

ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A CARGAS NO LINEALES

*FRANCISCO BELTRAN

y

**MIGUEL CERROLAZA

**Principia S.A.,
c/ Velázquez, 94,
28006 Madrid.*

***Inst. de Materiales y Modelos Estructurales,
Universidad Central de Venezuela,
Apdo. Postal 50361, Sabana Grande,
Caracas 1050-A, Venezuela.*

RESUMEN

Se presenta en este artículo un modelo sencillo de cálculo para el análisis dinámico de estructuras de barras sometidas a cargas no lineales. Este modelo se basa en una generalización del cálculo matricial habitual y en el empleo de un esquema explícito de integración en el tiempo. Se estudia la aplicación del modelo a dos problemas típicos en Ingeniería Civil: el tráfico de vehículos sobre puentes y las oscilaciones de estructuras "offshore" producidas por el oleaje. Finalmente se presentan los resultados obtenidos del análisis con microordenador de tres ejemplos concretos.

SUMMARY

This paper introduces a simple numerical model for the dynamic analysis of framed structures under non-linear force boundary conditions. The model is based upon a generalization of the usual matrix structural analysis and it uses an explicit time integration scheme. The application of this model to both the analysis of bridges under moving loads and to the study of offshore platforms is discussed. Finally, the results of three sample microcomputer analyses are presented.

INTRODUCCION

En las aplicaciones prácticas de la Mecánica Estructural se dan con frecuencia situaciones en las que la naturaleza de las acciones exteriores altera el carácter lineal de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la estructura, aún cuando se pueda considerar que el material permanece en régimen elástico y que tanto los movimientos como las deformaciones del sistema son pequeños. Tal es el caso, por ejemplo, del tráfico de vehículos sobre puentes o de las oscilaciones de una estructura sumergida producidas

Recibido: Diciembre 1988

por el movimiento del fluido. No es admisible que para las acciones de diseño de estas obras se produzcan movimientos grandes o deformaciones irreversibles y, sin embargo, un cálculo riguroso exige aplicar las técnicas del análisis no lineal para la obtención de la respuesta.

Ante situaciones de este tipo el criterio del analista conduce habitualmente a simplificaciones que tienden a linealizar el problema sin que se alteren demasiado los resultados.

En el caso de las estructuras sumergidas la simplificación más corriente conduce a modificar el valor de la fuerza de arrastre hasta hacerlo depender linealmente de la velocidad relativa entre el fluido y la estructura (Brebba et al¹). Esto permite, en general, aplicar las conocidas técnicas del análisis dinámico lineal: superposición modal, análisis en el dominio de la frecuencia....

Cuando se trata de estructuras sometidas al tráfico de vehículos se va todavía más lejos, ya que la práctica tradicional utilizada en el diseño de puentes, y recogida en la normativa española^{2,3}, consiste en analizar la estructura desde el punto de vista estático con la carga situada en los puntos que se consideran más desfavorables. El carácter dinámico del problema se introduce a través de determinados "coeficientes de impacto" que mayoran los efectos de la carga estática. De este modo se supone que las respuestas obtenidas corresponden a los valores máximos de las respuestas reales.

Estos procedimientos simplificados, de indudable valor práctico a nivel de diseño, tienen el inconveniente de que no permiten acercarse mucho al detalle de la conducta estructural bajo las acciones reales. Así, en el caso de puentes, cuando se interpretan los resultados de pruebas de carga dinámicas (Aparicio et al⁴) o cuando se estudian los efectos de la deformabilidad de la estructura sobre la comodidad del viajero (Alvarez et al⁵, Molina et al²¹, Alvarez²²), se hace necesario recurrir a modelos de cálculo más sofisticados que permitan reproducir con más fidelidad el comportamiento estructural real.

El objetivo de este artículo es, precisamente, presentar un modelo sencillo de cálculo para el análisis de estructuras sometidas a este tipo de acciones que alteran la linealidad de las ecuaciones del movimiento. El modelo no exige ninguna simplificación en la formulación de las acciones, y está basado en una generalización del análisis matricial habitual y en el empleo de un esquema explícito de integración en el tiempo.

El campo habitual de aplicación de la integración explícita son los problemas de impacto^{26,27}, donde las altas frecuencias dominan la respuesta y se requieren pasos de integración lo suficientemente pequeños para representarla con precisión (Belytschko⁸). Para otro tipo de problemas, en los que la respuesta estructural sea predominantemente de baja frecuencia, se prefiere generalmente recurrir a esquemas implícitos de integración que sean incondicionalmente estables, a pesar de su complejidad, ya que permiten utilizar pasos de integración considerablemente mayores.

