins el parèntesi de Dirac els lligams de segona classe poden posar-se a zero sense inconsistències, fet aquest que no passava amb el parèntesi de Poisson original.

La introducció del parèntesi de Dirac és equivalent a la definició d'unes quantitats "starred" A^* a partir de qualsevol funció A de l'espai de fases:

$$A^* = A - \int d\vec{x} d\vec{y} C_{ij}^{-1}(x, y) \{X_j(y), A\} X_i(x) \quad (2.1)$$

Cal notar que $\varphi_i^* \stackrel{M_f}{=} \varphi_i$ i que $X_i^* \stackrel{M_f}{=} 0$. La propietat fonamental és que

$$\{A^*, -\} \stackrel{M_f}{=} \{A, -\}^* \quad (2.2)$$

A efectes del càlcul, és important saber que el parèntesi de Dirac pot construir-se per etapes. Imaginem que separem els X_i en dos grups $X_i^{(1)}$ i $X_i^{(2)}$. Llavors podem construir

$$\{A, B\}^\# = \{A, B\} - \int d\vec{x} d\vec{y} \{A, X_i^{(1)}(x)\} \tilde{C}_{ij}^{-1}(x, y) \{X_j^{(1)}(y), B\}$$

on $\tilde{C}_{ij} = \{X_i^{(1)}, X_j^{(1)}\}$ i tot seguit

$$\{A, B\}^* = \{A, B\}^\# - \int d\vec{x} d\vec{y} \{A, X_i^{(2)}(x)\}^\# \tilde{\tilde{C}}_{ij}^{-1}(x, y) \{X_j^{(2)}(y), B\}^\#$$

on $\tilde{\tilde{C}}_{ij} = \{X_i^{(2)}, X_j^{(2)}\}^\#$. Un càlcul directe mostra que això coincideix amb el parèntesi construït en una sola etapa. És evident que el parèntesi de Dirac és antisimètric

$$\{A, B\}^* = -\{B, A\}^*$$

i pot comprobar-se que verifica també la identitat de Jacobi:

$$\{A, \{B, C\}^*\}^* + \{C, \{A, B\}^*\}^* + \{B, \{C, A\}^*\}^* = 0$$

La construcció del parèntesi de Dirac permet eliminar els lligams de segona classe de la teoria, en el sentit de que poden utilitzar-se fortament (és a dir, dins el parèntesi). Hom pot demostrar que l'equació del moviment sobre M_f ve donada per

$$\frac{dF}{dt} \stackrel{M_f}{=} \{F, H_c\}^* + \int d\vec{y} \, v_i(\vec{y}) \{F, \varphi_i^{(0)}(\vec{y})\}$$

a on els $\varphi_i^{(0)}$ són els lligams primaris que romanen de primera classe al final del procés d'estabilització. Si construïm H_c^* d'acord amb (2.1) llavors (2.2) ens diu que l'equació del moviment es podrà escriure també com

$$\frac{dF}{dt} \stackrel{M_f}{=} \{F, H_c^*\} + \int d\vec{y} \, v_i(\vec{y}) \{F, \varphi_i^{(0)}(\vec{y})\}$$

Pot demostrar-se que la dinàmica es pot obtenir també d'un hamiltonià H_f més senzill que H_c^* . Aquest H_f s'obté simplement afegint a H_c les peces corresponents als primaris tals que les seves $\sqrt{a}$ han estat determinades en el procés d'estabilització:

$$H_f = H_c + \int d\vec{y} \, f_i(\vec{y}) \chi_i^{(0)}(\vec{y})$$

on els $\chi_i^{(0)}$ són els primaris de segona classe i les f_i són funcions conegudes de ϕ i π . Llavors

$$\frac{dF}{dt} \stackrel{M_f}{=} \{F, H_f\} + \int d\vec{y} \, v_i(\vec{y}) \{F, \varphi_i^{(0)}(\vec{y})\}$$

La demostració de tot això, així com un estudi detallat del procés d'estabilització pot trobar-se a la referència [3].

Per a finalitzar aquesta breu exposició de les respostes dels lligams, demostrarem que sobre M_r el parèntesi de dos primera classe és un primera classe. En efecte, siguin φ_1 i φ_2 dos lligams de primera classe i sigui ψ un lligam qualsevol. Llavors, utilitzant la identitat de Jacobi,

$$\{\{\varphi_1, \varphi_2\}, \psi\} = -\{\{\psi, \varphi_1\}, \varphi_2\} - \{\{\varphi_2, \psi\}, \varphi_1\} \stackrel{M_r}{=} 0$$

pel simple fet de ser φ_1 i φ_2 de primera classe sobre M_r .

Anem ara a dir quelcom sobre el contacte de graus de llibertat. El fet de que una teoria contingui lligams canònics significa que no totes les variables de l'espai de fases són independents. Donada una teoria en un espai de les fases $2N$ -dimensional (ens referim als índex discrets) amb $2M$ lligams de segona classe i M' lligams de primera classe, pot demostrar-se que el nombre de graus de llibertat independents és $2N-2M-2M'$, és a dir, cada lligam de segona classe elimina un grau de llibertat i cada lligam de primera classe n'elimina dos. A més, aquest $2N-2M-2M'$ graus de llibertat independents poden implementar-se en $N-M-M'$ parelles de variables canòniques conjugades que expandeixen l'anomenat espai de les fases reduït (RPS). La seva dimensió és el nombre de graus de llibertat físics de la teoria. S'anomenen observables aquelles quantitats tals que les seves equacions d'evolució no depenen de funcions arbitràries (de les que romanen arbitràries al final del procés d'estabilització). Pot demostrar-se que els observables es poden escriure en termes de les variables del RPS.

3. EXEMPLES DE LLIGAMS DE SEGONA CLASSE. ELS CAMPS DE PROCA I DIRAC

Anem a considerar aquí dues teories que sols presenten lligams de segona classe. En aquestes teories els graus de llibertat físics poden obtenir-se de la pròpia teoria, sense haver d'introduir lligams a ma, tal com passa amb les teories que presenten lligams de primera classe.

L'exemple més senzill és el camp de Proca, el camp vectorial lliure amb massa, descrit per la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m^2 A^\mu(x) A_\mu(x)$$

on $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$. Amb la notació tridimensional

$$E^i = F^{i0} \quad , \quad B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{0ij} F_{ij}$$

la lagrangiana s'escriu

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\vec{E}^2(x) - \vec{B}^2(x)) + \frac{1}{2} m^2 A^2(x)$$

Donat que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = -F^{\alpha\beta}$$

els moments canònics seran

$$\pi_\alpha^\beta = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_\alpha(x)} = -F^{0\alpha}(x) = -\dot{A}^\alpha(x) + \partial^\alpha A^0(x)$$

de manera que tenim un lligam primari

$$\chi_1(x) = \pi_0(x) \stackrel{M_0}{=} 0$$

i una relació $\pi^i(x) = -\dot{\tilde{A}}^i(x) + \delta^i A^0(x)$ que ens permet obtenir les velocitats tridimensionals

$$\dot{A}^i(x) = \partial^i A^0(x) - \pi^i(x) \quad (3.1)$$

L'energia lagrangiana és

$$\begin{aligned} E_L &= \int d\vec{x} (-\dot{A}^\alpha(x) + \partial^\alpha A^0(x)) \dot{A}_\alpha(x) - L = \\ &= \int d\vec{x} \left(-\vec{E}(x) \cdot \vec{A}(x) - \frac{1}{2} (\vec{E}^2(x) - \vec{B}^2(x)) - \frac{1}{2} m^2 A^2(x) \right) \end{aligned}$$

la canonització de la qual ens dona l'hamiltonià canònic

$$H_c = \int d\vec{x} \left(\frac{1}{2} (\vec{\pi}^2 + \vec{B}^2 + m^2 \vec{A}^2) + \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} A_0 - \frac{1}{2} m^2 A_0^2 \right)$$

Sabem que ha de ser

$$\dot{A}^\mu(y) = F_L^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\mu(y)} + \int d\vec{x} \, v(x) F_L^* \frac{\delta K_1(x)}{\delta \pi_\mu(y)}$$

i això proporciona, a més de (3.1), $V(x) = A^0(x)$.

