

MODELOS SIMPLIFICADOS DE DAÑO EN PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

ALDO CIPOLLINA
y
JULIO FLÓREZ LÓPEZ

*Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela*

RESUMEN

En este artículo se presenta un marco general para el modelado del proceso de degradación y plastificación de pórticos planos. Este formalismo puede ser considerado como una mecánica de la degradación (*Continuum damage mechanics*) simplificada para estructuras aporticadas. Se sugiere una metodología para la identificación de las leyes de evolución del modelo y se propone un modelo independiente del tiempo para estructuras de concreto armado bajo cargas de un sólo signo.

SUMMARY

A general framework for damage and plastic modeling in planar frames is presented. This formalism can be considered as a simplified damage mechanics for frames. A methodology for damage and plastic evolution laws identification is presented and a time-independent model for reinforced concrete structures under loading that does not change of sign is proposed.

INTRODUCCIÓN

En trabajos precedentes ¹⁻⁴ se propuso un marco general para el modelado y simulación del proceso de daño de pórticos planos sometidos a solicitaciones mecánicas. Este formalismo puede ser considerado como la adaptación de las teorías clásicas de la mecánica de la degradación (*Continuum damage mechanics*) o de la fractura (*Fracture mechanics*) para el análisis de pórticos. El procedimiento utilizado para ello es similar al empleado en la construcción de modelos de plasticidad concentrada (*Lumped plasticity models*) que han sido utilizados para el desarrollo de una teoría de la plasticidad para estructuras aporticadas ^{5,6}.

En este artículo se propone un modelo del comportamiento de miembros de concreto armado basado en este formalismo general. Este modelo permite representar los efectos plásticos y de pérdida de rigidez debido al agrietamiento del concreto y a la fluencia del refuerzo bajo solicitaciones monotónicas o reversibles sin cambio de signo. El modelo

Recibido: Junio 1993

propuesto difiere de otros existentes en la literatura⁷⁻⁹, porque hace uso de los métodos y de los conceptos de la termodinámica de los medios continuos (variables internas, potenciales termodinámicos, leyes de evolución etc.) y en especial de la mecánica de la degradación. Las condiciones de validez del modelo son un tanto restrictivas (solicitaciones sin cambio de signo, se desprecian los efectos de fatiga etc.). Sin embargo este trabajo permite presentar las diferencias con respecto a los modelos clásicos y mostrar el potencial de este enfoque alternativo mediante el análisis de un material real bajo condiciones frecuentemente encontradas en la práctica. Finalmente, este modelo constituye la base de modelos más generales actualmente en desarrollo¹⁰⁻¹¹.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección A se describe la representación de un miembro de un pórtico plano mediante el modelo de disipación concentrada. En la sección B se obtiene la matriz de flexibilidad y las relaciones esfuerzos-deformaciones generalizadas para un miembro elasto-plástico degradable. En la sección C se presenta la expresión de la disipación de energía del miembro. En la sección D se describe un modelo independiente del tiempo que es identificado mediante los ensayos presentados en la sección E y F.

A. MODELOS DE DISIPACIÓN CONCENTRADA

Considérese un miembro de un pórtico plano. Los esfuerzos y las deformaciones generalizadas del miembro serán denominados $\{M\}$ y $\{\phi\}$ respectivamente

$$\{M\}^t = (M_i, M_j, N); \quad \{\phi\}^t = (\phi_i, \phi_j, \delta) \quad (1)$$

donde los símbolos M_i y M_j indican los momentos en los extremos i y j respectivamente, N es la fuerza axial (ver Figura 1a), ϕ_i y ϕ_j denotan los giros de los extremos relativos a la cuerda $i - j$ y δ es el alargamiento de la misma (ver Figura 1b).

Los esfuerzos y deformaciones generalizados se relacionan entre sí mediante la ecuación (2) en el caso particular de un miembro elástico

$$\{M\} = [S(\phi)] \{\phi\} \quad \text{o en su defecto} \quad \{\phi\} = [F(M)]\{M\} \quad (2)$$

Las matrices $[S(\phi)]$ y $[F(M)]$ son por lo tanto las matrices de rigidez y de flexibilidad del miembro $i - j$ respectivamente. En el caso particular de pequeñas deformaciones (es decir sin tomar en cuenta la no-linealidad geométrica), las matrices de rigidez y flexibilidad permanecen constantes y serán denominadas $[S^0]$ y $[F^0]$ respectivamente.

Bajo sobrecargas severas el modelo (2) es evidentemente inadecuado. En este artículo se propondrá un modelo que reemplaza a la ecuación (2) y que será descrito en términos de "potenciales termodinámicos", "leyes de evolución" y "variables internas" como las leyes de comportamiento de la mecánica de los medios continuos.

Con el objeto de tomar en cuenta los efectos inelásticos de una manera sencilla y con una precisión adecuada para muchas aplicaciones de Ingeniería Civil, se adoptará el modelo de "disipación de energía concentrada" que se indica en la Figura 1c. En este modelo simplificado, cada miembro de la estructura se representa como el ensamblaje de una viga-columna elástica y dos "rótulas inelásticas" en los extremos del miembro. En

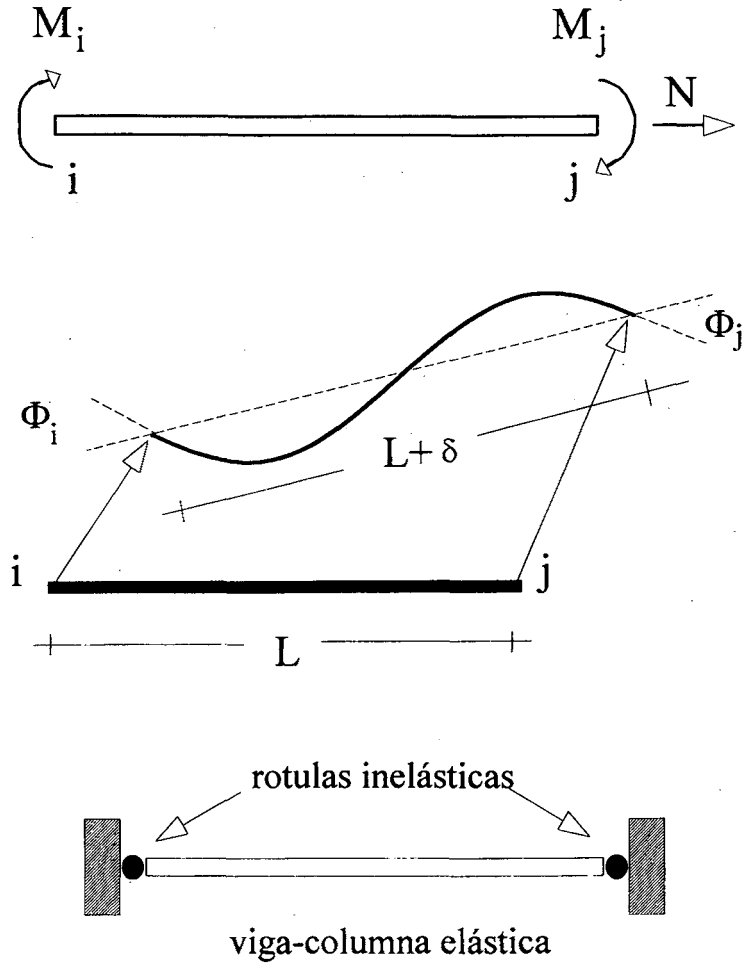


Figura 1 Miembro de un pórtico plano. a) Esfuerzos generalizados, b) Deformaciones generalizadas, c) Modelo de disipación concentrada

este modelo se admite, que todos los fenómenos que disipan energía: daño, plasticidad etc. se concentran en las rótulas.

