

ÀLGEBRES DE CLIFFORD I TRANSFORMACIONS DE LORENTZ. UNA INTRODUCCIÓ

Josep Manel Parra
Departament de Física Fonamental
Universitat de Barcelona
Diagonal 647 , 08028-Barcelona

RESUM

Presentem aquí una introducció a l'ús de les àlgebres de Clifford corresponents a l'espai ordinari i a l'espai de Minkowski, fortament recolzada en la utilització del càlcul vectorial ordinari. L'àlgebra de Clifford resulta així una generalització, alhora familiar i convenient, del càlcul vectorial, i també una eficient especialització del càlcul tensorial. En aquest context eminentment pràctic són introduïdes les importants nocions d'involució, antiinvolució, dualitat, norma spinorial ... destinades a motivar i facilitar un estudi més aprofundit. Finalment exposem la teoria de les transformacions ortogonals amb especial èmfasi en el grup de Lorentz i en les implicacions que es deriven d'un tal tractament geomètric, en oposició al matricial ordinari.

ABSTRACT

In this article we present a physicist's introduction to those Clifford Algebras which correspond to the ordinary space and to Minkowski's space-time. So we rely heavily on the use of ordinary vector calculus, and try to show that Clifford Algebras are a straightforward and convenient generalization of it. It is also an efficient specialization of tensor calculus over a metric space when restricted to forms - antisymmetric tensors of any degree. In an essentially practical way the key notions of involution, antiinvolution, duality and spinor norm are introduced with the aim to motivate and to lessen a more profound study. Finally we give an account of the orthogonal transformations, specially for the Lorentz Group, emphasizing those aspects which make the Clifford geometric treatment so different from the usual matrix one.

INTRODUCCIÓ

L'objectiu d'aquest article és de servir d'introducció al coneixement i a l'ús de les àlgebres de Clifford, dites així en honor de llur descobridor W.K. Clifford que, per la seva banda, l'anomenà àlgebra geomètrica [Clifford, 1878]. Un cop aclarit que àlgebra geomètrica i àlgebra de Clifford són sinònims amb plena justificació històrica cal precisar que no tractarem en absolut de la formulació matricial de l'equació de Dirac, únic context en què habitualment un estudiant de física ensopega amb l'àlgebra de Clifford. De fet creiem convenient que el lector pensi en les àlgebres de Clifford com una extensió, vàlida per a tot espai vectorial mètric, de l'àlgebra vectorial que, introduïda per Heaviside [1893] i Gibbs [1906], forma part inseparable de la formulació de les més diverses teories físiques.

I la finalitat última, que confessem de bon principi, és convèncer el lector - professor, investigador, o tot just estudiant dels primers anys de llicenciatura- que l'àlgebra de Clifford forma part del llenguatge amb què la natura s'expressa o, si menys no, amb què podem expressar el seu comportament. Un llenguatge que, com pretenem mostrar tot seguit, té una estructura força simple, és de fàcil ús i mereix per dret propi ocupar el seu lloc en la formulació i l'ensenyament de la Física.

Aquesta introducció elemental a les àlgebres de Clifford ha estat dividida en dues parts. A la primera, dedicada a definicions i fórmules bàsiques, en quedaran clars els lligams i les diferències amb el càlcul vectorial conegut de tots. A la segona part considerarem els grups ortogonals de transformacions i, molt en especial, el de Lorentz. Finalitzem la segona part amb una sèrie de consideracions que, tot i poder ésser objecte de discussió, creiem plenament justificades pel conjunt de la nostra exposició.

Obres de referència obligada en un tractament geomètric (no matricial) de les àlgebres de Clifford i de llurs aplicacions físiques són [Hestenes 1966,1986],[Hestenes & Sobczyk, 1984] i [Casanova,1976].

1. PRODUCTE GEOMÈTRIC I ÀLGEBRA DE CLIFFORD

1. 1. Els generadors de l'àlgebra i el seu producte geomètric

Hom diu que l'espai vectorial real de n dimensions té signatura $(p, q=n-p)$ si existeix una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que el quadrat de la norma d'un vector genèric $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ sigui donat per l'expressió

$$|a|^2 = a_1^2 + \dots + a_p^2 - a_{p+1}^2 - \dots - a_n^2$$

Doncs bé, per a un tal espai vectorial $R_{p,q}$ la seva àlgebra de Clifford $C_{p,q}$ és l'àlgebra associativa generada pels elements $\{1, e_1, \dots, e_n\}$ on 1 designa la unitat escalar i els elements de la base ortonormal $e_1 \dots e_n$ són unitats de quadrat ± 1 , que anticommenen entre si. Es a dir

$$1 e_i = e_i 1 = e_i$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad i \neq j$$