Sin embargo, la simplicidad de los esquemas explícitos, sobre todo en problemas no lineales, hace que sigan siendo una alternativa tentadora. La integración explícita permite resolver las ecuaciones trabajando a nivel local, sin ensamblar las matrices generales de la estructura, y proporciona algoritmos sencillos y muy fáciles de programar. Por otro lado, los escasos recursos de memoria que precisan los programas basados en esta clase de algoritmos, los hacen especialmente adecuados para su uso en

microordenadores.

La metodología presentada en este artículo permite, en el caso de que se aplique al análisis de puentes sometidos a cargas móviles, estudiar de manera totalmente acoplada las oscilaciones de la suspensión de los vehículos y las de la estructura, e introducir de forma muy sencilla y sin apenas simplificaciones la influencia de las irregularidades del pavimento. Cuando se trata de estructuras sumergidas, el método permite introducir las fuerzas de arrastre directamente sin linealizar.

En todos los casos, no hace falta considerar más hipótesis en la discretización de la estructura que las habituales en el análisis matricial (Alarcón et al⁶, Przemieniecki²⁴). En este sentido, se trata de una generalización del método de los elementos componentes²³, que tan buenos resultados ha dado en el estudio de puentes de ferrocarril²¹.

En los apartados que siguen se presenta en primer lugar la discretización espacial empleada para la estructura y las acciones exteriores. Seguidamente se describe el esquema de integración explícita por diferencias centrales y se comentan los requisitos para su estabilidad numérica. Más tarde se estudia la aplicación del modelo al caso del movimiento de vehículos sobre puentes y al análisis de estructuras "offshore". Finalmente se presentan varios ejemplos numéricos y se extraen algunas conclusiones.

DISCRETIZACION ESPACIAL

Estructura

La estructura se discretiza utilizando elementos viga del tipo Euler-Bernoulli, que son los corrientes en el cálculo matricial de estructuras de barras. Centrándose en el caso de pórticos planos (Figura 1), se trata de elementos con seis grados de libertad y en los que se considera desacoplado el comportamiento axial de la viga de su comportamiento a flexión.

El movimiento longitudinal u de los puntos de la viga se aproxima mediante un polinomio de primer grado:

$$u = A + Bx = u_1(1 - \xi) + u_2\xi \quad (1)$$

donde $\xi = \frac{x}{L}$, L es la longitud del elemento y u_1 u_2 son los movimientos longitudinales de los nodos.

El movimiento transversal v de los puntos de la viga se aproxima mediante un polinomio de tercer grado y se hace la hipótesis de que el giro θ de las secciones transversales es la derivada de v con respecto a la coordenada longitudinal x :

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

con ello resulta que:

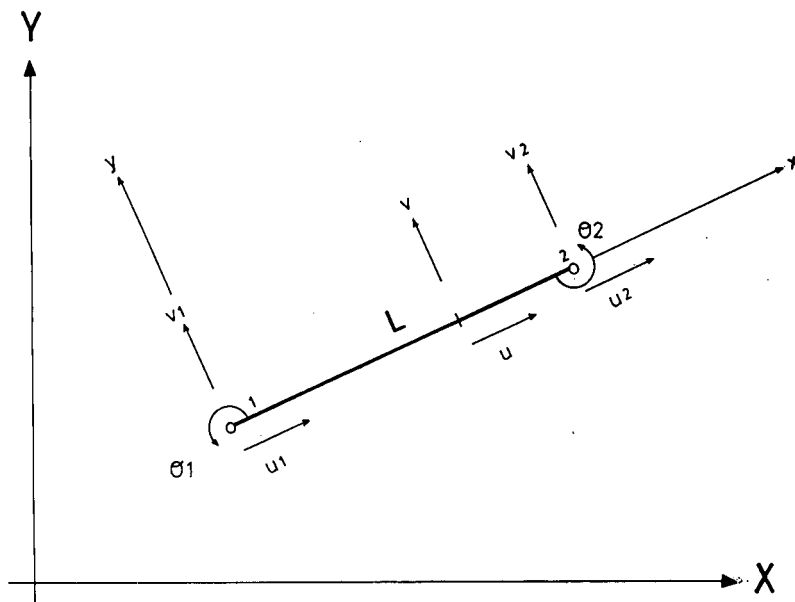


Figura 1. Movimientos de los nodos en ejes locales.

$$\begin{aligned}
 v &= C + D x + E x^2 + F x^3 = \\
 &= v_1 (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \theta_1 L \xi (\xi - 1)^2 + \\
 &+ v_2 (3\xi^2 - 2\xi^3) + \theta_2 L \xi^2 (\xi - 1)
 \end{aligned} \quad (3)$$

donde v_1 v_2 son los movimientos transversales de los nodos y θ_1 θ_2 son los giros de las secciones transversales en los nodos.