Las deformaciones generalizadas del miembro $\{\phi\}$ pueden ahora descomponerse en deformaciones de la viga-columna $\{\phi^v\}^t = (\phi_i^v, \phi_j^v, \delta^v)$ y deformaciones de las rótulas $\{\phi^r\}^t = (\phi_i^r, \phi_j^r, \delta^r)$. Cada rótula puede ser imaginada como un conjunto formado por un resorte de flexión y uno axial. El alargamiento δ^r corresponde a la suma de los alargamientos axiales de las dos rótulas. En este modelo se admitirá, que las deformaciones generalizadas de las rótulas pueden expresarse como la suma de las deformaciones plásticas $\{\phi^p\}$ tal y como se definen en las teorías clásicas de pórticos elasto-plásticos y un término adicional debido al daño $\{\phi^d\}$

$$\{\phi\} = \{\phi^v\} + \{\phi^r\} = \{\phi^v\} + \{\phi^p\} + \{\phi^d\} = [F]\{M\} + \{\phi^p\} + \{\phi^d\} \quad (3)$$

donde $[F]$ es la matriz de flexibilidad de la viga-columna elástica tal y como se definió en la relación (1).

B. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN COMPLEMENTARIA DE UN MIEMBRO ELASTO-PLÁSTICO DEGRADABLE

Considérese el caso particular de un miembro de longitud l , sección transversal de área A y módulo de elasticidad E sometido únicamente a una fuerza axial N (sin tomar en cuenta los efectos de pandeo). La mecánica de la degradación clásica^{12,13} permite obtener una relación esfuerzos-deformaciones generalizados para este problema. Suponiendo un estado de degradación uniforme en el miembro (es decir admitiendo que no hay localización), se obtiene

$$\delta - \delta^p = \frac{N}{(1 - \omega)S_{33}^o} \quad S_{33}^o = \frac{AE}{l} \quad (4)$$

donde ω es una medida del daño que caracteriza la densidad de microgrietas y microporos de un elemento representativo del material. Esta variable toma valores entre cero (material intacto) y uno (material completamente degradado, macrofisura).

Por otra parte, en el modelo de disipación concentrada las deformaciones generalizadas se expresan mediante la relación (3) que para este caso particular se escribe de la siguiente manera

$$\delta = \frac{N}{S_{33}^o} + \delta^p + \delta^d \quad (5)$$

eliminando las deformaciones generalizadas elásticas $\delta - \delta^p$ mediante estas dos ecuaciones se obtiene

$$\delta^d = \frac{\omega}{(1 - \omega)S_{33}^o} N \quad (6)$$

Ello significa, que para formular un modelo de disipación de energía concentrada que sea equivalente al obtenido mediante la mecánica de la degradación clásica, es necesario definir la deformación generalizada debida al daño por medio de la ecuación (6). Puede observarse, que cuando la variable toma el valor cero, las rótulas poseen una flexibilidad nula (o una rigidez infinita) y se comportan como bielas rígido-plásticas. Por el contrario si el daño es igual a uno, la flexibilidad es infinita. Este caso sería equivalente a imaginar, que rótulas y viga-columna están desconectadas y el sistema no puede transmitir carga axial.

Cuando existen efectos de flexión, el comportamiento es demasiado complejo para obtener expresiones analíticas explícitas similares a la ecuación (6) válidas en el caso general, inclusive utilizando leyes de evolución del daño extremadamente simples. Por lo tanto se postula la existencia de un conjunto de variables internas del daño $\{D\}^t = (d_i, d_j, d_a)$ que pueden tomar valores en el intervalo $[0, 1]$ tales que el comportamiento de las rótulas inelásticas pueda ser expresado de la manera siguiente

$$\{\phi^d\} = [C(D)]\{M\} \quad (7)$$

donde $[C(D)]$ es una matrix diagonal cuyos términos no nulos son

$$C_{11} = \frac{d_i}{(1 - d_i)S_{11}^0}; \quad C_{22} = \frac{d_j}{(1 - d_j)S_{22}^0}; \quad C_{33} = \frac{d_a}{(1 - d_a)S_{33}^0} \quad (8)$$

Los parámetros d_i y d_j representan una medida del “daño de flexión” de las rótulas i y j respectivamente. Como se indicó anteriormente, estas variables pueden tomar valores entre cero (rótula puramente plástica) y uno (rótula completamente degradada). En este último caso la flexibilidad de la rótula es infinita y se comporta como una articulación interna de un pórtico elástico clásico. En el caso particular de un reticulado, las expresiones (6) y (7) son idénticas con $\omega = d_a$.

La ley de estado que substituye a la ecuación (2) para un miembro de pórtico elasto-plástico degradable, se obtiene substituyendo (7) en (3)

$$\{\phi - \phi^p\} = [F^d(M, D)]\{M\} \quad (9)$$

donde $[F^d(M, D)] = [C(D)] + [F(M)]$ es la matriz de flexibilidad de un miembro degradable. En el caso particular de pequeñas deformaciones puede escribirse

$$[S^d(D)] = ([C(D)] + [F^0])^{-1} \quad (10)$$

donde $[S^d(D)]$ es la matriz de rigidez de un miembro degradable. En la referencia 1 se indica la expresión explícita de los elementos de la matriz de rigidez en función de los coeficientes de rigidez de la viga-columna elástica. Para el caso particular de un miembro de sección transversal constante de área A , inercia I , módulo de elasticidad E y longitud l , los elementos de la matriz de rigidez de un miembro degradado tienen por expresión

$$\begin{aligned} S_{11}^d &= \frac{(1 - d_i)(4 - d_j)}{4 - d_i d_j} \frac{4EI}{l} & S_{12}^d &= S_{21}^d = \frac{4(1 - d_i)(1 - d_j)}{4 - d_i d_j} \frac{2EI}{l} \\ S_{22}^d &= \frac{(1 - d_j)(4 - d_i)}{4 - d_i d_j} \frac{4EI}{l} & S_{13}^d &= S_{31}^d = S_{23}^d = S_{32}^d = 0 \\ S_{33}^d &= (1 - d_a) \frac{AE}{l} \end{aligned} \quad (11)$$

Como puede comprobarse mediante las ecuaciones (11), en el caso de la existencia de una rótula completamente degradada ($d_i = 1$, $d_j = 0$, $d_a = 0$, por ejemplo) la matriz de rigidez degradada coincide con la de un miembro elástico con una articulación interna. La variable de daño d_a reduce la rigidez del miembro ante las acciones axiales.

La energía de deformación complementaria U^* del miembro se expresa como la suma de la energía de la viga-columna elástica W^* y la energía de las rótulas

$$U^* = W^* + \frac{1}{2}\{M\}^t[C(D)]\{M\} \quad (12)$$

En pequeñas deformaciones puede escribirse

$$U^* = \frac{1}{2}\{M\}^t[F^d(D)]\{M\} \quad U = \frac{1}{2}\{\phi - \phi^p\}^t[S^d(D)]\{\phi - \phi^p\} \quad (13)$$

donde U es la energía de deformación.