$$e_i^2 = +1 \quad i=1, \dots, p \quad e_i^2 = -1 \quad i=p+1, \dots, n$$

$$(e_i e_j) e_k = (e_i e_j) e_k = e_i e_j e_k \equiv e_{ijk} \quad (1.1)$$

Es immediat constatar que el nombre d'elements base linealment independents $e_{i_1 \dots i_r} \equiv e_I$, amb I multiíndex ordenat, coincideix amb el nombre de parts del conjunt $\{1, \dots, n\}$, corresponent la part buida a la unitat escalar 1 i el conjunt complet a la unitat de volum $\epsilon \equiv e_1 \dots e_n$. L'àlgebra de Clifford té, per tant, dimensió 2^n i, com a espai vectorial, ja que no com a àlgebra, és isomorfa a l'àlgebra exterior mitjançant la identificació $e_{i_1 \dots i_r} \equiv e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}$. Per als casos que tenen més interès, l'espai euclidià 3-dimensional i l'espai de Minkowski, establim ja des d'ara la següent notació dels seus elements genèrics:

$$\begin{aligned} x^I e_I &= \alpha 1 + (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + (A_1 e_{23} + A_2 e_{31} + \\ &\quad + A_3 e_{12}) + \pi e_{123} = (\alpha; a; A; \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^I e_I &= \alpha 1 + (v_0 e_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) + (A_1 e_{01} + \\
&\quad + A_2 e_{02} + A_3 e_{03} + C_1 e_{23} + C_2 e_{31} + C_3 e_{12}) + (S_0 e_{123} \\
&\quad + S_1 e_{023} + S_2 e_{031} + S_3 e_{012}) + \pi e_{0123} = \\
&= (\alpha; v_0, v; A, C; S_0, S; \pi)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

En introduir aquestes notacions hem descompost l'element genèric de l'àlgebra en dos escalars i dos vectors pel cas 3-dimensional i en 4 escalars $\{\alpha, v_0, S_0, \pi\}$ i 4 vectors $\{v, A, C, S\}$ en el cas 4-dimensional. Aquestes descomposicions resulten molt convenientes ja que, d'entrada, permeten d'expressar el producte de dos elements genèrics mitjançant els productes escalar i vectorial ordinaris i per tant, com aquests, resulten independents de la base ortonormal escollida.

$$\text{Així obtenim amb } g = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 \quad \text{i} \quad g_0 = e_0^2 = -g$$

(espai de Minkowski de signatura a elegir) les lleis de producte per a l'espai euclidià 3-dimensional:

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ A \\ \pi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \\ b \\ B \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \beta + g a \cdot b - A \cdot B - g \pi \mu \\ a \beta + \alpha b - g A \times b - g a \times B - \pi B - A \mu \\ A \beta + a \times b + g \pi b + \alpha B - g A \times B + g a \mu \\ \pi \beta + A \cdot b + a \cdot B + \alpha \mu \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

per a l'espai de Minkowski:

α	β	$\alpha \beta + g_0 v_0 w_0 + g v \cdot w + A \cdot B - C \cdot D - g S_0 T_0 - g_0 S \cdot T - \pi \mu$
v_0	w_0	$v_0 \beta + \alpha w_0 + g A \cdot w - g v \cdot B - S \cdot D - g \pi T_0 - C \cdot T + g S_0 \mu$
v	w	$v \beta - g_0 A w_0 + \alpha w + g_0 v_0 B - S_0 D - C T_0 + g_0 \pi T - g_0 S \mu -$ $- g C \times w + S \times B - g v \times D - A \times T$
A	B	$A \beta - v w_0 + v_0 w + \alpha B - \pi D - S T_0 + S_0 T - C \mu -$ $- g S \times w - g C \times B - g A \times D + g v \times T$
C	D	$C \beta + g_0 S w_0 + g S_0 w + \pi B + \alpha D + g v T_0 + g_0 v_0 T + A \mu +$ $+ v \times w - g_0 A \times B - g C \times D + S \times T$
S_0	T_0	$S_0 \beta - g_0 \pi w_0 + C \cdot w + g_0 S \cdot B + v \cdot D + \alpha T_0 - g_0 A \cdot T + g_0 v_0 \mu$
S	T	$S \beta + C w_0 + g \pi w - g S_0 B + v_0 D + g A T_0 + \alpha T - g v \mu +$ $+ A \times w - v \times B - g S \times D - g C \times T$
π	μ	$\pi \beta - S_0 w_0 + S \cdot w + C \cdot B + A \cdot D + v_0 T_0 - v \cdot T + \alpha \mu$

(1.4)

1.2. Involucions, inversió, dualitat

Nocions algebraïques especialment útils són les d'involució i anti-involució, transformacions lineals de quadrat identitat i que mantenen o permuten l'ordre dels factors:

$$\text{involució : } \underline{X} \quad \underline{\underline{X}} = X \quad \underline{X} \underline{Y} = \underline{X} \underline{Y}$$

$$\text{antiinvolució : } \bar{X} \quad \bar{\bar{X}} = X \quad \bar{X} \bar{Y} = \bar{Y} \bar{X} \quad (1.5)$$