Els parèntesis de Poisson es defineixen per a $x^0 = \text{constant}$ (és usual agafar, en les teories de camps, x^0 com a paràmetre d'evolució), segons

$$\{F, G\} = \int d\vec{x} \left(\frac{\delta F}{\delta A^\mu(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi_\mu(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_\mu(x)} \frac{\delta G}{\delta A^\mu(x)} \right)$$

En particular, l'únic parèntesi fonamental no nul és

$$\{A^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = g^{\mu\nu} \delta(x-y)$$

Observi's que per tant $\pi_0 = 0$ no es pot utilitzar dins els parèntesis.

L'hamiltonià primari és

$$H_p = H_c + \int dy \, v(y) \chi_1(y)$$

i les equacions del moviment que proporciona són

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &\stackrel{M_0}{=} \{A_i, H_p\} = -\pi_i + \partial_i A_0 \\ \dot{A}_0 &\stackrel{M_0}{=} \{A_0, H_p\} = v \\ \dot{\pi}_0 &\stackrel{M_0}{=} \{\pi_0, H_p\} = \partial_i \pi^i + m^2 A_0 \\ \dot{\pi}_i &\stackrel{M_0}{=} \{\pi_i, H_p\} = (\vec{\nabla} \times \vec{B})_i + m^2 A_i \end{aligned}$$

Cal ara plantejar l'estabilitat del lligam primari

$$\dot{\chi}_1(x) \stackrel{M_0}{=} \{\chi_1(x), H_p\} = \partial_i \pi^i + m^2 A_0$$

Com que això no s'anul·la sobre M_0 , ens apareix un lligam secundari

$$\chi_2(x) \equiv \partial_i \pi^i(x) + m^2 A_0(x) \stackrel{M_1}{=} 0$$

L'estabilitat d'aquest nou lligam ens porta a

$$\dot{\chi}_2(x) \stackrel{M_0}{=} \{\chi_2(x), H_p\} = m^2 (\partial_i A^i + v) = 0$$

i això ens permet determinar canònicament la funció v

$$v \stackrel{M_0}{=} -\partial_i A^i$$

Observi's que el lligam secundari ha convertit el primari en lligam de segona classe. Aquest és un fet del tot general:

quan apareix un lligam que converteix en segona classe un lligam primari que fins aquell moment era de primera classe, l'estabilitat del nou lligam determina una de les funcions canònicament desconegudes que hi havia en l'hamiltonià primari.

Acabat el procés d'estabilització, procedim a construir el parèntesi de Dirac associat als dos lligams de segona classe de la teoria. La matriu dels lligams és

$$\{X_1(x), X_2(y)\} = -m^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad C_{ij}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

i la inversa és

$$C_{ij}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{m^2} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Els parèntesis de Dirac fonamentals són

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}^* &= (g^{\mu\nu} - g^{\mu 0} g^{\nu 0}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A^\mu(x), A^\nu(y)\}^* &= -\frac{1}{m^2} (g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu i} g^{\nu i}) \partial_x^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}^* &= 0 \end{aligned}$$

i és fàcil comprovar que dins d'ells poden utilitzar-se els lligams X_1 i X_2 . Segons el contacte general que hem indicat a la secció 2, el nombre de graus de llibertat físics del camp de Proca serà $8 - 2 \times 1 = 6$. Els dos graus de llibertat espuris es poden obtenir directament dels lligams:

$$\Pi_0(x) = 0, \quad A_0(x) = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(x)$$

Agafant llavors $\vec{A}$ i $\vec{\Pi}$ com a variables físiques de l'espai de fases, els seus parèntesis de Dirac són

$$\{A^i(x), \pi^j(y)\}^* = g^{ij} \delta(x-y)$$

$$\{A^i(x), A^j(y)\}^* = 0, \quad \{\pi^i(x), \pi^j(y)\}^* = 0$$

que coincideixen amb els canònics. Les seves equacions del moviment són

$$\dot{A}^i \stackrel{H_1}{=} \{A^i, H_c\}^* = -\pi^i + \frac{1}{m^2} \partial^i \partial_j \pi^j$$

$$\dot{\pi}^i \stackrel{H_1}{=} \{\pi^i, H_c\}^* = (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i + m^2 A^i$$

Les equacions del moviment es poden obtenir també utilitzant el parèntesi de Poisson i l'hamiltonià

$$H_f = H_c - \int d\vec{x} \partial_i A^i(\vec{x}) \pi_0(\vec{x})$$

El segon exemple que presentem introdueix graus de llibertat fermiònics, és a dir, variables que anticommuten, i en aquest sentit ens apartem de la teoria general presentada, on no ens hem preocupat en cap moment de l'ordre de les variables. De tota manera podrem utilitzar els resultats de la secció 1 amb la sola modificació dels parèntesis fonamentals i una certa cura amb les commutacions (veure la referència [6] per a una discussió del formalisme canònic per teories fermiòniques).

La descripció del camp lliure de spin 1/2 pot fer-se amb la lagrangiana de Dirac (suposem camp complex i amb massa):

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\theta}(x) \left(\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \theta(x)$$

on $\bar{\theta} = \theta^* \gamma_0$ i les θ_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$, són variables de Grassmann que anticommen $\gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i$, $\psi = \theta_\alpha$, θ_α^* [7].

La lagrangiana desenvolupada és

$$\mathcal{L} = \bar{\theta}_\alpha \frac{i}{2} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \theta_\beta - \partial_\mu \bar{\theta}_\alpha \frac{i}{2} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta_\beta - m \bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha$$

Utilitzant les derivades funcionals per l'esquerra, els moments canònics són

$$\pi_\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_\alpha} = -\frac{i}{2} \theta_\alpha^* \quad , \quad \pi_\alpha^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_\alpha^*} = -\frac{i}{2} \theta_\alpha$$

Aquestes relacions no proporcionen cap velocitat, sinó 8 lligams primaris:

$$\chi_\alpha = \pi_\alpha + \frac{i}{2} \theta_\alpha^* \stackrel{M_0}{=} 0 \quad , \quad \chi_\alpha^* = \pi_\alpha^* + \frac{i}{2} \theta_\alpha \stackrel{M_0}{=} 0$$

L'energia lagrangiana és

$$E_L = \int d\vec{x} \left(\dot{\theta}_\alpha(x) \pi_\alpha(x) + \dot{\theta}_\alpha^*(x) \pi_\alpha^*(x) \right) - L$$

i l'hamiltonià canònic que proporciona és

$$H_c = \int d\vec{x} \left(-\frac{i}{2} \theta_\alpha^*(\vec{r}, \vec{\tau}) \gamma_\beta \vec{\nabla} \theta_\beta + \frac{i}{2} \vec{\nabla} \theta_\alpha^*(\vec{r}, \vec{\tau}) \gamma_\beta \theta_\beta + m \theta_\alpha^*(\vec{r}, \vec{\tau}) \theta_\alpha \right)$$

mentre que l'hamiltonià primari és

$$H_p = H_c + \int d\vec{x} \left(v_\alpha(x) \chi_\alpha(x) + v_\alpha^*(x) \chi_\alpha^*(x) \right)$$

Les identitats

$$\dot{\Theta}_\alpha^{(1)} = \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\alpha^{(1)}} + \int d\vec{x} \left(\mathcal{V}_\alpha \frac{\delta \chi_\alpha}{\delta \pi_\alpha^{(1)}} + \mathcal{V}_\alpha^* \frac{\delta \chi_\alpha^*}{\delta \pi_\alpha^{(1)}} \right)$$

ens donen la relació entre les $\mathcal{V}$ i les variables lagrangianes: $\mathcal{V}_\alpha = \dot{\Theta}_\alpha$, $\mathcal{V}_\alpha^* = \dot{\Theta}_\alpha^*$

Els parèntesis de Poisson fonamental es defineixen segons (veure Ref.[6])

$$\begin{aligned} \{ \Theta_\alpha(x), \pi_\beta(y) \} &= -\delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}-\vec{y}) = \{ \pi_\alpha(x), \Theta_\beta(y) \} \\ \{ \Theta_\alpha^*(x), \pi_\beta^*(y) \} &= -\delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}-\vec{y}) = \{ \pi_\alpha^*(x), \Theta_\beta^*(y) \} \end{aligned}$$

i són per tant simètrics.