C. ANÁLISIS DE LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

Los principios de la termodinámica conducen a la ecuación (14) en el caso particular de comportamiento isotérmico

$$d\psi + d\Gamma = dT \quad (14)$$

donde ψ indica la energía libre del miembro, Γ es la energía disipada por el miembro durante la sollicitación y dT es el incremento de trabajo realizado sobre el miembro que tiene por expresión

$$dT = \{M\}^t\{d\phi\} \quad (15)$$

Se postula, que la energía libre ψ puede escribirse como la suma de la energía de deformación U más, posiblemente, un potencial inelástico U^p que puede depender de otras variables internas $\{\alpha^p\}$, $\{\alpha^d\}$:

$$\psi = U(\phi, \phi^p, D) + U^p(\alpha^p, \alpha^d) \quad (16)$$

La matriz $\{\alpha^p\}$ puede contener por ejemplo parámetros de endurecimiento plástico isótropo o cinemático como en los modelos de la mecánica de los medios continuos. La matriz $\{\alpha^d\}$ corresponde a términos de endurecimiento de daño. Las variables $\{\phi\}$, $\{\phi^p\}$, $\{D\}$ y eventualmente $\{\alpha^p\}$, $\{\alpha^d\}$ forman el conjunto de “variables de estado” del miembro.

Tomando en cuenta (13–16) se obtiene la expresión de la “disipación de energía” que debe ser positiva de acuerdo al segundo principio de la termodinámica

$$d\Gamma = \{G\}^t\{dD\} + \{\beta^d\}^t\{d\alpha^d\} - \{M\}^t\{d\phi^p\} + \{\beta^p\}^t\{d\alpha^p\} \geq 0 \quad (17)$$

donde

$$\{G\} = -\left\{\frac{\partial U}{\partial D}\right\}; \quad \{\beta^p\} = \left\{-\frac{\partial U^p}{\partial \alpha^p}\right\}; \quad \{\beta^d\} = -\left\{\frac{\partial U^d}{\partial \alpha^d}\right\} \quad (18)$$

Si se admite, que los fenómenos inelásticos asociados al daño y a la plasticidad pueden estar desacoplados, es decir posibilidad de incremento del daño sin plasticidad y viceversa (esta hipótesis es usual en la mecánica de la degradación clásica^{13,14}). Entonces la desigualdad (17) debe ser descompuesta en dos condiciones independientes

$$\{G\}^t\{dD\} + \{\beta^d\}^t\{d\alpha^d\} \geq 0 \quad -\{M\}^t\{d\phi^p\} + \{\beta^p\}^t\{d\alpha^p\} \geq 0 \quad (19)$$

Los coeficientes G_i y G_j de la matriz $\{G\}^t = (G_i, G_j, G_a)$ son los “momentos termodinámicos” asociados a los parámetros de daño d_i y d_j respectivamente. La variable G_a es la “fuerza termodinámica” asociada a d_a . La expresión explícita de los términos de $\{G\}$ es la siguiente

$$\begin{aligned} G_i &= -\frac{\partial U}{\partial d_i} = \frac{\partial U^*}{\partial d_i} = \frac{1}{2S_{11}^0} \left(\frac{M_i}{1-d_i} \right)^2 \\ G_j &= -\frac{\partial U}{\partial d_j} = \frac{\partial U^*}{\partial d_j} = \frac{1}{2S_{22}^0} \left(\frac{M_j}{1-d_j} \right)^2 \\ G_a &= -\frac{\partial U}{\partial d_a} = \frac{\partial U^*}{\partial d_a} = \frac{1}{2S_{33}^0} \left(\frac{N_i}{1-d_a} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Los momentos y la fuerza termodinámicos asociados al daño $\{G\}$ son los equivalentes para los pórticos de la tasa de restitución de energía que se define en la mecánica clásica de la fractura y la degradación.

D. LEYES DE EVOLUCIÓN INDEPENDIENTES DEL TIEMPO DE LAS VARIABLES INTERNAS

Para la formulación de las leyes de evolución de las variables internas se postula la existencia de dos “funciones inelásticas”, negativas o nulas, para cada rótula inelástica.

$$\begin{aligned} f_i &= f_i(M, \beta^p; D, \phi^p, \alpha) \\ g_i &= g_i(G, \beta^d; D, \phi^p, \alpha) \quad \text{para la rótula } i, \\ f_j &= f_j(M, \beta^p; D, \phi^p, \alpha) \\ g_j &= g_j(G, \beta^d; D, \phi^p, \alpha) \quad \text{para la rótula } j, \end{aligned} \quad (21)$$

Las funciones f son las “funciones de fluencia” de las rótulas inelásticas que indican cuando hay incrementos plásticos. Estas funciones dependen de los esfuerzos generalizados y de las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de endurecimiento plástico. Las variables internas pueden intervenir como parámetros. Las funciones g son las “funciones de daño” de las rótulas que indican cuando hay incrementos de daño y dependen de las fuerzas termodinámicas asociadas al daño o a sus variables de endurecimiento. Como en el caso anterior, las variables internas pueden intervenir como parámetros.

Las leyes de evolución se obtienen a partir de las funciones inelásticas mediante el principio de normalidad

$$\begin{aligned} d\phi_i^p &= d\lambda_i^p \frac{\partial f_i}{\partial M_i} & d\phi_j^p &= d\lambda_j^p \frac{\partial f_j}{\partial M_j} & d\delta^p &= d\lambda_i^p \frac{\partial f_i}{\partial N} + d\lambda_j^p \frac{\partial f_j}{\partial N} \\ dd_i &= d\lambda_i^d \frac{\partial g_i}{\partial G_i} & dd_j &= d\lambda_j^d \frac{\partial g_j}{\partial G_j} & dd_a &= d\lambda_i^d \frac{\partial g_i}{\partial G_a} + d\lambda_j^d \frac{\partial g_j}{\partial G_a} \end{aligned} \quad (22)$$

donde λ_i^p , λ_j^p son los “multiplicadores plásticos” de las rótulas i y j respectivamente y λ_i^d , λ_j^d son los multiplicadores de “daño”.

Las leyes de evolución de las variables de endurecimiento plástico o de daño, cuando estas sean necesarias, se obtienen de manera similar a partir de las funciones de fluencia y de daño respectivamente.

Los multiplicadores inelásticos se determinan de la manera usual mediante la “condición de consistencia”

$$\begin{aligned} d\lambda_i^p \begin{cases} = 0 & \text{si } f_i < 0 \text{ o } df_i < 0 \\ > 0 & \text{si } f_i = 0 \text{ y } df_i = 0 \end{cases} & \quad d\lambda_j^p \begin{cases} = 0 & \text{si } f_j < 0 \text{ o } df_j < 0 \\ > 0 & \text{si } f_j = 0 \text{ y } df_j = 0 \end{cases} \\ d\lambda_i^d \begin{cases} = 0 & \text{si } g_i < 0 \text{ o } dg_i < 0 \\ > 0 & \text{si } g_i = 0 \text{ y } dg_i = 0 \end{cases} & \quad d\lambda_j^d \begin{cases} = 0 & \text{si } g_j < 0 \text{ o } dg_j < 0 \\ > 0 & \text{si } g_j = 0 \text{ y } dg_j = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

E. IDENTIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES DE FLUENCIA Y DE DAÑO

Las funciones f , g y, cuando sea necesario, U^p son las únicas funciones que restan por determinar para definir completamente el modelo. Por otra parte, todavía no se ha hecho referencia al material constitutivo del miembro. Las funciones antes mencionadas son particulares para el tipo de pórtico que se considera: concreto armado, acero etc. En esta sección se propone un procedimiento experimental simple para la identificación de los términos faltantes y se presentan las expresiones obtenidas para miembros de concreto armado bajo ciertas circunstancias particulares.