No existeix en la literatura uniformitat de criteri ni de notacions respecte de les involucions i antiinvolucions. La nostra proposta és

a) Subindicar les involucions i supraindicar les antiinvolucions, com hem fet a (1.3) i és pràctica habitual per a functors covariants i contravariants.

b) Bo i donant per establert que involucions i antiinvolucions deixen invariant la unitat escalar, n'hi ha prou per a caracteritzar-les amb donar la transformació dels vectors base de l'espai ortogonal $e_1 \dots e_n$.

c) La identitat i la reversió X i $\tilde{X}$ són la involució i la antiinvolució associades a $\underline{e}_i = e_i$ $\bar{e}_i = \tilde{e}_i = e_i$ mentre l'automorfisme i l'antiautomorfisme principals X_* i X^* els definim com associats al canvi de signe global $\underline{e}_i = e_{i*} = -e_i$ $\bar{e}_i = e_i^* = -e_i$.

Aquestes són les involucions i antiinvolucions que tenen un paper important en la teoria general, en no singularitzar cap direcció a l'espai $R_{p,q}$. En el cas dels espais de Minkowski resulten de cert interès, vinculades a un observador d'inèrcia concret, la involució i la antiinvolució

$$\begin{array}{lll} \text{espacials} & e_i = -e_i = e_i & e_0 = e_0 = e_0 \\ \text{i temporals} & \underline{e}_i = \underline{e}_i = e_i & \underline{e}_0 = -\underline{e}_0 = e_0 \end{array} \quad (1.6)$$

El conjunt d'involucions-antiinvolucions exposat forma un grup sota la composició, i les involucions en són un subgrup. Una de les aplicacions immediates de les definicions anteriors consisteix a associar a cada parell (involució $\underline{\quad}$, antiinvolució $\bar{\quad}$) una llei de transformació 'adjunta' definida per l'expressió $\underline{Ad}_X(Y) = \underline{X} Y \bar{X}$. En concret notem, sense entrar en detalls, que figuren en [Parra, 1984], que la consideració de diferents involucions-antiinvolucions permet d'establir les lleis de transformació de Lorentz i de dualitat electromagnètica per a potencials, corrents i camps, utilitzant tan sols l'àlgebra de Clifford associada a l'espai euclidià 3-dimensional. Així mateix [Parra, 1985] permeten, ja sobre l'espai de Minkowski, de reproduir per al grup de Lorentz complet, amb inclusió de les isometries discretes, les diferents lleis de transformació associades als diferents tipus tensorials [Watanabe, 1955].

La dita norma spinorial, que seria inútil pretendre aquí relacionar-la amb la teoria dels spinors, es defineix mitjançant l'expressió $N(X) = X X^*$. La consideració d'aquesta quantitat és particularment útil pel que fa al càlcul de l'element invers en les àlgebres que ens ocupen. Així per a

$C_{3,0}$ i $C_{0,3}$ tenim

$$N(X) = (\alpha^2 + A \cdot A) - g(\pi^2 + a \cdot a) + 2(\alpha\pi - a \cdot A) e_{123} \equiv k_1 + k_2 \epsilon \quad (1.7 a)$$

i, com que $(k_1 + k_2 \epsilon)(k_1 + k_2 \epsilon) = k_1 + g k_2^2 \equiv \delta_X^2$

l'element invers és

$$X^{-1} = -\frac{1}{\delta_X} (k_1 - k_2 \epsilon) X^* = -\frac{1}{\delta_X} X^* (k_1 - k_2 \epsilon) \quad (1.7 b)$$

Per a $C_{1,3}$ i $C_{3,1}$ les expressions resulten força més complicades, i s'arriba als resultats [Parra, 1985]

$$N(X) = \mu + (y_0 + z_0) e_{123} + (y + z)_i e_{0jk} + (\sigma + \tau) e_{0123}$$

$$N(X^*) = \mu + (y_0 - z_0) e_{123} + (y - z)_i e_{0jk} + (\sigma - \tau) e_{0123}$$

$$X^{-1} = -\frac{1}{\delta_X} (2\mu X^* - X^* X X^*) \quad \text{amb}$$

$$\mu = (\alpha^2 + C \cdot C) - g(v_0^2 + S \cdot S) - g(S_0^2 + v \cdot v) - (\pi^2 + A \cdot A)$$

$$y_0 = 2(\alpha S_0 - v \cdot C) \quad z_0 = 2g_0(v_0 \pi - A \cdot S)$$

$$y = 2(\alpha S - v_0 C + v \times A) \quad z = 2g(S_0 A - \pi v + S \times C)$$

$$\sigma = 2(\alpha \pi - A \cdot C) \quad \tau = 2(v_0 S_0 - v \cdot S)$$

$$\delta_X = \mu^2 + g(y_0^2 + z_0^2) + g_0(y \cdot y + z \cdot z) + (\sigma^2 + \tau^2) \quad (1.8)$$