Amb això és fàcil verificar que tots els lligams primaris són de segona classe

$$\{ \chi_\alpha(x), \chi_\beta^*(y) \} = -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

i per tant la seva estabilitat determinarà totes les funcions arbitràries. Les equacions primàries del moviment són

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_\alpha(x) &\stackrel{M_0}{=} \{ \Theta_\alpha(x), H_p \} = \mathcal{V}_\alpha(x), \quad \dot{\Theta}_\alpha^*(x) \stackrel{M_0}{=} \mathcal{V}_\alpha^*(x) \\ \dot{\pi}_\alpha(x) &\stackrel{M_0}{=} \{ \pi_\alpha(x), H_p \} = i (\vec{\nabla} \Theta_\alpha^* \gamma \cdot \vec{r})_\alpha + m (\Theta_\alpha^* \gamma)_\alpha + \frac{i}{2} \mathcal{V}_\alpha^*(x) \\ \dot{\pi}_\alpha^*(x) &\stackrel{M_0}{=} \{ \pi_\alpha^*(x), H_p \} = i (\gamma \cdot \vec{r} \vec{\nabla} \Theta_\alpha)_\alpha + m (\gamma \cdot \Theta)_\alpha + \frac{i}{2} \mathcal{V}_\alpha(x) \end{aligned}$$

i l'estabilitat dels lligams primaris és

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_\alpha(x) &\stackrel{M_0}{=} \{ \chi_\alpha(x), H_p \} = i (\vec{\nabla} \Theta_\alpha^* \gamma \cdot \vec{r})_\alpha + m (\Theta_\alpha^* \gamma)_\alpha + i \mathcal{V}_\alpha^* \\ \dot{\chi}_\alpha^*(x) &\stackrel{M_0}{=} \{ \chi_\alpha^*(x), H_p \} = i (\gamma \cdot \vec{r} \vec{\nabla} \Theta)_\alpha + m (\gamma \cdot \Theta)_\alpha + i \mathcal{V}_\alpha \end{aligned}$$

d'on

$$\mathcal{V}_\alpha^* = -(\vec{\nabla} \theta^* \cdot \vec{r}_0 \cdot \vec{\nabla})_\alpha + i m (\theta^* \dot{r}_0)_\alpha$$

$$\mathcal{V}_\alpha = -(\dot{r}_0 \cdot \vec{\nabla} \theta)_\alpha + i m (\dot{r}_0 \cdot \theta)_\alpha$$

La matriu dels lligams i la seva inversa són

$$C_{ij}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}_4 \\ -\mathbb{1}_4 & 0 \end{bmatrix} i \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad C_{ij}^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_4 \\ \mathbb{1}_4 & 0 \end{bmatrix} i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

i els parèntesis de Dirac no nuls són

$$\begin{aligned} \{\theta_\alpha(x), \pi_\beta(y)\}^* &= -\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\theta_\alpha^*(x), \pi_\beta^*(y)\}^* = -\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\theta_\alpha(x), \theta_\beta^*(y)\}^* &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\theta_\alpha^*(x), \theta_\beta(y)\}^* = -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\pi_\alpha(x), \pi_\beta^*(y)\}^* &= \frac{i}{4} \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\pi_\alpha^*(x), \pi_\beta(y)\}^* = \frac{i}{4} \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

El nombre de graus de llibertat de la teoria és $8 \times 2 = 16$. Com que hi ha 8 lligams de segona classe, el nombre de graus de llibertat físics vindrà donat per $16 - 8 \times 1 = 8$. Escollint aquest els donats per

$$\theta_\alpha(x), \quad \theta_\alpha^*(x) \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

els seus parèntesis de Dirac són

$$\begin{aligned} \{\theta_\alpha(x), \theta_\beta^*(y)\} &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\theta_\alpha^*(x), \theta_\beta(y)\} &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

i les seves equacions del moviment

$$\dot{\Theta}_\alpha^*(x) \stackrel{H_0}{=} \{\Theta_\alpha^*, H_c\}^* = -(\vec{\nabla} \Theta^* \cdot \vec{r}_0)_\alpha + im(\Theta^* \vec{r}_0)_\alpha$$

$$\dot{\Theta}_\alpha(x) \stackrel{H_0}{=} \{\Theta_\alpha, H_c\}^* = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{\nabla} \Theta)_\alpha + im(\vec{r}_0 \Theta)_\alpha$$

De nou, les equacions del moviment s'obtenen també amb el parèntesi de Poisson i l'hamiltonià

$$H_f = H_c + \int d\vec{x} \left[(-\vec{r}_0 \cdot \vec{\nabla} \Theta)_\alpha + im(\vec{r}_0 \Theta)_\alpha \right] \chi_\alpha + \left[-(\vec{\nabla} \Theta^* \cdot \vec{r})_\alpha + im(\Theta^* \vec{r})_\alpha \right] \chi_\alpha^*$$

4. TRANSFORMACIONS DE GAUGE. FIXACIO DEL GAUGE

Com és ben sabut, s'anomenen transformacions de gauge aquelles transformacions de simetria interna que depenen de funcions arbitràries. La manera natural de realitzar-se a l'espai de les fases és calculant el parèntesi de Poisson entre la quantitat a transformar i l'anomenat generador de la transformació:

$$\delta F(x) = \{F(x), G\} \quad (4.1)$$

La forma més general de G és

$$G_\epsilon(t) = \sum_{k=0}^n \int d\vec{y} \epsilon^{(k)}(\vec{y}, t) G_k(\vec{y}, t) \quad (4.2)$$

on el superíndex (k) indica la derivada k-èsima respecte al temps i ϵ és una funció infinitesimal arbitrària de $(\vec{y}, t)$.

Sigui H_f l'hamiltonià que hem introduït a la secció 1.

Si N_0 és la subvarietat definida pels lligams primaris que han restant de primera classe al final del procés d'estabilització, llavors pot demostrar-se [8] que el G_k formen les cadenes

$$\begin{aligned} G_n(\gamma) &\stackrel{N_0}{=} 0 \\ G_{n-1}(\gamma) + \{G_n(\gamma), H_f\} &\stackrel{N_0}{=} 0 \\ &\vdots \\ G_0(\gamma) + \{G_1(\gamma), H_f\} &\stackrel{N_0}{=} 0 \\ \{G_0(\gamma), H_f\} &\stackrel{N_0}{=} 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

i a més han de satisfer

$$\{G_i(\gamma), \varphi_i^{(0)}(x)\} \stackrel{N_0}{=} 0 \quad (4.4)$$

Els membres drets de (4.3) s'han d'escollir de tal manera que es satisfaci (4.4). Per tant G_n ha de ser una combinació de lligams primaris de primera classe. La cadena (4.3) permet anar trobant totes les components del generador, afegint a cada pas combinacions, en general integrals, de primaris de primera classe. Pot demostrar-se que el generadors mínims es troben escollint les combinacions de primaris de primera classe de tal manera que (4.3) es talli el més aviat possible. En general hi haurà tantes transformacions de gauge independents com lligams primaris de primera classe [8].