Mediante este procedimiento se identificará un modelo simplificado válido para solicitaciones sin cambio de signo (aunque con la posibilidad de descargas elásticas) en el cual se desprecian las deformaciones axiales permanentes ($\delta^p = 0$) y no se considera la pérdida de rigidez axial debido al daño ($d_a = 0$). En este modelo no es necesaria la introducción de variables internas de endurecimiento adicionales, por lo tanto no se identificará el potencial inelástico U^p . Sin embargo en modelos más generales de comportamiento histerético la introducción de nuevas variables internas en las funciones inelásticas pudiera ser inevitable. Si este fuera el caso, se determinarían las leyes de

estado (18) para ajustar lo mejor posible los resultados experimentales y por medio de la integración de estas ecuaciones se obtendrá el potencial U^p . Este procedimiento es el que se emplea usualmente en los modelos de la mecánica de los medios continuos¹³.

Para la identificación del modelo se realizaron ensayos en vigas simplemente apoyadas y modelos de juntas viga-columna como las esquematizadas en la Figura 2.

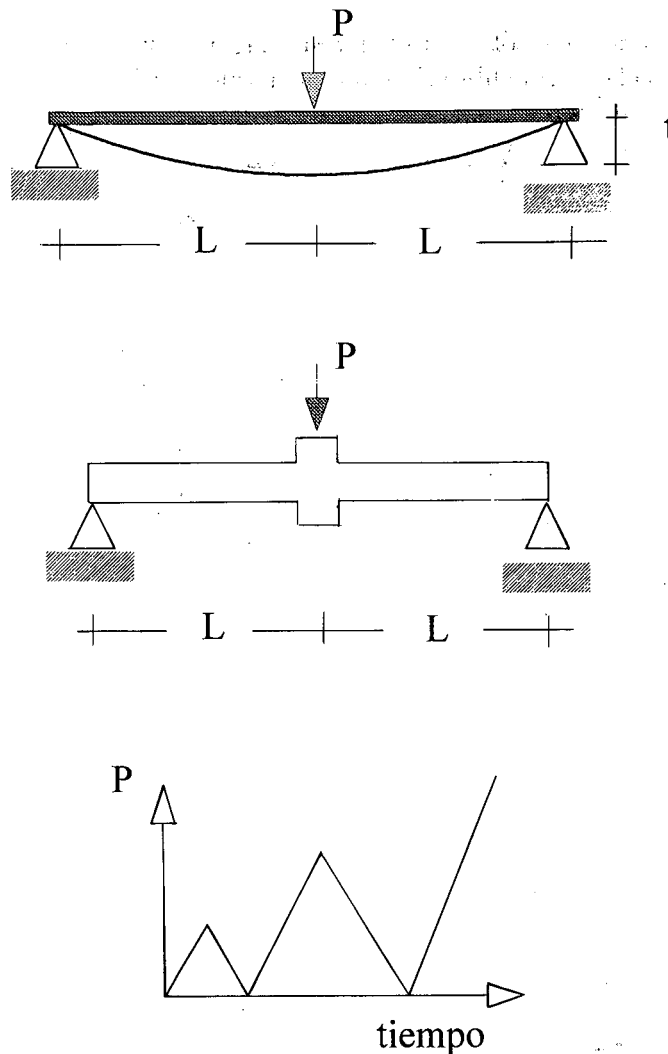


Figura 2 Ensayos de identificación del modelo. a) Viga simplemente apoyada, b) Modelo de junta viga-columna, c) Esquema de la sollicitación

El modelo de disipación concentrada de estos ensayos se indica en la Figura 3a. Las probetas son representadas mediante dos miembros simétricos de los cuales sólo se

muestra el de la izquierda. Es importante señalar, que bifurcaciones asimétricas con respecto a la solución fundamental son posibles y pudieron ser observadas durante los ensayos. Se supondrá que estas bifurcaciones sólo pueden aparecer después de que el miembro exhiba ablandamiento por deformación. Por lo tanto, para la identificación del modelo sólo se utilizarán los resultados experimentales hasta el punto máximo de la curva fuerza-desplazamiento.

Se admiten las hipótesis de pequeños desplazamientos (relaciones lineales entre los desplazamientos de los nudos y las deformaciones generalizadas del miembro) y deformaciones.

Puede observarse, que sólo una rótula inelástica es indicada en cada miembro; ello es debido a que en el extremo libre el momento actuante es nulo y por lo tanto se supone, que las variables internas ϕ_i^p y d_i permanecen constantes e iguales a cero durante la sollicitación. En estos ensayos no se aplicaron cargas axiales.

La expresión analítica de la relación fuerza-desplazamiento del ensayo puede ser obtenida a partir de las ecuaciones (9-11) y de las condiciones siguientes

$$M_i = N = d_a = \delta = \delta^p = 0; \quad M_j = \frac{P \cdot l}{2}; \quad \phi_j = \frac{t}{l} \quad (24)$$

donde P indica la fuerza vertical, t la flecha en el centro de la viga y l la longitud del miembro. Se obtiene entonces

$$P = \frac{4 - 4d}{4 - d} \left(\frac{6El}{l^3} \right) (t - t^p) \quad \text{donde} \quad d = d_j; \quad t^p = l\phi_j^p \quad (25)$$

Las descargas elásticas realizadas en el curso del ensayo permiten determinar el valor de la pendiente elástica Z para diferentes valores de la flecha t (ver Figura 3b).

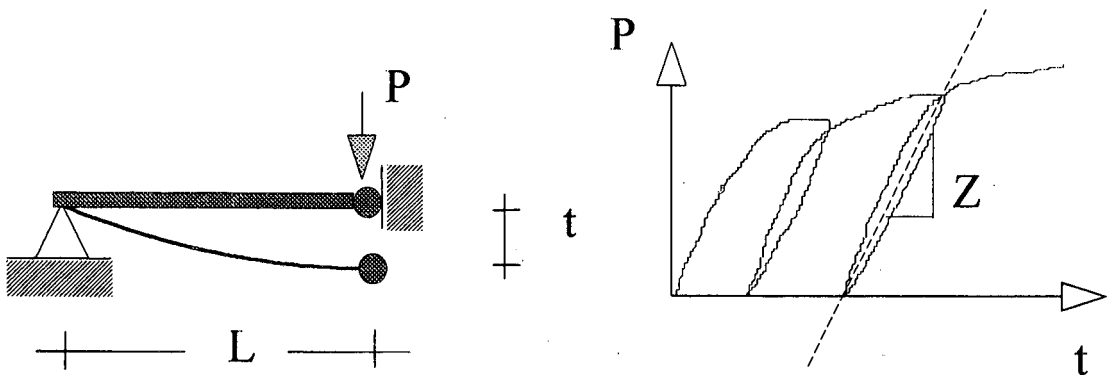


Figura 3 a) Modelo de disipación concentrada de los ensayos de identificación,
b) Definición de la pendiente elástica

La expresión analítica de Z en el modelo puede ser obtenida a partir de la ecuación anterior

$$d = 4 \left(1 - \frac{Z}{Z^o} \right) / \left(4 - \frac{Z}{Z^o} \right) \quad (26)$$

El momento termodinámico que corresponde a cada valor de d puede ser obtenido experimentalmente mediante la aplicación directa de las fórmulas (20).