La magnitud escalar δ_X permet de caracteritzar en ambdós casos el conjunt d'elements no singulars (invertibles) de l'àlgebra com aquells que estan fora de la quàrtica de R^8 o de R^{16} d'equació $\delta_X = 0$. El grup format per tots els elements invertibles de $C_{p,q}$ el designarem, com és habitual, per $C_{p,q}^*$ i, actuant sobre la pròpia àlgebra de Clifford mitjançant la conjugació

$$Y' = X Y X^{-1} \quad Y, Y' \in C_{p,q} \quad X \in C_{p,q}^* \quad (1.9)$$

defineix una llei de transformació sobre $C_{p,q}$ que serà l'objecte principal d'estudi del següent apartat.

Finalment resulta interessant la dita transformació de dualitat, consistent en el producte per l'element de volum o unitat pseudo-escalar $\epsilon = e_1 \dots e_n$. Notem que en el cas 3-dimensional no ens cal distingir si el producte es realitza per l'esquerra o per la dreta

$$\epsilon X = X \epsilon = (-g\pi; -A; g a; \alpha) \quad (1.10)$$

mentre que a l'espai de Minkowski ϵ commuta amb els elements parells, anticommuta amb els senars i en resulten les expressions:

$$\begin{aligned} \epsilon X &= (-\pi; -g S_0, g_0 S; -C, A; -g_0 v_0, g v; \alpha) \\ X \epsilon &= (-\pi; g S_0, -g_0 S; -C, A; g_0 v_0, -g v; \alpha) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Aquesta transformació de dualitat és, llevat d'un signe, que depèn del grau de l'element, equivalent a l'estrella * de Hodge.

QUADRE D'INVOLUCIONS, ANTIINVOLUCIONS I DUALITATS

X	X_*	X_0	X	$\tilde{X}$	X^*	X^0	X	$X \epsilon$	ϵX
α	α	α	α	α	α	α	α	$-\pi$	$-\pi$
v_0	$-v_0$	$-v_0$	v_0	v_0	$-v_0$	$-v_0$	v_0	$g S_0$	$-g S_0$
v	$-v$	v	$-v$	v	$-v$	v	$-v$	$g S$	$-g S$
A	A	$-A$	$-A$	$-A$	$-A$	A	A	$-C$	$-C$
C	C	C	C	$-C$	$-C$	$-C$	$-C$	A	A
S_0	$-S_0$	S_0	$-S_0$	$-S_0$	S_0	$-S_0$	S_0	$-g v_0$	$g v_0$
S	$-S$	$-S$	S	$-S$	S	S	$-S$	$-g v$	$g v$
π	π	$-\pi$	$-\pi$	π	π	$-\pi$	$-\pi$	α	α

2. GRUPS DE TRANSFORMACIONS ORTOGONALS

2.1. Teoria general

Notem, en primer lloc, que per a un parell d'índexs i, j diferents hom obté:

$$\begin{aligned} \text{cas a)} \quad e_i^2 &= e_j^2 & e_{ij}^2 &= -e_i^2 e_j^2 = -1 \\ \exp\left(\frac{\theta}{2} e_{ij}\right) &= \cos \frac{\theta}{2} \, 1 + \sin \frac{\theta}{2} \, e_{ij} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{cas b)} \quad e_i^2 &= -e_j^2 & e_{ij}^2 &= -e_i^2 e_j^2 = +1 \\ \exp\left(\frac{\sigma}{2} e_{ij}\right) &= \cosh \frac{\sigma}{2} \, 1 + \sinh \frac{\sigma}{2} \, e_{ij} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si tenim també en compte les relacions de commutació-anticommutació

$$e_{ij} e_k = e_k e_{ij} \quad \text{si } k \neq i, j$$

$$e_{ij} e_i = -e_i e_{ij} \quad e_{ij} e_j = -e_j e_{ij}$$

resulta immediat de veure que l'aplicació de la fórmula de transformació

(1.9) amb $X = \exp\left(\frac{\theta}{2} e_{ij}\right)$ a un vector dona

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b'_k e_k &= \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + (\cos \theta + \sin \theta e_{ij}) (b_i e_i + b_j e_j) \\ &= \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e_{ij}) (b_i e_i + b_j e_j) = \\ &= \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + (\cos \theta b_i + (e_j^2) \sin \theta b_j) e_i + (\cos \theta b_j - (e_i^2) \sin \theta b_i) e_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

és a dir, una rotació dels vectors del pla euclidià i, j d'angle θ , bo i deixant invariants tots els components del complement ortogonal de l'esmentat pla.