Cal indicar que el concepte transformació de gauge que hem utilitzat és el de considerar com a tal aquella que converteix solucions de les equacions del moviment en solucions de les equacions del moviment. En general poden passar dues coses: que una solució i la seva transformada es tallin per a un cert $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, o bé que no es tallin per a cap valor de $\mathcal{L}$. La possibilitat d'efectuar transformacions del primer tipus

s'elimina fixant les funcions V_i associades als primaris de primera classe, ja que llavors la dinàmica queda fixada i a unes certes condicions inicials els hi correspon una única solució. Però fins hi tot en aquesta situació pot haver-hi solucions corresponents a diferents condicions inicials que són gauge equivalents. Aquesta arbitrarietat residual sols pot eliminar-se escollint per a $\mathcal{C}$ una entre les diferents condicions inicials equivalents, és a dir, tallant l'espai de fases amb una fulla que seleccioni.

La fixació del gauge, és a dir, l'eliminació de les transformacions de gauge, és necessària per a eliminar de la teoria els graus de llibertat no físics associats als lligams de primera classe (dos per lligam). En efecte, encara que podria pensar-se que de la simple expressió d'un lligam de primera classe ja és possible eliminar un dels graus de llibertat, això és fals ja que la igualtat obtinguda no pot ser utilitzada dins cap parèntesi. Sols els lligams de segona classe, que poden utilitzar-se dins els parèntesi de Dirac que amb ells es construeixen, permeten eliminar explícitament graus de llibertat. Aquesta observació ens indica el camí a seguir. Hom ha d'introduir lligams "a ma", diferents dels que proporciona la teoria. Aquests lligams han de ser tals que converteixin en segona classe els de la teoria. L'estabilitat dels que converteixen els primaris en segona classe determina les i elimina així el primer tipus de transformacions de gauge. Els lligams que converteixen els altres primera classe en segona classe són els que seleccionen entre les condicions inicials i eliminen el segon tipus de transformacions. El punt important és que l'estabilitat d'aquesta segona tanda de lligams ha de restar assegurada per la pròpia dinàmica, ja que no hi ha funcions arbitràries per a determinar.

Per tant fixar el gauge implica introduir tants lligams com lligams de primera classe té la teoria. Es evident que ni

poden ser més, ja que llavors estariem ja determinant subvarietats dins del mateix RPS, anant més enllà del que permet la llibertat de gauge de la teoria. Tampoc poden ser menys, ja que en aquest cas podria trobar-se alguna combinació de lligams que restés de primera classe.

No és acceptable qualsevol conjunt de lligams que vulguem introduir. En concret, ha d'acomplir-se

- 1) el conjunt de lligams posats a mà ha de ser estable (això suposa una restricció per als lligams de gauge secundaris).
- 2) els lligams introduïts han de ser assolibles a partir d'una configuració qualsevol mitjançant transformacions de gauge.
- 3) el conjunt de tots els lligams (els de la teoria i els de gauge) ha de ser de segona classe (la matriu dels seus parèntesis ha de tenir determinant no nul).

El conjunt de segona classe format pels primitius de primera classe i els nous lligams permet definir un nou parèntesi de Dirac a partir de l'àntic (si existia) seguint el procés per etapes que hem indicat a la secció 2.

Els lligams introduïts, juntament amb els àntics, permeten eliminar tots els graus de llibertat no físics que queden a la teoria, expressant-los en funció dels físics.

5. EL CAMP ELECTROMAGNÈTIC

La teoria de Maxwell del camp electromagnètic lliure pot derivar-se de la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

amb $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$. Els camps elèctric i magnètic es defineixen per

$$E^k = F^{k0}, \quad B^k = -\frac{1}{2}\epsilon^{0kij} F_{ij}$$

i llavors la lagrangiana s'escriu

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\vec{E}^2(x) - \vec{B}^2(x))$$

Com que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -F^{\alpha\beta}$$

els moments canònics són

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_\alpha(x)} = -F^{0\alpha}(x) = -\dot{A}^\alpha(x) + \partial^\alpha A^0(x)$$

i tenim per tant un lligam primari

$$\mathcal{C}_1(x) \equiv \pi^0(x) \stackrel{M_0}{=} 0$$

i l'expressió de la velocitat tridimensional en termes canònics

$$\dot{A}^i(x) = \partial^i A^0(x) - \pi^i(x) \quad (5.1)$$

L'energia lagrangiana és

$$\begin{aligned} E_L &= \int d\vec{x} (-\dot{A}^\alpha + \partial^\alpha A^0) \dot{A}_\alpha - \mathcal{L} = \\ &= \int d\vec{x} (-\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)) \end{aligned}$$

la canonització de la qual ens dona l'hamiltonià canònic

$$H_c = \int d\vec{x} \left(\frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} A_0 \right)$$

Sabem que ha de ser

$$\dot{A}^\mu(y) = FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\mu(y)} + \int d\vec{x} \mathcal{V}(x) FL^* \frac{\delta \varphi_1(x)}{\delta \pi_\mu(y)}$$

i això proporciona, a més de (1), $\mathcal{V}(x) = \dot{A}_0(x)$.

Els parèntesi de Poisson es defineixen com en el cas del camp de Proca i, en particular,

$$\{A^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

i de nou $\pi_0(x) = 0$ no es pot utilitzar dins els parèntesi.

L'hamiltonià primari és

$$H_p = H_c + \int d\vec{x} \mathcal{V}(x) \varphi_1(x)$$

i proporciona les equacions del moviment

$$\dot{A}_0(x) \stackrel{M_0}{=} \{A_0(x), H_p\} = \mathcal{V}(x)$$

$$\dot{A}_i(x) \stackrel{M_0}{=} \{A_i(x), H_p\} = -\pi_i(x) + \partial_i A_0(x)$$

$$\dot{\pi}_0(x) \stackrel{M_0}{=} \{\pi_0(x), H_p\} = \partial_i \pi^i(x)$$

$$\dot{\pi}_i(x) \stackrel{M_0}{=} \{\pi_i(x), H_p\} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}(x))_i$$

L'estabilitat del lligam primari ens produeix un lligam secundari

$$\dot{\varphi}_1(x) \stackrel{M_0}{=} \{\varphi_1(x), H_p\} = \partial_i \pi^i(x) \equiv \varphi_2(x) \stackrel{M_1}{=} 0$$

l'estabilitat del qual és

$$\dot{\varphi}_2(x) \stackrel{M_0}{=} \{\varphi_2(x), H_p\} = \partial_i (\vec{\nabla} \times \vec{B}(x))^i \equiv 0$$

i no ens apareix per tant cap nou lligam, havent-se acabat aquí l'estabilització. El resultat final és que tenim dos lligams de primera classe

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(y)\} \equiv 0$$

i que roman una velocitat canònicament indeterminada $\dot{V}(x) = \dot{A}_0(x)$. Això ens assegura que existiran transformacions de gauge.

En principi, l'espai de les fases per al camp electromagnètic té 8 graus de llibertat: $A^0, \vec{A}, \Pi^0, \vec{\Pi}$. Sabem però que un lligam de primera classe indica que dos dels graus de llibertat són innecessaris per a la teoria. El nombre de graus de llibertat físics per a la descripció canònica del camp electromagnètic lliure serà per tant $8-2 \times 2=4$.