A partir de las relaciones (1) y (3), suponiendo que la sección de la barra tiene las mismas características a lo largo de toda su longitud, y haciendo las hipótesis habituales en la teoría elemental de vigas, se obtiene (Alarcón et al⁶) la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}_e$.

La matriz $\mathbf{K}_e$ proporciona las acciones $\mathbf{f}_e$ que el elemento ejerce sobre sus nodos cuando el movimiento de éstos es $\mathbf{u}_e$:

$$\mathbf{f}_e = -\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad (4)$$

En ejes locales (Figuras 1 y 2):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{eL}^t &= - [N_1, V_1, M_1, N_2, V_2, M_2] \\
 \mathbf{u}_{eL}^t &= [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]
 \end{aligned} \quad (5)$$

Se ha supuesto, por otro lado, que la distribución de masa es constante a lo largo de los elementos. Como matriz de masas elemental se ha tomado una matriz diagonal

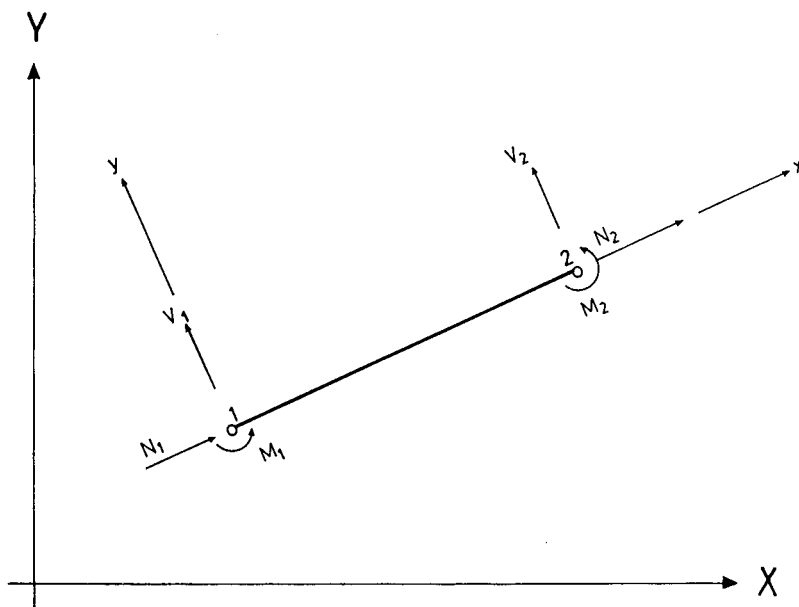


Figura 2. Acciones sobre el elemento en ejes locales.

M_e , que en ejes locales o globales se expresa como:

$$\text{diag}(M_e) = \left[\frac{M}{2}, \frac{M}{2}, \frac{ML^2}{12}, \frac{M}{2}, \frac{M}{2}, \frac{ML^2}{12} \right] \quad (6)$$

donde M es la masa total del elemento y se ha mantenido la numeración de grados de libertad empleada al escribir la matriz de rigidez.

Esta expresión de la matriz considera que el elemento aporta a la masa traslacional de cada uno de sus nodos la mitad de su masa total; y a la masa rotacional, el momento de inercia de la mitad del elemento con respecto al nodo.

La matriz M_e proporciona las fuerzas de inercia i_e que aparecen en los nodos cuando se comunica a éstos una aceleración $\ddot{u}_e$ (Figura 3):

$$i_e = -M_e \ddot{u}_e \quad (7)$$

Los esquemas de integración explícita requieren, para ser eficientes, matrices de masa diagonales.

Para el amortiguamiento estructural se ha empleado la formulación de Rayleigh', de manera que la matriz de amortiguamiento elemental C_e se escribe:

$$C_e = \alpha M_e + \beta k_e \quad (8)$$

donde α y β son dos coeficientes reales.