Los resultados de uno de los ensayos en modelos de juntas viga-columna se muestran en la Figura 4. A partir de estos resultados se obtuvieron los puntos de la curva G vs d de la Figura 5 y en la Figura 6 se presentan los valores del gráfico M vs ϕ^p . En las Figuras 7 y 8 se indican las curvas daño en función de su momento termodinámico asociado y momento en función de la deformación plástica para una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada.

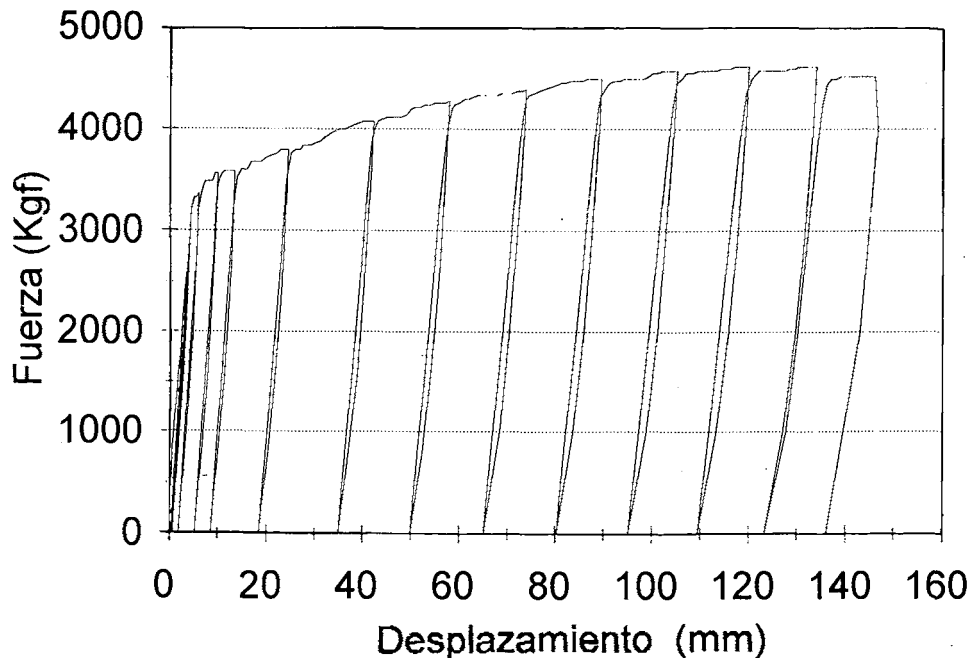


Figura 4 Resultados del ensayo de identificación. Fuerza en función del desplazamiento. Características de la probeta: $l = 0.705$ m (media probeta), sección transversal $= 15 \times 20$ cm², refuerzo longitudinal 4 b $\times$ 3/8", estribos 1/4" $\simeq 7$ mm, $f_c = 250$ kgf/cm², $f_y = 4\ 200$ kgf/cm²

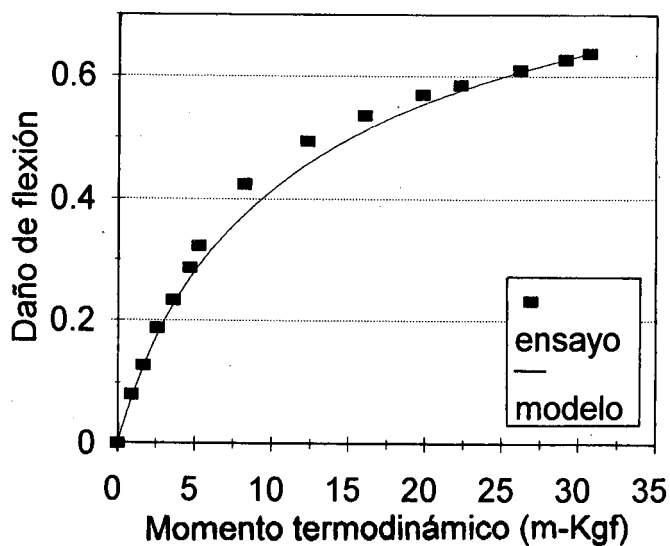


Figura 5 Momento termodinámico en función del daño en un modelo de junta viga-columna. Datos del modelo: $S_o = 328\,600 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $M_u = 1\,629 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $M_p = 1\,150 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $M_{cr} = 0$, $\phi_u^p = 0.1748$

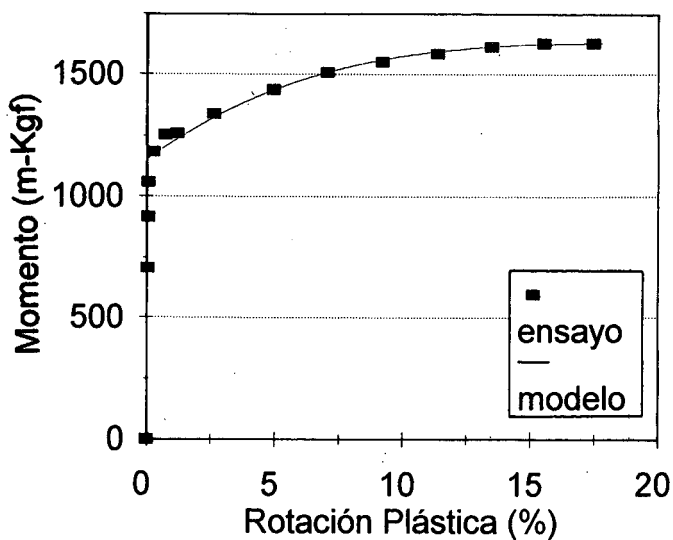


Figura 6 Deformación plástica en función del momento en un modelo de junta viga-columna. Datos del modelo al pie de la Figura 5

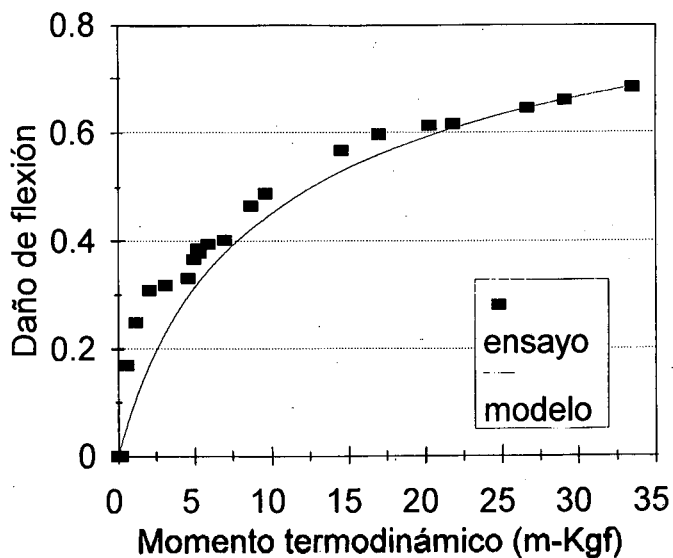


Figura 7 Momento termodinámico en función del daño en una viga simplemente apoyada bajo cargas concentradas. Características de la probeta: $l = 0.7$ m (media probeta), sección transversal = 10×15 cm², refuerzo longitudinal $4 \text{ b} \times 3/8''$, $f_c = 250$ kgf/cm², $f_y = 4\ 200$ kgf/cm². Datos del modelo: $S_o = 145\ 000$ kgf·m, $M_u = 987$ kgf·m, $M_p = 755$ kgf·m, $M_{cr} = 0$, $\phi_u^p = 0.1099$