Anem tot seguit a construir les transformacions de gauge seguint el procediment indicat a la secció 4. Com que no hi ha lligams de segona classe tenim que H_T coincideix amb H_0 . Comencem amb $G_n(x) = \Pi_0(x)$. Llavors

$$G_{n-1}(x) + \{\Pi^0(x), H_p\} = \int d\vec{y} a(x, y) \Pi_0(y)$$

és a dir

$$G_{n-1}(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(x) + \int d\vec{y} a(x, y) \Pi_0(y)$$

Agafant $a(x, y)=0$ tenim

$$\{G_{n-1}(x), H_p\} \equiv 0$$

i l'algorisme s'ha acabat : $n=1$ i el generador de les transformacions de gauge és

$$G = \int d\vec{x} \left(\dot{\epsilon}(\vec{x}, t) \Pi^0(\vec{x}, t) - \epsilon(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{x}, t) \right)$$

Observi's que la condició (4) de la secció 4 es satisfà en aquest cas trivialment.

L'actuació del generador sobre els camps ve donada per

$$\delta A^\mu(\vec{x}, t) = \{A^\mu(\vec{x}, t), G\} = \partial^\mu \epsilon(\vec{x}, t)$$

$$\delta \pi^\mu(\vec{x}, t) = \{\pi^\mu(\vec{x}, t), G\} = 0$$

La transformació de A^μ és la ja coneguda a nivell lagrangiana. El que

$$\delta \vec{\pi}(x) = \delta \vec{E}(x) = 0$$

indica que $\vec{E}$ és un observable. Pot també comprovar-se que $\delta \vec{B} = 0$. Cal observar que dues transformacions de gauge commuten ja que

$$\{G_{\epsilon_1}, G_{\epsilon_2}\} = 0$$

i llavors, utilitzant la identitat de Jacobi,

$$\{G_{\epsilon_1}, \{G_{\epsilon_2}, -\}\} = -\{-, \{G_{\epsilon_1}, G_{\epsilon_2}\}\} - \{G_{\epsilon_1}, \{-, G_{\epsilon_1}\}\} = \{G_{\epsilon_2}, \{G_{\epsilon_1}, -\}\}$$

Procedirem tot seguit a donar un exemple de fixació de gauge. En concret, tractarem l'anomenat gauge de radiació.

Tenim els lligams de primera classe.

$$\varphi_1 = \pi^0 = 0, \quad \varphi_2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0$$

Volem imposar ara sobre la teoria un nou parell de lligams de manera que en total tinguem quatre lligams de segona classe i

puguem definir un parèntesi de Dirac consistent amb tots els lligams, la manera més fàcil de convertir π_0 en lligam de segona classe és introduint

$$\varphi_3 \equiv A^0 = 0$$

Ens hem d'assegurar però de que sortint d'una configuració qualsevol és possible, mitjançant una transformació de gauge, assolir $\tilde{A}^0 = 0$. Recordem que

$$A^\mu \longrightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \epsilon$$

Prenent

$$\epsilon(\vec{x}, t) = - \int_0^t d\tau A^0(\vec{x}, \tau)$$

serà

$$\tilde{A}^0(x) = A^0(x) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau A^0(\vec{x}, \tau) = 0$$

i queda demostrat. L'estabilitat de A^0 determina canònicament $\dot{v}$:

$$v = \dot{A}^0 = 0$$

Cal ara buscar un altre lligam φ_4 l'estabilitat del qual haurà d'acomplir-se automàticament sobre la subvarietat final dels lligams, ja que no resten més funcions per a determinar canònicament. L'equació

$$\dot{A}_i = -\pi_i + \partial_i A_0$$

s'ha reduït ara a

$$\dot{\tilde{A}}_i = -\tilde{\pi}_i = -\pi_i$$

i per tant

$$\frac{d}{dt}(\partial_i \tilde{A}^i) = \partial_i \dot{\tilde{A}}^i = -\partial_i \pi^i = 0$$

de manera que si imposem

$$\mathcal{C}_4 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

haurem convertit $\mathcal{H}_2$ en segona classe i l'estabilitat de $\mathcal{H}_4$ restarà assegurada. Cal però demostrar que a partir de $\tilde{A}_i$ és possible arribar a un $\tilde{A}_i$ amb divergència nul·la. Escollim

$$\tilde{\epsilon}(\vec{x}, t) = \int d\vec{y} \frac{-1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_j \tilde{A}^j(\vec{y}, t)$$

Llavors

$$\tilde{\tilde{A}}_i(\vec{x}, t) = \tilde{A}_i(\vec{x}, t) + \partial_{xi} \int d\vec{y} \frac{-1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_j \tilde{A}^j(\vec{y}, t)$$

i es verifica efectivament

$$\begin{aligned} \partial^i \tilde{\tilde{A}}_i(\vec{x}, t) &= \partial^i \tilde{A}_i(\vec{x}, t) + \int d\vec{y} \partial_j \tilde{A}^j(\vec{y}, t) \partial^x \partial^x \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} = \\ &= \partial^i \tilde{A}_i(\vec{x}, t) - \int d\vec{y} \partial_j \tilde{A}^j(\vec{y}, t) \delta(\vec{x}-\vec{y}) = 0 \end{aligned}$$

i ahora ens mantenim sobre $A_0=0$:

$$\tilde{\tilde{A}}_0(x) = 0 + \frac{\partial}{\partial t} \int d\vec{y} \frac{-1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_j \tilde{A}^j(\vec{y}, t) = 0$$

donat que $\partial_t(\partial^i \tilde{A}_i) = 0$.

Es així possible tenir el conjunt de lligams

$$\mathcal{C}_1 = \pi_0, \quad \mathcal{C}_2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}, \quad \mathcal{C}_3 = A_0, \quad \mathcal{C}_4 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Hom pot calcular

$$\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}(x), \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(y) \} = -\nabla_x^2 \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

i llavors

$$C_{ij}(x,y) = \{ \varphi_i(x), \varphi_j(y) \} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

La inversa d'aquesta matriu és

$$C_{ij}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i ens permet definir un parèntesi de Dirac segons

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \int d\vec{x} d\vec{y} \{A, \varphi_i(x)\} C_{ij}^{-1}(x,y) \{ \varphi_j(y), B \}$$

Els parèntesis fonamentals són

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), \pi^\nu(y)\}^* &= (g^{\mu\nu} - g^{\mu 0} g^{\nu 0}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \partial_x^\nu \partial_x^\mu \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \{A^\mu(x), A^\nu(y)\}^* &= 0 \quad \{ \pi^\mu(x), \pi^\nu(y) \}^* = 0 \end{aligned}$$

que són compatibles amb els quatre lligams. L'evolució temporal es determina ara amb

$$\frac{dF}{dt} \stackrel{M_3}{=} \{F, H_c\}^*$$

a on M_g és la varietat final dels lligams (els de la teoria més els de gauge), o també amb

$$\frac{dF}{dt} \stackrel{M_g}{=} \{F, H_g\}$$

a on H_g és l'hamiltonià primari amb totes les funcions arbitràries determinades:

$$H_g = H_p(r=0) = H_c$$

Tenim així

$$\begin{aligned}\dot{A}^i &\stackrel{M_g}{=} \{A^i, H_g\} = -\pi^i \\ \dot{\pi}^i &\stackrel{M_g}{=} \{\pi^i, H_g\} = (\bar{\nabla} \times \bar{B})^i \stackrel{M_g}{=} -\nabla^2 A^i \\ \dot{\pi}^0 &\stackrel{M_g}{=} \{\pi^0, H_g\} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\pi} \stackrel{M_g}{=} 0 \\ \dot{A}^0 &\stackrel{M_g}{=} \{A^0, H_g\} = 0\end{aligned}$$

Llavors $\partial_\mu^2 A^i = -\dot{\pi}^i = \nabla^2 A^i$ d'on $\square A^i = 0$, que, juntament amb $A_0 = 0$, són les equacions per als potencials en el gauge de radiació. Com ja hem comentat, la fixació del gauge ha de permetre eliminar quatre graus de llibertat. Dos d'ells són immediats: $A_0 = \pi_0 = 0$. Les altres dues variables innecessàries es troben resolvent les equacions $\bar{\nabla} \cdot \bar{\pi} = 0$, $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$, cada una de les quals permet expressar una component vectorial en funció de les altres.