En canvi, l'aplicació de (1.9) amb

$$X = \exp \left(\frac{\sigma}{2} e_{ij} \right) \text{ amb } e_i^2 = -e_j^2 \quad \text{dóna}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b'_k e_k &= \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + \left(\cosh^2 \frac{\sigma}{2} + \sinh^2 \frac{\sigma}{2} + 2 \cosh \frac{\sigma}{2} \sinh \frac{\sigma}{2} e_{ij} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (b_i e_i + b_j e_j) = \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + (\cosh \sigma + \sinh \sigma e_{ij}) (b_i e_i + b_j e_j) = \\ &= \sum_{r \neq i, j} (b_r e_r) + (\cosh \sigma b_i + e_j^2 \sinh \sigma b_j) e_i + (\cosh \sigma b_j - e_i^2 \sinh \sigma b_i) e_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

que correspon a una rotació hiperbòlica o "boost" de celeritat σ (velocitat $v = \frac{\tanh \sigma}{c}$) en el pla hiperbòlic e_{ij} , que deixa invariants tots els components ortogonals a aquest pla.

Es evident que els $\binom{n}{2}$ parells diferents e_{ij} que es poden formar generen transformacions del grup ortogonal $SO(p, q)$ independents. Però aquest és precisament el nombre de paràmetres independents del grup ortogonal ($= n^2 - \binom{n}{2} = n$ d'acord amb les consideracions matricials habituals). El conjunt dels $\binom{n}{2}$ elements e_{ij} genera, per tant, tota la component connexa amb la identitat del grup $SO(p, q)$. Un element genèric d'aquesta i la transformació a ell associada s'escriuran de la forma

$$\begin{aligned} X &= \exp \left(\sum_{(ij)} \frac{\alpha_{ij}}{2} e_{ij} \right) \\ \sum_k b'_k e_k &= \exp \left(\sum_{(ij)} \frac{\alpha_{ij}}{2} e_{ij} \right) \left(\sum_r b_r e_r \right) \exp \left(\sum_{(mn)} - \frac{\alpha_{mn}}{2} e_{mn} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Els valors reals $\frac{\alpha_{ij}}{2}$, que poden representar tant la meitat de l'angle de rotació com la meitat de la celeritat en el cas dels "boosts", són els paràmetres normals de la transformació representada per l'element X .

Per a elements Y que no siguin vectors de $R_{p,q}$ la mateixa fórmula de transformació $Y' = X Y X^{-1}$ ens dona la llei de transformació correcta per a aquests tensors antisimètrics d'ordre superior, ja que si $Y = Y_1 Y_2$

$$Y' = (X Y_1 X^{-1}) (X Y_2 X^{-1}) = X Y_1 Y_2 X^{-1} = X Y X^{-1}$$

2.2. Transformacions de Lorentz. Algebres $C_{3,1}$ i $C_{1,3}$

La transformació de Lorentz pròpia més general és caracteritzada per un element parell amb $k_1 = \alpha^2 + C \cdot C - A \cdot A - \pi^2 = 1$

$$k_2 = 2 (A \cdot C - \alpha \pi) = 0 \quad (2.6)$$

Es verifica, doncs, d'acord amb (1.8) $X^{-1} = X^*$

La llei de transformació $Y' = X Y X^*$ dona com a resultat:

$$\beta' = \beta \quad \mu' = \mu \quad (\text{escalar i pseudo-escalar invariants})$$

$$w'_0 = w_0 + 2 \{ (A \cdot A + \pi^2) w_0 + [g(\alpha A + \pi C) + C \times A] \cdot w \}$$

$$w' = w + 2 \{ (\pi^2 - C \cdot C) w + [g(\alpha A + \pi C) + A \times C] w_0 + g(\pi A - \alpha C) \times w + (w \cdot A) A + (w \cdot C) C \}$$

$$B' = B + 2 \{ (A \cdot A - C \cdot C) B - \alpha \pi D + (C \cdot B) C - (A \cdot B) A + g B \times (\pi A + \alpha C) + (A \cdot D) C + (C \cdot D) A + g D \times (\alpha A - \pi C) \}$$

$$D' = D + 2 \{ (A \cdot A - C \cdot C) D + \alpha \pi B + (C \cdot D) C - (A \cdot D) A + g D \times (\pi A + \alpha C) - (A \cdot B) C - (C \cdot B) A - g B \times (\alpha A - \pi C) \}$$

$$T'_0 = T_0 + 2 \{ (A \cdot A + \pi^2) T_0 + [g(\alpha A + \pi C) + C \times A] \cdot T \}$$

$$T' = T + 2 ((\pi - C \cdot C) T + [g (\alpha A + \pi C) + A \times C] T_0$$

$$+ g (\pi A - \alpha C) \times T + (-T \cdot A) A + (T \cdot C) C) \quad (2.7)$$