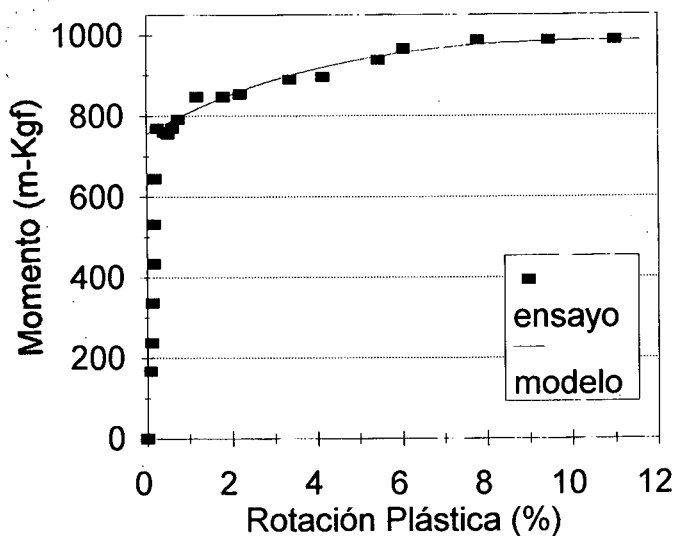


Figura 8 Momento en función de la deformación plástica en una viga simplemente apoyada. Características de la probeta y los datos del modelo al pie de la Figura 7

A partir de estas gráficas y de otros ensayos similares ³ se identifican las funciones de fluencia y daño de la rótula inelástica. Se proponen las siguientes expresiones para estas funciones

$$f = \left| M - \left(\frac{1-d}{4-d} \right) c\phi^p \right| - 4 \left(\frac{1-d}{4-d} \right) M_y; \quad g = G - G_{cr} - q \left(\frac{\ln(1-d)}{1-d} \right) \quad (27)$$

donde c , M_y , G_{cr} y q son constantes que caracterizan al miembro.

Estas funciones fueron halladas por el método de prueba y error con el fin de ajustar lo mejor posible los resultados experimentales.

Puede constatar, que este modelo se reduce al modelo elasto-plástico perfecto cuando el daño permanece constante y si la constante c toma el valor cero. Cuando c es positivo y no hay variación del daño, se obtiene un modelo elasto-plástico con endurecimiento cinemático lineal. En este caso la pendiente de la recta de endurecimiento es proporcional al valor de c . Los términos que dependen del daño en la función de fluencia producen por el contrario un ablandamiento. En otras palabras, un aumento del daño a deformación plástica constante produce una disminución del momento de fluencia y del término de endurecimiento cinemático. En el caso extremo, es decir cuando d toma el valor uno, el momento es igual a cero (rótula completamente degradada). En general, el tamaño de la zona "no plástica" es el resultado de la competencia entre el endurecimiento producido por la deformación plástica y el ablandamiento que es consecuencia del daño.

La función de daño g indica, que para que exista un incremento en el valor de d , el momento termodinámico debe alcanzar el valor crítico G_{cr} más un término de endurecimiento que es una función del daño y proporcional a la constante q .

La comparación entre los resultados experimentales y el modelo puede ser observada en las figuras antes mencionadas.

Las inecuaciones de disipación (19) imponen, que para este modelo el momento y el incremento de deformación plástica deben tener el mismo signo y que el incremento del daño debe ser siempre positivo. Las leyes de evolución del daño y de la plasticidad (22-23) y el hecho de que este modelo es válido para solicitaciones monotónicas permiten escribir

$$\begin{aligned} dd &= \frac{\langle dG \rangle (1-d)^2}{q[\ln(1-d) - 1]} \\ \frac{1-d}{4-d} cd\phi^p M &= dM \cdot M + \frac{3M}{(4-d)^2} (c\phi^p + 4M_y) dd \quad \text{si } M > 0 \quad \text{y} \quad \phi^p > 0 \\ \frac{1-d}{4-d} cd\phi^p M &= dM \cdot M + \frac{3M}{(4-d)^2} (c\phi^p - 4M_y) dd \quad \text{si } M < 0 \quad \text{y} \quad \phi^p < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

donde el símbolo $\langle dG \rangle$ indica la parte positiva de dG .

La primera de las ecuaciones (28) muestra, que el incremento del daño es positivo siempre y cuando la constante q sea negativa. Las dos últimas de las ecuaciones (28) permiten demostrar, que en el caso de una sollicitación monotónica el incremento de la deformación plástica y el momento poseen el mismo signo, si las constantes c y M_y son positivas. De esta manera se prueba, que el modelo propuesto es termodinámicamente admisible bajo las condiciones antes mencionadas.

Los parámetros introducidos en (28) no tienen una significación mecánica bien definida (por ejemplo M_y no corresponde en general con el momento de fluencia). Es preferible por lo tanto calcularlos mediante la resolución del siguiente sistema de cuatro ecuaciones no lineales.

$$\left\{ \begin{array}{lll} M = M_{cr} & \Rightarrow & d = 0 \\ M = M_p & \Rightarrow & \phi^p = 0 \\ M = M_u & \Rightarrow & \frac{dM}{dd} = 0 \\ M = M_u & \Rightarrow & \phi^p = \phi_u^p \end{array} \right. \quad (29)$$

donde M_{cr} es el momento de agrietamiento, M_p el momento de fluencia, M_u el momento último resistente de la sección y ϕ_u^p es la rotación plástica última, es decir la que corresponde al momento último. La resolución numérica de (29) no presenta dificultades particulares. Estos parámetros pueden ser calculados mediante la teoría clásica del concreto armado ¹⁵ o mediante métodos más sofisticados que no serán discutidos en este artículo. Se admitirá que estas constantes pueden ser calculadas con una precisión suficiente cuando se conozcan las características del refuerzo (forma de la sección transversal, distribución del refuerzo, resistencia del concreto etc.). Es evidente, que la exactitud del modelo depende en gran parte de la calidad de los métodos empleados para el cálculo de los métodos empleados para el cálculo de estos parámetros.

En las Figuras 9 y 10 se muestran las curvas fuerza en función del desplazamiento para una junta viga-columna y una viga simplemente apoyada respectivamente. En estas figuras se indican tanto los resultados del modelo como los del ensayo. En las curvas de las Figuras 5 al 10 los coeficientes de rigidez, los momentos de agrietamiento, plástico y último así como la deformación plástica última fueron tomados directamente de los resultados experimentales, lo que explica la excelente concordancia entre modelo y ensayos.