6. TEORIES NO ABELIANES I TEORIES AMB LLIGAMS DE 1^a I 2^a CLASSE

Considerarem primer una teoria de primera classe però que no té una estructura tant trivial com el camp electromagnètic lliure. Es tracta del camp de Yang-Mills $SU(2)$, descrit

per la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{i}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x)$$

a on

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g \epsilon_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

éssent ϵ_{abc} el tensor totalment antisimètric, $\epsilon_{123} = 1$.

Es verifica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} = -F_a^{\nu\mu}$$

i els moments canònics són per tant

$$\pi_a^\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu^a(x)} = -F_a^{0\mu}(x)$$

Com que els $F_a^{\mu\nu}$ són antisimètrics, tindrem 3 lligams primaris

$$\phi_a \equiv \pi_a^0 \stackrel{M_0}{=} 0 \quad a = 1, 2, 3$$

mentre que les velocitats expressables canònicament són

$$\dot{A}_i^a = -\pi_i^a + \partial_i A_0^a + g \epsilon_{abc} A_0^b A_i^c$$

L'energia lagrangiana i l'hamiltonià canònic associat són

$$E_L = \int d\vec{x} \left(-F_a^{0i}(x) \dot{A}_i^a(x) \right) - L$$

$$H_C = \int d\vec{x} \left(\frac{1}{2} \pi_i^a \pi_i^a - \pi_i^a \partial_i A_0^a - g \epsilon_{abc} \pi_i^a A_0^b A_i^c + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right)$$

La relació

$$\dot{A}_\mu^a(x) = FL^* \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\mu^a(x)} + \int d\vec{y} \, v_a(y) FL^* \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta \pi_\mu^a(x)}$$

proporciona $\dot{v}_a(x) = \dot{A}_0^a(x)$. Els parèntesis de Poisson fonamentals són

$$\{A_\alpha^a(x), \pi_\beta^b(y)\} = \delta_{ab} g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

i l'hamiltonià primari és

$$H_p = H_c + \int d\vec{y} \, v_a(y) \phi_a(y)$$

que ens produeix les equacions del moviment

$$\dot{A}_i^a \stackrel{M_0}{=} \{A_i^a, H_p\} = -\pi_i^a + \partial_i A_0^a + g \epsilon_{abc} A_0^b A_i^c$$

$$\dot{A}_0^a \stackrel{M_0}{=} \{A_0^a, H_p\} = v^a$$

$$\dot{\pi}_i^a \stackrel{M_0}{=} \{\pi_i^a, H_p\} = -g \epsilon_{abc} A_0^b \pi_i^c - g \epsilon_{abc} F_{ik}^b A_i^c - \partial_j F_a^{ji}$$

$$\dot{\pi}_0^a \stackrel{M_0}{=} \{\pi_0^a, H_p\} = \partial_i \pi_i^a - g \epsilon_{abc} A_i^b \pi_c^i$$

Imposant l'estabilitat dels lligams primaris

$$0 = \dot{\phi}_a(x) \stackrel{M_0}{=} \{\phi_a(x), H_p\} = \partial_i \pi_i^a(x) - g \epsilon_{abc} A_i^b(x) \pi_c^i(x)$$

hom obté els lligams secundaris

$$\mathcal{C}_a(x) \equiv \partial_i \pi_i^a(x) - g \epsilon_{abc} A_i^b(x) \pi_c^i(x) \stackrel{M_1}{=} 0$$

Hom pot veure que l'estabilitat d'aquests lligams no dona res de nou:

$$\dot{\mathcal{C}}_a(x) \stackrel{M_0}{=} \{\mathcal{C}_a(x), H_p\} = g \epsilon_{abc} A_0^b(x) \mathcal{C}_c(x) \stackrel{M_1}{=} 0$$

i per tant hem finalitzat l'algorisme d'estabilització. Els lligams secundaris són trivialment de primera classe respecte els primaris. De la teoria general [3] cal esperar que també ho siguin entre ells i, efectivament, així és, encara que no trivialment

$$\{\mathcal{L}_a(x), \mathcal{L}_d(y)\} = g \in_{ad} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \mathcal{L}_c(y) \stackrel{M_1}{=} 0$$

Tenim per tant 6 lligams de 1^a classe, agrupat en 3 cadenes. Anem a construir els 3 generadors de gauge associats. De nou tenim que $H_T = H_0$. Per a començar, escollim

$$G_n^a(x) = \pi_a^0(x)$$

Llavors

$$G_{n-1}^a(x) + \{\pi_a^0(x), H_c\} = \int d\vec{y} C_{ab}(x, y) \pi_b^0(y)$$

d'on

$$G_{n-1}^a(x) = -\partial_i \pi_a^i(x) + g \in_{abc} A_i^b(x) \pi_c^i(x) + \int d\vec{y} C_{ab}(x, y) \pi_b^0(y)$$

Es verifica

$$\{G_{n-1}^a(x), H_c\} \stackrel{M_0}{=} -g \in_{acb} A_0^c(x) \mathcal{L}_b(x) + \int d\vec{y} C_{ab}(x, y) \mathcal{L}_b(y)$$

Recordem que l'algorisme s'acaba quan $\{G_i, H_c\}$ dona primaris o és idènticament nul. Escollint

$$C_{ab}(x, y) = \delta(\vec{x}-\vec{y}) g \in_{acb} A_0^c(x)$$

es té $\{G_{n-1}^a, H_c\} \stackrel{N_0}{=} 0$ i llavors

$$G_1^a(x) = \pi_a^0(x)$$

$$G_0^a(x) = -\partial_i \pi_a^i(x) + g \epsilon_{abc} A_\mu^b(x) \pi_c^\mu(x)$$

de manera que el generador més general de les transformacions de gauge és

$$G = \int d^3y \left(\dot{\Lambda}_a(y) \pi_a^0(y) - \Lambda_a(y) [\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_a(y) - g \epsilon_{abc} A_\mu^b(y) \pi_c^\mu(y)] \right) = \sum_{a=1}^3 G_a$$

éssent G_a els tres generadors independents, associats cada un d'ells a una funció arbitrària $\Lambda_a(y)$. De nou la condició de consistència (4) de la secció 4 és satisfeta, encara que no trivialment ja que

$$\{G_0^a(x), \phi_b(y)\} = g \epsilon_{abc} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \phi_c(y) \stackrel{M_0}{=} 0$$

A diferència del cas abelià, aquí G té una estructura més complicada, tal com passa sempre que l'estabilitat dels secundaris no és trivial.

La transformació dels camps és

$$\delta A_a^\mu(x) = \{A_a^\mu(x), G\} = \partial^\mu \Lambda_a(x) + g \epsilon_{abc} \Lambda_b(x) A_c^\mu(x)$$

$$\delta \pi_\mu^a(x) = \{\pi_\mu^a(x), G\} = g \epsilon_{abc} \Lambda_b(x) \pi_\mu^c(x)$$

Hom pot veure que el commutador de dos generadors és

$$\{G_a, G_d\} = g \epsilon_{adc} G_c$$

a on $\Lambda_c = \Lambda_a \dot{\Lambda}_d$. Per tant el caràcter no abelià de $SU(2)$ fa que en general no commutin dues transformacions de gauge.

La fixació del gauge implica la introducció de 6 lligams, de manera que en total hi hagi 12 lligams de segona classe. No ho farem però aquí donat que no aporta conceptes nous respecte al camp electromagnètic i en canvi sí que hi ha dificultats tècniques lligades al caràcter no abelià [1], [3b].