Observem que tan sols els termes lineals en A , C resulten afectats del factor mètric g que determina la signatura de l'espai de Minkowski. Això fa que obtinguem exactament la mateixa transformació si en canviar de signatura canviem també el signe d'aquests dos termes vectorials. Es com si el canvi de signatura invertís el sentit operacional dels bivectors com a generadors de les transformacions ortogonals. Observem també que el trivector (T_0, T) es transforma de la mateixa manera que el vector (w_0, w) . Finalment resulta trivial a partir de (2.7) considerar la transformació infinitesimal més general ja que correspon a $\alpha = 1$, A i C vectors infinitèsims de primer ordre i π infinitèsim d'ordre superior:

$$w'_0 = w_0 + 2g A \cdot w$$

$$w' = w + 2g [w_0 A + w \times C]$$

$$B' = B + 2g [B \times C + D \times A]$$

$$D' = D + 2g [D \times C - B \times A] \quad (2.8)$$

Aquestes expressions infinitesimals resulten d'utilitat en fixar els criteris d'orientació per a les transformacions finites.

Per especialització a partir de les fórmules de transformació (2.7), amb $\hat{n}$ i $\hat{u}$ vectors unitaris de 3 components, que indiquen direccions a l'espai 3-dimensional, obtenim:

rotació d'eix $\hat{n}$ i angle θ

$$X = \left(\cos \frac{\theta}{2} ; 0, 0 ; 0, -g \sin \frac{\theta}{2} \hat{n} ; 0, 0, 0 \right)$$

$$\alpha' = \alpha \quad w'_0 = w_0 \quad T'_0 = T_0 \quad \mu' = \mu \quad (\text{escalars sota rotacions})$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} W' \\ B' \\ D' \\ T' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W \\ B \\ D \\ T \end{pmatrix} + 2 \left(-(C \cdot C) \begin{pmatrix} W \\ B \\ D \\ T \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} W \\ B \\ D \\ T \end{pmatrix} \cdot C \right) C - g \alpha C \times \begin{pmatrix} W \\ B \\ D \\ T \end{pmatrix} \right) = \\
&= W + 2 \left(-\sin^2 \frac{\theta}{2} W + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \hat{n} \times W + \sin^2 \frac{\theta}{2} (W \cdot \hat{n}) \hat{n} \right) = \\
&= \cos \theta W + (1 - \cos \theta) (W \cdot \hat{n}) \hat{n} + \sin \theta \hat{n} \times W \quad (2.9)
\end{aligned}$$

i expressions totalment anàlogues per B' , D' i T' , manifestació del seu caràcter vectorial sota rotacions.

"boost" de velocitat $v = c \tanh \sigma$ i direcció indicada per $\hat{u}$

L'element que el representa és

$$X = \left(\cosh \frac{\sigma}{2} ; 0, 0 ; g \sinh \frac{\sigma}{2} \hat{u}, 0 ; 0, 0 ; 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
W'_0 &= W_0 + 2 \left((A \cdot A) W_0 + g \alpha A \cdot W \right) = \\
&= W_0 + 2 \left(\sinh^2 \frac{\sigma}{2} W_0 + \sinh \frac{\sigma}{2} \cosh \frac{\sigma}{2} \hat{u} \cdot W \right) = \\
&= \cosh \sigma W_0 + \sinh \sigma (u \cdot W) \\
W' &= W + 2 \left(g \alpha A W_0 + (W \cdot A) A \right) = \\
&= W + 2 \left(\sinh \frac{\sigma}{2} \cosh \frac{\sigma}{2} \hat{u} W_0 + \sinh^2 \frac{\sigma}{2} (W \cdot \hat{u}) \hat{u} \right) = \\
&= W + (\cosh \sigma - 1) (W \cdot \hat{u}) \hat{u} + \sinh \sigma W_0 \quad (2.10 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B' &= B + 2 \left((A \cdot A) B - (A \cdot B) A + g D \times \alpha A \right) = \\
&= B + 2 \left(A \times B + g \alpha D \right) \times A = \\
&= B + 2 \left(\sinh^2 \frac{\sigma}{2} \hat{u} \times B + \cosh \frac{\sigma}{2} \sinh \frac{\sigma}{2} D \right) \times \hat{u} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{B} + (\cosh \sigma - 1) (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}) \times \hat{\mathbf{u}} + \sinh \sigma \mathbf{D} \times \hat{\mathbf{u}} \\
\mathbf{D}' &= \mathbf{D} + 2 (\mathbf{A} \times \mathbf{D} - g \alpha \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = \\
&= \mathbf{D} + (\cosh \sigma - 1) (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{D}) \times \hat{\mathbf{u}} - \sinh \sigma \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{u}} \quad (2.10 \text{ b})
\end{aligned}$$