Al calcular las constantes del modelo de la manera propuesta se pone de manifiesto, que los parámetros del modelo, es decir " c , M_y , G_{cr} y q ", dependen de la fuerza axial que actúa sobre el miembro, puesto que M_{cr} , M_p , M_u y ϕ_u^p son funciones de ésta. En general no es difícil calcular estos últimos parámetros cuando se conoce la fuerza axial sobre el miembro. En lo sucesivo se admitirá que la influencia de la carga axial sobre el comportamiento puede ser tomada en cuenta en el modelo de esta manera. Esta hipótesis es probablemente válida para valores moderados de la fuerza axial, es decir cuando ésta es considerablemente menor que la carga axial última de aplastamiento de la sección (ver los resultados del ensayo presentado en la sección siguiente). Sin embargo todavía no se dispone de suficiente evidencia experimental que confirme definitivamente esta hipótesis o que indique sus límites de validez.

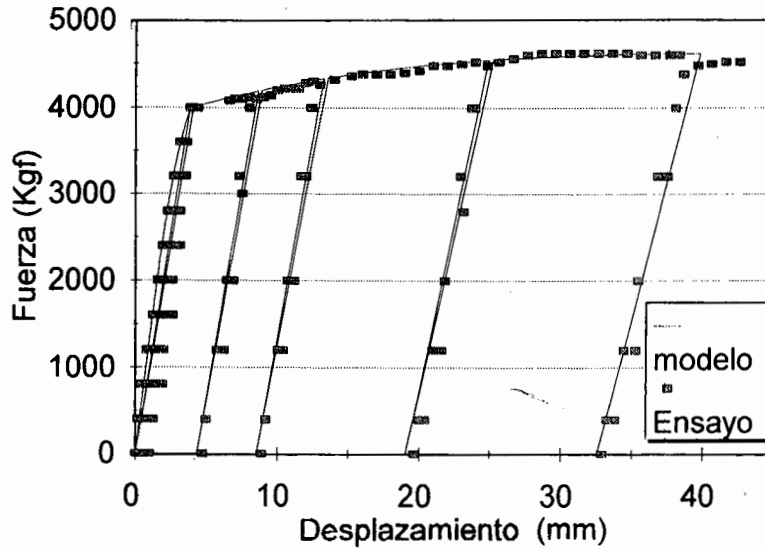


Figura 9 Desplazamiento en función de la fuerza en una junta viga-columna. Características de la probeta: $l = 0.455$ m, sección transversal = 15×15 cm², refuerzo longitudinal $4 \text{ b} \times 3/8''$, $f_c = 250$ kgf/cm², $f_y = 4\ 200$ kgf/cm². Datos del modelo: $S_o = 200\ 000$ kgf·m, $M_u = 1052$ kgf·m, $M_p = 910$ kgf·m, $M_{cr} = 0$, $\phi_u^p = 0.0725$

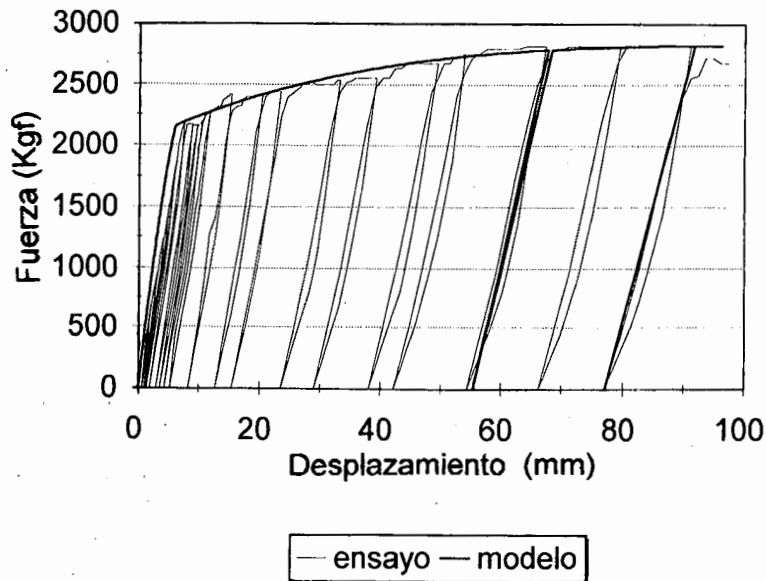


Figura 10 Desplazamiento en función de la fuerza en una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada. Características de la probeta y datos del modelo al pie de la Figura 7

En la teoría de concreto armado clásica se establece una diferencia entre el “agrietamiento de flexión ” y el “agrietamiento de corte”. En este modelo los parámetros de daño $\{D\}$ no están asociados a un tipo particular de deterioro del miembro, sino que por el contrario miden la pérdida global de rigidez debida a cualquier tipo de efecto de degradación que podría incluir hasta el daño del refuerzo. Esta diferencia entre distintos daños podría establecerse en las leyes de evolución del daño aunque esta no fue la vía seguida en el presente artículo. En el caso del modelo propuesto, la ley de evolución puede ser clasificada como “fenomenológica” y en los ensayos realizados para identificarla se presentaron simultáneamente efectos de corte y de flexión. En este sentido puede decirse, que ninguno de estos efectos fue ignorado (a diferencia de la fuerza axial). Sin embargo en el caso del análisis de una estructura real el calculista determinaría los coeficientes M_{cr} , M_p , M_u y ϕ_u^p de los miembros de la estructura empleando un método aproximado particular. En el cálculo de estos parámetros puede no tomarse en cuenta el efecto de corte, en cuyo caso el analista estaría despreciando este efecto. Sin embargo, al igual que en el caso de los efectos axiales el corte también puede incluirse en la determinación de los coeficientes de la sección transversal. Por ejemplo en la referencia 16 se propone un método simplificado que permite determinar un “diagrama de interacción” corte-momento para secciones de cualquier forma y refuerzo.

Durante la sollicitación de la estructura los valores de fuerza axial y del corte actuando sobre el miembro pueden en el caso general variar. Varios algoritmos para tomar en cuenta este hecho pueden ser imaginados, por ejemplo puede realizarse un cálculo elástico previo para estimar la magnitud de estos valores o emplear un método iterativo en el cual los parámetros M_{cr} , M_p , M_u y ϕ_u^p son recalculados en cada iteración. Sin embargo este aspecto del modelo no será discutido en detalle en el presente artículo.

F. ENSAYOS EN JUNTAS DE ESQUINA

Con el objeto de verificar el modelo propuesto se realizan ensayos en juntas de esquina como la esquematizada en la Figura 11. El modelo del ensayo y el tipo de sollicitación, similar al de los ensayos anteriores, se indica en la misma figura. La simulación fue realizada utilizando un programa comercial de cálculo de estructuras por elementos finitos ¹⁷, en el cual se introdujo el nuevo elemento empleando el procedimiento ¹⁸. Durante el proceso resolutivo se tomó en cuenta el acoplamiento daño-plasticidad utilizando un algoritmo similar al empleado en la resolución de problemas de medios continuos con materiales elasto-plásticos multicriterio ¹⁹. La comparación entre los resultados experimentales y la simulación numérica se muestra en la Figura 12.