Per a finalitzar, exhibirem una teoria que presenta alhora lligams de primera i segona classe. Es tracta del camp electromagnètic lliure en formalisme del primer ordre.

La densitat lagrangiana és

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

a on ara A_μ , $F^{\mu\nu}$ són 20 camps independents. Els moments canònics conjugats són

$$\pi^\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu(x)} = \frac{1}{2} (F^{\mu 0}(x) - F^{0\mu}(x))$$

$$\pi^{\mu\nu}(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{F}_{\mu\nu}(x)} = 0$$

Tenim així els 20 lligams primaris

$$\begin{aligned} \pi^0 &\stackrel{M_0}{=} 0 \\ \phi^i &\equiv \pi^i - \frac{1}{2} (F^{i0} - F^{0i}) \stackrel{M_0}{=} 0 \\ \pi^{\mu\nu} &\stackrel{M_0}{=} 0 \end{aligned}$$

i cap velocitat és expressable canònicament.

Amb parèntesis de Poisson canònics definits de la manera usual, hom obté

$$\{\phi^i(x), \pi^{\mu\nu}(y)\} = \frac{1}{2}(g^{0\mu}g^{i\nu} - g^{0\nu}g^{i\mu}) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Es pot veure llavors que hi ha 6 lligams de segona classe

$$\phi^i(x), \pi^{i0}(x)$$

i 14 lligams de primera classe

$$\pi^{ij}(x), \pi^{00}(x), \psi^i(x) \equiv \pi^{i0}(x) + \pi^{0i}(x), \pi^{0i}(x)$$

L'hamiltonià canònic és

$$H_c = \int d\vec{y} \left(\frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) F^{ij} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_i A_0 (F^{0i} - F^{i0}) \right) \quad (6.1)$$

i el primari ve donat per

$$H_p = H_c + \int d\vec{y} (\nu_0 \pi^0 + \nu_i \phi^i + \nu_{ij} \pi^{ij} + \nu_{00} \pi^{00} + \nu_{i0} \pi^{i0} + \tilde{\nu}_i \psi^i)$$

Les relacions $\dot{q}^A \neq \frac{\delta H_p}{\delta \pi^A}$ proporcionen

$$\dot{\nu}^\mu = \dot{A}^\mu, \dot{\nu}^{00} = \dot{F}^{00}, \dot{\nu}^{ij} = \dot{F}^{ij}, \dot{F}^{i0} = \nu^{i0} + \tilde{\nu}^i, \dot{F}^{0i} = \tilde{\nu}_i$$

Les equacions primàries del moviment per als moments són

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0 &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^0, H_p\} = -\frac{1}{2} \partial_i (F^{0i} - F^{i0}) \\ \dot{\pi}^i &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^i, H_p\} = \frac{1}{2} \partial_i (F^{2i} - F^{i2}) \\ \dot{\pi}^{00} &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^{00}, H_p\} = \frac{1}{2} F^{00} \\ \dot{\pi}^{ij} &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^{ij}, H_p\} = -\frac{1}{2} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) + \frac{1}{2} F^{ij} \\ \dot{\pi}^{0i} &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^{0i}, H_p\} = \frac{1}{2} F^{0i} + \frac{1}{2} \partial^i A^0 - \frac{1}{2} \nu^i \\ \dot{\pi}^{i0} &\stackrel{M_0}{=} \{\pi^{i0}, H_p\} = \frac{1}{2} F^{i0} - \frac{1}{2} \partial^i A^0 + \frac{1}{2} \nu_i \end{aligned}$$

L'estabilitat dels lligams de segona classe proporciona

$$\dot{\phi}^i \stackrel{M_0}{=} \{\phi^i, H_p\} = \frac{1}{2} \partial_i (F^{Li} - F^{iL}) - \frac{1}{2} (\sigma^{i0} + \tilde{\sigma}^i - \tilde{\sigma}^i)$$

d'on

$$\sigma^{i0} \stackrel{M_0}{=} \partial_i (F^{Li} - F^{iL})$$

i també

$$\dot{\pi}^{i0} \stackrel{M_0}{=} \{\pi^{i0}, H_p\} = \frac{1}{2} F^{i0} - \frac{1}{2} \partial^i A^0 + \frac{1}{2} \sigma^i$$

d'on

$$\sigma^i \stackrel{M_0}{=} \partial^i A^0 - F^{i0}$$

Això ens permet definir [3]

$$H_1 = H_c + \int d\vec{y} \left(\partial_i (F^{Li} - F^{iL}) \pi_{i0} + (\partial^i A^0 - F^{i0}) \phi_i \right)$$

L'estabilitat dels lligams de primera classe és llavors

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^i \stackrel{M_0}{=} \{\pi^i, H_1\} &= -\frac{1}{2} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) + \frac{1}{2} F^{ij} + \partial^i \pi^{j0} - \partial^j \pi^{i0} = \\ &\stackrel{M_0}{=} -\frac{1}{2} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) + \frac{1}{2} F^{ij} \end{aligned}$$

$$\dot{\pi}^{00} \stackrel{M_0}{=} \{\pi^{00}, H_1\} = \frac{1}{2} F^{00}$$

$$\dot{\psi}^i \stackrel{M_0}{=} \{\psi^i, H_1\} = \frac{1}{2} (F^{i0} + F^{0i}) + \phi^i \stackrel{M_0}{=} \frac{1}{2} (F^{i0} + F^{0i})$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0 \stackrel{M_0}{=} \{\pi^0, H_1\} &= -\frac{1}{2} \partial_i (F^{0i} - F^{i0}) + \partial^i \phi_i = \\ &\stackrel{M_0}{=} -\frac{1}{2} \partial_i (F^{0i} - F^{i0}) \end{aligned}$$

Apareixen així els lligams secundaris

$$\varphi^{ij} \equiv -\frac{1}{2} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) + \frac{1}{2} F^{ij} \stackrel{M_1}{=} 0$$

$$F^{00} \stackrel{M_1}{=} 0$$

$$\chi^i \equiv \frac{1}{2} (F^{i0} + F^{0i}) \stackrel{M_1}{=} 0$$

$$\varphi \equiv -\frac{1}{2} \partial_i (F^{0i} - F^{i0}) \stackrel{M_1}{=} 0$$

Resulta que φ^{ij} converteix π^{ij} en segona classe, F^{00} ho fa amb π^{00} i finalment χ^i s'encarrega de ψ^i . Entre els primaris, sols π_0 resta de 1^a classe. El seu hereu, φ , la llei de Gauss, és també de 1^a classe.

L'evolució temporal sobre M_1 ve determinada per

$$H_1 + \int d\vec{y} (\sigma_0 \pi^0 + \sigma_{ij} \pi^{ij} + \sigma_{00} \pi^{00} + \tilde{\sigma}_i \psi^i)$$

i llavors

$$\varphi^{ij} \stackrel{M_1}{=} \varphi^{ij},_{||}$$

$$\text{d'on } \sigma_{ij} \stackrel{M_1}{=} \partial^j F^{i0} - \partial^i F^{j0},$$

$$F^{00} \stackrel{M_1}{=} \sigma^{00}$$

$$\text{d'on } \sigma^{00} \stackrel{M_0}{=} 0, \text{ i finalment}$$

$$\chi^i \stackrel{M_1}{=} \frac{1}{2} \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) + \tilde{\sigma}_i$$

$$\text{d'on } \tilde{\sigma}_i \stackrel{M_1}{=} \frac{1}{2} \partial^j (F_{ij} - F_{ji})$$

.Això permet definir

$$H_f = H_1 + \int d\vec{y} \left((\partial^j F^{i0} - \partial^i F^{j0}) \pi_{ij} + \frac{1}{2} \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) \psi_i \right)$$