Les fórmules de transformació (2.10) corresponen a l'acció d'un "boost" actiu de velocitat $c \tanh \sigma$ en la direcció $\hat{\mathbf{u}}$, que hem volgut formular en concordança amb la rotació anterior. Les lleis de transformació de les components en el "boost" passiu, en el qual són els vectors base els que han estat sotmesos a la transformació indicada, s'obtenen canviant el signe de la velocitat i, per tant, el signe dels termes en $\sinh \sigma$. Es d'aquesta darrera forma passiva com habitualment hom troba formulades les transformacions de velocitat.

La descomposició d'una transformació de Lorentz general en producte d'un "boost" i d'una rotació, quan és formulada mitjançant el formalisme de Clifford, pren la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \\ \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \alpha \\ 0 \\ k \mathbf{C} \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/k \\ k (\alpha \mathbf{A} + \mathbf{C} + g \mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/k & & & k \alpha \\ k (\alpha \mathbf{A} + \mathbf{C} - g \mathbf{C} \times \mathbf{A}) & & & 0 \\ 0 & & & k \mathbf{C} \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

on hem escrit tan sols els termes d'ordre parell i hem definit el paràmetre $k = 1 / \sqrt{(\alpha\alpha + \mathbf{C} \cdot \mathbf{C})}$

Així mateix resulta una trivial aplicació de la fórmula bàsica del producte (1.4) la determinació del conjunt de paràmetres $\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \pi$ corresponents a la composició d'un "boost" i una rotació o de dos "boosts".

Volem remarcar aquí dos trets de la descomposició (2.11) que considerem essencials. El primer és que, a diferència del que succeeix amb les formulacions passives, totes les transformacions es troben escrites i caracteritzades en la mateixa base; per tant, concloem amb tota claredat que el factor rotació és el mateix independent de l'ordre de la descomposició; no així el factor "boost" llevat del cas d' A i C paral·lels. Considerem conceptualment fosc, sinó és totalment mancat de sentit, el comparar transformacions definides en bases diferents, com és pràctica habitual en tractar la dita descomposició. El segon és la constatació de la "naturalitat" del conjunt de paràmetres $\{ \alpha, A, C, \pi \}$, dels quals d'acord amb (2.6) tan sols A i C resulten essencials, en vist els paràmetres que caracteritzen per separat els dos factors de la descomposició (2.11). No es tracta només de la unicitat de la representació i d'evitar una artificiosa descomposició d'una transformació única en dos processos finits fàcils d'imaginar geomètricament però sense base objectiva; la raó essencial ha estat indicada abans: la llei de composició de transformacions és el producte de Clifford dels corresponents multivectors parells !

Deixem com a senzill exercici al lector establir la formulació de les rotacions ordinàries mitjançant l'àlgebra de Clifford $C_{3,0}$; aquesta formulació resulta totalment equivalent a la tradicional formulació quaterniònica que hom pot consultar a Molina i al.[1985]. Així mateix, en resultar aquesta mateixa àlgebra isomorfa als quaternions complexos, resulta possible amb ella formular amb paràmetres reals les transformacions de Lorentz de forma equivalent a la quaterniònica complexa. Adrecem el lector interessat al treball (Parra [1984]) per a un tractament més exhaustiu de les transformacions de Lorentz basades en la dita àlgebra.

2.3. Consideracions finals

Com és evident a partir de les taules de transformacions anteriors són tres les característiques remarcables del tractament algebriac del grup ortogonal. En primer lloc, les expressions obtingudes mostren una completa independència de la particular base ortonormal escollida, i participen així del mateix caràcter intrínsec de les expressions vectorials de Gibbs-Heaviside, que el càlcul matricial no posseeix. En segon lloc, les lleis de

transformació per a tots els tensors antisimètrics d'ordre arbitrari queden unificades mitjançant l'única expressió $Y' = X Y X^{-1}$, a diferència del tractament habitual que requereix una representació matricial diferent per a cada ordre tensorial. En tercer lloc, pel que fa a la pròpia composició de transformacions, constatem que la dita llei de composició consisteix en el propi producte de Clifford dels elements que defineixen la transformació. Així, el producte de Clifford no tan sols permet de formular unificadament les transformacions ortogonals sinó que forneix la pròpia llei de composició del grup ortogonal. Estem per tant en presència d'una formulació força significativa, apta per al càlcul i que supera la separació habitual entre el grup de transformacions i l'espai sobre el qual actua, com ens ho mostra la consideració trivial del fet que un element resta invariant si i només si commuta amb l'element que defineix la transformació ortogonal:

$$Y' = X Y X^{-1} = Y \quad \text{sii} \quad X Y = Y X$$

Obtenim així la caracterització conjunta de totes les formes invariants sota una transformació donada; el subespai vectorial de l'àlgebra que commuta amb X constitueix, per tant, la generalització immediata del concepte d'eix de gir, habitual en tractar el grup de rotacions.