Para esta simulación los valores de M_{cr} , M_p , M_u y ϕ_u^p también fueron tomados de los resultados experimentales, lo que de nuevo explica la precisión del modelo. Sin embargo, es importante señalar, que ambos miembros están sometidos a fuerzas axiales variables durante el ensayo. Ello no parece afectar la calidad de los resultados con respecto a los ensayos bajo fuerzas axiales nulas como se puede constatar en la Figura 12. Este hecho parece indicar, que el modelo puede ser utilizado en presencia de fuerzas

axiales de moderada magnitud siempre y cuando ello se tome en cuenta en el cálculo de los parámetros del modelo. Sin embargo tal y como se indicó en la sección precedente, se hace necesaria una mayor evidencia experimental para establecer los límites de esta afirmación.

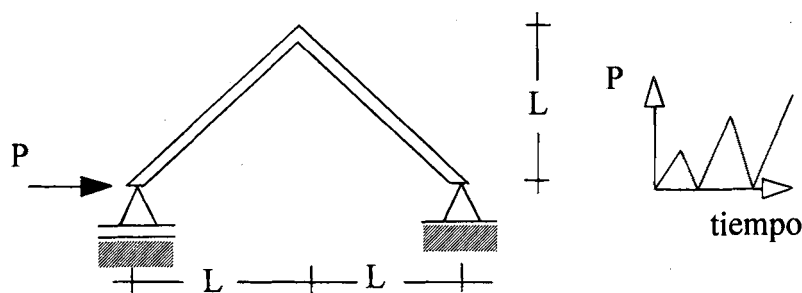


Figura 11 Ensayo en una junta de esquina

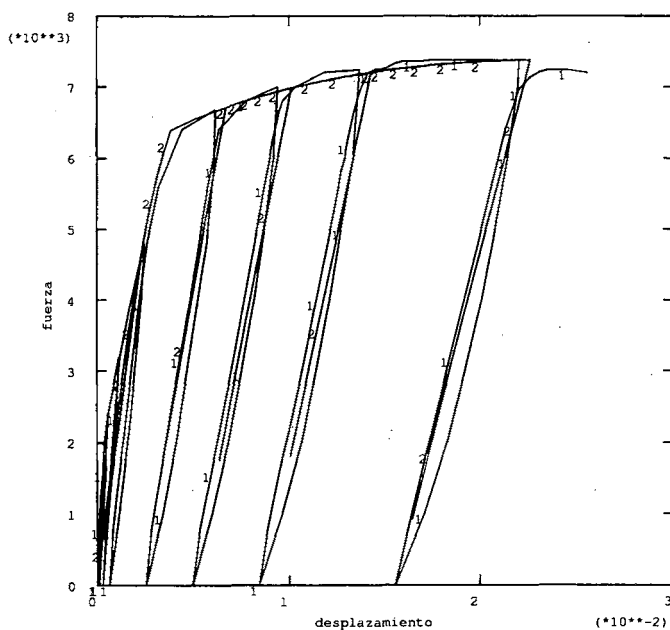


Figura 12 Comparación entre los resultados experimentales y el cálculo numérico: 1- ensayo; 2-simulación numérica. Características de la probeta: $l = 42\text{cm}$, refuerzo $4 \times 3/8"$, sección transversal $= 20 \times 20 \text{ cm}^2$, $f_c = 400\text{kgf/cm}^2$, $f_y = 4\,200 \text{ kgf/cm}^2$. Datos del modelo: $EI = 2.66 \times 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$, $EA \gg EI$, $M_u = 3\,133 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $M_p = 2\,717 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $M_{cr} = 849 \text{ kgf} \cdot \text{m}$, $\phi_u^p = 0.021$

CONCLUSIONES

La introducción de los conceptos de la mecánica de la degradación parece ser una vía prometedora para el análisis de estructuras aporticadas sometidas a sobrecargas intensas. Se describe un marco general y se propone un modelo específico para miembros de concreto armado bajo cargas monotónicas o sin cambio de signo. El modelo da buenos resultados al compararlo con resultados experimentales en juntas viga-columna, vigas simplemente apoyadas y juntas de esquina. El modelo puede ser generalizado al caso de solicitaciones cíclicas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a M. Puglisi y a A. López Inojosa, estudiantes del postgrado en Ingeniería Estructural de la Universidad de Los Andes, por su ayuda en la obtención de estos resultados. Los resultados presentados en este artículo fueron obtenidos en el curso de una investigación financiada por el CDCHT de la Universidad de Los Andes.

REFERENCIAS

1. J. Flórez López, "Análisis de estructuras aporticadas mediante la mecánica de la degradación", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 9, 2, pp. 123-139, (1993).
2. J. Flórez López, "Calcul simplifié de portiques endommageables", *Revue européenne des éléments finis/European Journal of Finite Elements*, Vol. 2, 1, pp. 47-74, (1993).
3. A. Cipollina, "Análisis de elementos estructurales de concreto armado mediante la mecánica de la degradación", Tesis de Magister Scientiae en Ingeniería Estructural, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, (1992).
4. A. Cipollina, R. Febres Cedillo y J. Flórez López, "A Model of Plasticity Coupled to Damage for RC Frames", proceeding of The X World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, (1992).
5. G. Maier, L. De Donato y L. Corradi, "Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Frames by Quadratic Programming. ", *Simp. on Inelasticity and Nonlinearities in Struc. Concr. Univ. of Waterloo, Canada*, (1973).
6. Z.M. Cohn y A. Franchi, "STRUPL: A Computer System for Structural Plasticity", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. 105 (4), pp. 789-804, (1979).
7. M.S.L. Roufaiel y C. Meyer, "Analytical Modeling of Histeretic Behavior of RC Frames", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. 113 (3), pp. 429-443, (1987).
8. S.K. Kunnath, A.M. Reinhorn y Y.J. Park, "Analytical Modeling of Inelastic Seismic Response of RC Structures", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. 116 (4), pp. 996-1017, (1990).
9. S. Rodríguez Gómez y A.S. Cakmak, *Evaluation of Seismic Damage Indices for Reinforced Concrete Structures*, NCEER-90-0022, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, (1990).
10. M. Puglisi y J. Flórez López, *Lumped Damage Models for Oligocyclic Fatigue in RC Frames*, enviado a Localized Damage 94, Udine, Italia, (1994).
11. J. Flórez López, *A Model for Unilateral Damage for RC Frames*, sometido al arbitraje para su publicación en *J. Struc. Div. ASCE*.

12. L.M. Kachanov, "On Creep Rupture Time", *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 8, pp. 26-31, (1958).
13. J. Lemaitre y J.L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Dunod, Paris, (1988).
14. J. Simó y J. Ju, "Strain and Stress Based Continuum Damage Models I. Formulations", *Int. J. Solid Structures*, Vol. 23, 7, pp. 821-840, (1987).
15. R.Park y T. Paulay, "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, (1975).
16. F.J. Vecchio y M.P. Collins, "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory"
17. ABAQUS, "User's Manual", Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (1988).
18. A. López Inojosa y J. Flórez López, "Análisis numérico de modelos simplificados de daño", *Memorias de las 1^o Jornadas Andinas de Ingeniería Estructural y VIII Seminario Latinoamericano de Ingeniería Sismo Resistente*, Mérida, Venezuela, (1993).
19. J.C. Simó, A. Kennedy y S. Govindjee, "Non-smooth Multisurface Plasticity and Viscoelasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms", *Int. Num. Meth. Engng.*, 26, pp. 2161-2185, (1988).