L'estabilitat de $\mathcal{V}$ és

$$\dot{\mathcal{C}} \stackrel{M_i}{=} \{ \mathcal{C}, H_f \} \stackrel{M_i}{=} -\frac{i}{2} \partial_i (\partial_i F^{1i} - \partial_i F^{i1}) \equiv 0$$

No apareixen per tant nous lligams i l'estabilització s'acaba aquí ($M_f = M_f$). Sobre la varietat final dels lligams l'evolució ve donada per

$$H_f + \int d\vec{y} \mathcal{V}_0(\vec{y}) \pi^0(\vec{y})$$

Tenim 32 lligams de segona classe

$$\phi^i, \pi^{i0}, \pi^{ij}, \pi^{00}, \psi^i, \psi^{ij}, F^{00}, \chi^i$$

i 2 lligams de 1 classe

$$\pi_0, \mathcal{C}$$

Sols una velocitat, $\dot{A}_0$, ha quedat canònicament indeterminada. L'espai de fases original té $20 \times 2 = 40$ graus de llibertat. D'ells sols

$$40 - 32 \times 1 - 2 \times 2 = 4$$

corresponen a graus de llibertat físics, tal com ha de ser per al camp electromagnètic lliure. Els 32 graus de llibertat immediatament eliminables són, recollint la informació de tots els 2^a classe,

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &= 0 \\ F^{i0} &= -F^{0i} = \pi^i \\ F^{00} &= 0 \\ F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i \end{aligned}$$

Si hom construeix el parèntesi de Dirac associat a aquests 2^a classe, es pot veure que

$$\{A^\mu(x), \pi^\nu(y)\}^* = g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

és a dir, per a les variables usual del camp electromagnètic el parèntesi de Dirac que procedeix de l'eliminació de les 32 variables suplementàries coincideix amb el de Poisson. En aquest punt hom pot connectar amb l'anàlisi de la secció 5 utilitzant l'hamiltonià que s'obté de (6.1) eliminant els 2^a classe

$$\int d\vec{y} \left(-\frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 - \frac{1}{2} \pi_i^2 - \pi_i \nabla_i A^0 \right)$$

és a dir, l'hamiltonià usual del camp electromagnètic.

El meu agraïment al Dr. J. Gomis, qui em va introduir en l'estudi dels sistemes amb lligams. A ell i als Drs. J. Pons i N. Román els dec moltes i útils discussions sobre el tema.

APÈNDIX: DERIVADES FUNCIONALS I FUNCIONALS ELEMENTALS

Com és ben sabut, s'anomena funcional a una aplicació

$$F: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}$$

on $\mathcal{F}$ és un cert espai de funcions, l'estructura del qual no és relevant, i $\mathbb{C}$ és un cos que per a les nostres aplicacions serà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $\phi \in \mathcal{F}$, la derivada funcional de F es pot introduir implícitament mitjançant

$$\delta F[\phi] \equiv F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] \equiv \int dx \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) + O^2(\delta\phi)$$

on la integració està estesa a tot el domini de ϕ , i $\delta\phi$ és una variació funcional infinitesimal de ϕ (que no implica variació dels arguments). La derivada funcional té les propietats usuals de la derivada. Tan sols senyalarem que la regla de la cadena és com segueix: si $H[\phi] = F[G[\phi]]$ llavors

$$\frac{\delta H}{\delta \phi(x)} = \int dy \frac{\delta F}{\delta G(y)} \frac{\delta G(y)}{\delta \phi(x)}$$

Ens ocuparem ara d'un cert tipus de funcionals, que anomenarem elementals. Aquests estan definits a cada punt i consisteixen en calcular combinacions (en qualsevol sentit) dels valors de la funció i les seves derivades en el punt donat:

$$F_x[\phi] = f(\phi(x), \phi^{(1)}(x), \dots, \phi^{(n)}(x))$$

Per exemple

$$F_x[\phi] = \phi(x) - \sin(\phi''(x)) + 7\phi^{(6)}(x)$$

és un funcional elemental. Anem a calcular la derivada funcional d'un funcional elemental. Començarem escrivint

$$F_x[\phi] = \int dy \delta(x-y) f(\phi(y), \phi''(y), \dots, \phi^{(n)}(y))$$

Llavors

$$\begin{aligned} F_x[\phi + \delta\phi] - F_x[\phi] &= \\ &= \int dy \left\{ f(\phi(y) + \delta\phi(y), \phi''(y) + \delta\phi''(y), \dots, \phi^{(n)}(y) + \delta\phi^{(n)}(y)) + \right. \\ &\quad \left. - f(\phi(y), \phi''(y), \dots, \phi^{(n)}(y)) \right\} \delta(x-y) = \\ &= \int dy \delta(x-y) \sum_{k=0}^n \frac{\partial f}{\partial \phi^{(k)}}(y) \delta\phi^{(k)}(y) = \int dy \delta(x-y) \sum_{k=0}^n \frac{\partial f}{\partial \phi^{(k)}}(y) \frac{d^k}{dy^k} \delta\phi(y) = \\ &= \int dy \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dy^k} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi^{(k)}}(y) \delta(x-y) \right) \right] \delta\phi(y) \end{aligned}$$

i per tant

$$\frac{\delta F_x}{\delta \phi(y)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dy^k} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi^{(k)}}(y) \delta(x-y) \right)$$

Un cas particular, quan $F_x[\phi] = \phi(x)$, és

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x-y)$$

Els funcionals elementals són importants en una teoria clàssica de camps ja que quasi totes les expressions que hi apareixen ho són: camps, moments, densitat lagrangiana i hamiltoniana, lligams... Es tracta de fet de funcionals elementals amb el temps congelat. Això fa que les velocitats no siguin funcionals dels camps. Per exemple, la densitat lagrangiana és un funcional elemental amb el temps congelat dels camps i les velocitats:

$$\mathcal{L}_t(\vec{x}) = \mathcal{L}_t^{\vec{x}}[\phi, \dot{\phi}]$$

Normalment no exhibirem explícitament la congelació del temps. Cal observar que si

$$L[\phi] = \int dx \mathcal{L}_x[\phi]$$

llavors la derivació funcional pot entrar dins el signe integral:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(y)} = \int dx \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \phi(y)}$$

NOTES I REFERÈNCIES

- [1] HANSON, A.J., REGGE, T. AND TEITELBOIM, C.; Constrained Hamiltonian Systems, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1974.
- [2] LLOSA, J. (editor), Relativistic Action at a Distance, Lecture Notes in Physics 162, Springer-Verlag, 1982.
DOMINICI, D., GOMIS, J. AND LONGHI, G.; Nuovo Cimento 48A, 257 and 48B, 152, 1978.
- [3] BATLLE, C., GOMIS, J., PONS, J. AND ROMAN, N; CCNY-HEP-11, New York, preprint 1985.
BATLLE, C., Tesina de Licenciatura, Universitat de Barcelona, 1985.
- [4] SUNDERMEYER, K. Constrained Dynamics, Lecture Notes in Physics 169, Springer-Verlag, Berlin 1982.
HENNEAUX, M. Physics Reports 126, 1985.
- [5] DIRAC, P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University, New York 1964.
SUDARSHAN, E.C.G. and MUKUNDA, N.; Classical Dynamics: a Modern Perspective, Wiley, New York 1974.
- [6] CASALBUONI, R.; Nuovo Cimento 33A, 115 1976.
- [7] Hom pot treballar amb variables bosòniques i obtenir una teoria semblant a la que aquí exposem (de fet, la mateixa llevat de signes). Pot demostrar-se, però, que la quantització de sistemes de spin semienter requereix la substitució dels parèntesis clàssics per anticommutadors, i això sols és consistent si clàssicament es treballa amb variables de Grassmann amb la paritat convenient [6].
- [8] CASTELLANI, L. Annals of Physics 143, 357 1982, .
PONS, J. no publicat.