La matriz C_e proporciona las fuerzas de amortiguamiento a_e que aparecen en los nodos cuando éstos se desplazan con una velocidad $\dot{u}_e$:

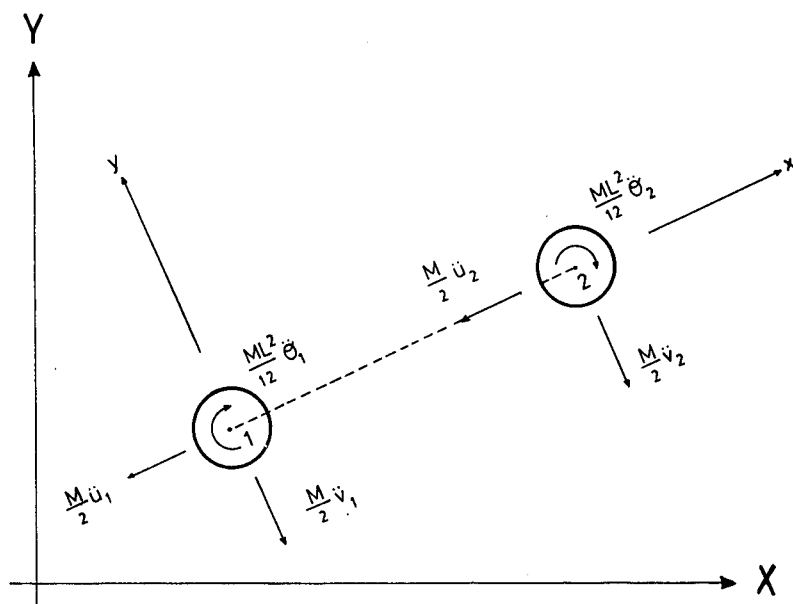


Figura 3. Fuerzas de inercia en ejes locales.

$$\mathbf{a}_e = -\mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad (9)$$

Acciones exteriores

Las acciones exteriores sobre las barras se llevan a los nodos de modo consistente desde el punto de vista energético. Para ello se utilizan las funciones de interpolación que aparecen en las relaciones (1) y (3).

De este modo, si $n(\xi, t)$, $r(\xi, t)$ y $m(\xi, t)$ representan las distribuciones de acciones sobre una barra en ejes locales (Figura 4), las acciones equivalentes sobre nudo se obtienen mediante:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} n(\xi, t) L d\xi \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ R_1 \\ F_{y2} \\ R_2 \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & \frac{1}{L}(6\xi^2 - 6\xi) \\ L\xi(\xi - 1)^2 & (\xi - 1)^2 + 2\xi(\xi - 1) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 & \frac{1}{L}(6\xi - 6\xi^2) \\ L\xi^2(\xi - 1) & 2\xi(\xi - 1) + \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\xi, t) \\ m(\xi, t) \end{bmatrix} L d\xi \quad (11)$$

y el vector de fuerzas exteriores sobre los nodos de la barra se escribe, en ejes locales:

$$\mathbf{p}_{eL}^t(t) = [F_{x1}, F_{y1}, R_1, F_{x2}, F_{y2}, R_2] \quad (12)$$

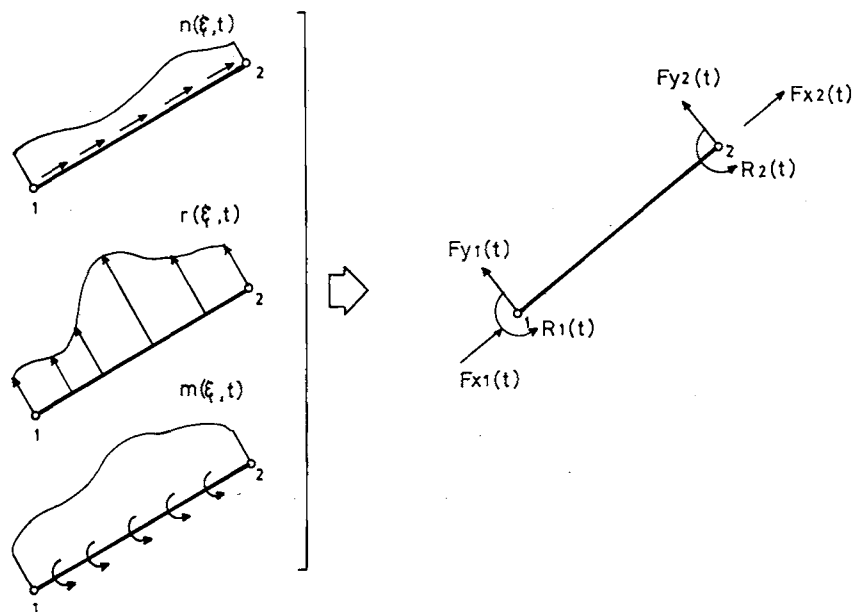


Figura 4. Distribución de acciones sobre elementos.