Finalitzem aquesta presentació dels grups ortogonals $SO(p,q)$ mitjançant una formulació acurada de les versions activa i passiva, que considerem absolutament necessària per tal d'evitar ambigüitats de càlcul i errors interpretatius. En primer lloc, constatem que les fórmules de transformació anteriors (2.7) a (2.10) ens ofereixen el canvi de components sense, aparentment, especificar el caràcter actiu o passiu de la transformació. De fet no és exactament així ja que el formalisme operacional de Clifford, igual que el quaterniònic de Hamilton-Cayley, posseeix implícitament un caràcter actiu: justament per la natura algebàrica del càlcul hom està obligat a expressar tots els factors (transformació, element inicial i element final) en la mateixa base ortonormal, d'altra part arbitrària com hem dit abans. I hem vist que aquesta versió 'activa' és precisament la més convenient en considerar la composició successiva de transformacions ja

que totes estan definides i referides en una mateixa base.

Ara bé, si, com és habitual en tractar les transformacions del grup de Lorentz, volem considerar canvis de referència lligats a observadors diferents, podem adaptar el formalisme anterior només considerant els vectors d'una de les bases com els transformats 'actius' dels vectors homòlegs de l'altra base. Així tindrem:

$$e_{I'} = (X^J e_J) e_I (X^K e_K)^{-1} = c^L_{I'} e_L \quad (2.12)$$

on hem introduït el conveni d'Einstein per a sumació d'índexs repetits en posició superíndex-subíndex $X^I e_I \equiv \sum_I X^I e_I$ (1 ... n). Fem notar que pujar l'índex no altera el valor dels components ni suposa cap contracció amb la mètrica; és tan sols un indicatiu de sumació.

Per a un element geomètric Y, definit independentment de tota representació, obtenim a partir de (2.12) la següent relació entre els seus components en bases diferents

$$Y = Y^{I'} e_{I'} = Y^{I'} (X^J e_J) e_I (X^K e_K)^{-1} = (X^J e_J) (Y^{I'} e_{I'}) (X^K e_K)^{-1} = Y^L e_L \quad (2.13)$$

Es a dir, per a obtenir els components de Y en la base $\{e_I\}$ hem de transformar activament la magnitud $Y^{I'} e_{I'}$. En el cas particularment interessant de l'espai de Minkowski en què considerem $\{e_\mu\}$ una tètrade mòbil, i e_0 , és el vector quadrivelocitat, obtenim, d'acord amb (2.10 a),

$$u = e_0 = (X^J e_J) (e_0) (X^K e_K)^{-1} = \cosh \sigma e_0 + \sinh \sigma \hat{u}^i e_{0i}$$

amb $X^J e_J = \exp \left(g \frac{\sigma}{2} \hat{u}^i e_{0i} \right) = \cosh \frac{\sigma}{2} + g \sinh \frac{\sigma}{2} \hat{u}^i e_{0i} \quad (2.14)$

AGRAIMENTS

Aquest treball s'ha realitzat amb el suport de CAICYT, sota contracte nº 0649-84

REFERENCIES

- Casanova, G. L'algebra vectorielle. P.U.F. Paris, 1976.
El algebra vectorial. Ed. Morata. Madrid, 1977.
- Clifford, W.K. "Application of Grassmann's Extensive Algebra"
Am. Jour. Math., 1, 350 (1878).
- Gibbs, J.W. The Scientific Papers of J.W. Gibbs, vol. 2
Longmans. Londres, 1906
- Heaviside, O. Electromagnetic Theory, vol. 1. The Electrician.
Londres, 1893.
- Hestenes, D. Space-Time Algebra. Gordon & Breach. Nova York, 1966.
New Foundations for Classical Mechanics. Reidel.
Dordrecht, 1986.
- Hestenes, D. i Sobczyk, G. Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Uni-
fied Language for Mathematics and Physics.
Reidel. Dordrecht, 1984.
- Molina, A., Navarro, L. i Parra, J.M. "On 'angular velocity' in rigid
body kinematics". Eur. Jour. Phys., 5, 160 (1984).
- Parra, J.M. "Lorentz and duality transformations: a unified view from
real Clifford Algebra for the Euclidean 3-space".
Preprint UBFT-1-84.
Contribució a l'estudi de les àlgebres de Clifford. Aplica-
cions a la Física. Tesi Doctoral. Univ. Barcelona. Febrer,
1985.
- Watanabe, S. "Symmetry of Physical Laws". Rev. Mod. Phys., 27, 26