Ecuaciones discretas

A partir de las relaciones (4), (7), (9) y (12) se pueden plantear las ecuaciones globales del movimiento de la estructura como:

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{a}(t) + \mathbf{i}(t) + \mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad (13)$$

donde,

$\mathbf{f}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_e(t)$ = fuerzas de rigidez sobre los nodos

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{a}_e(t)$ = fuerzas de amortiguamiento

$\mathbf{i}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{i}_e(t)$ = fuerzas de inercia

$\mathbf{p}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}_e(t)$ = fuerzas exteriores

La $\mathbf{\Lambda}$ simboliza el proceso de ensamblaje.

La ecuación (13) puede ser escrita también en la forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (14)$$

donde,

$\mathbf{u}(t)$ = movimientos de los nodos

$\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_e$

$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_e$

$\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_e$

y el punto indica derivada total con respecto al tiempo.

INTEGRACION EN EL TIEMPO

La relación (14) representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la integración en el tiempo de este sistema se utiliza un esquema explícito que desacopla las ecuaciones a nivel local y proporciona así un algoritmo muy sencillo para el ciclo de cálculo.

Integración explícita: ciclo de cálculo

La solución del sistema de ecuaciones se busca para sucesivos instantes de tiempo t_N , $N = 0, 1, 2, \dots$ separados por un intervalo o paso de integración Δt : $t_{N+1} = t_N + \Delta t$.

La integración progresa paso a paso, es decir, en cada ciclo de integración se obtienen los valores de las variables en el instante t_N a partir de los valores de las variables en el instante t_{N-1} , partiendo de las condiciones iniciales del problema.

Si llamamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^N &= \mathbf{u}(t_N) \\ \dot{\mathbf{u}}^{N+1/2} &= \dot{\mathbf{u}}(t_{N+1/2}) \\ \ddot{\mathbf{u}}^N &= \ddot{\mathbf{u}}(t_N) \\ t_{N+1/2} &= t_N + 0.5 \Delta t \end{aligned} \quad \text{etc ...}$$

un esquema de diferencias centrales supone que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^{N+1/2} &= \dot{\mathbf{u}}^{N-1/2} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^N \\ \mathbf{u}^{N+1} &= \mathbf{u}^N + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{N+1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\ddot{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los nodos de la estructura.

Por otro lado, si se plantean las ecuaciones (14) en el instante t_N , puede obtenerse:

$$\ddot{\mathbf{u}}^N = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{p}^N - \mathbf{K} \mathbf{u}^N - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^N) \simeq \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{p}^N - \mathbf{K} \mathbf{u}^N - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^{N-1/2}) \quad (16)$$

donde la simplificación $\dot{\mathbf{u}}^N \simeq \dot{\mathbf{u}}^{N-1/2}$ no introduce distorsiones importantes para los valores habituales del amortiguamiento estructural y para un paso de integración tan pequeño como el necesario para la estabilidad del proceso.

Obsérvese que la relación (16) puede escribirse de acuerdo con (13):

$$\ddot{\mathbf{u}}^N \simeq \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{p}^N + \mathbf{f}^N + \mathbf{a}^{N-1/2})$$

donde las fuerzas $\mathbf{f}^N$ son función exclusivamente de los movimientos $\mathbf{u}^N$ de los nodos a través de las matrices de rigidez elementales $\mathbf{K}_e$, y las fuerzas $\mathbf{a}^{N-1/2}$ son también función exclusiva de las velocidades $\dot{\mathbf{u}}^{N-1/2}$ de los nodos mediante las matrices $\mathbf{C}_e$.

Las fuerzas exteriores $\mathbf{p}^N$ se obtienen a partir de las relaciones (10), (11) y (12), y su formulación puede ser totalmente arbitraria.

Entonces, si $\mathbf{M}$ es diagonal, el vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}^N$ puede obtenerse recorriendo los nodos, calculando la resultante de las acciones sobre cada nodo y dividiendo por la masa correspondiente. Es decir, no hace falta ensamblar las matrices globales (rigidez, masa, ...) de la estructura para obtener las aceleraciones de los nodos en un instante t_N determinado.

Conocido así $\ddot{\mathbf{u}}^N$ a partir de $\mathbf{p}^N$, $\dot{\mathbf{u}}^{N-1/2}$ y $\mathbf{u}^N$, se puede obtener sucesivamente $\dot{\mathbf{u}}^{N+1/2}$ y $\mathbf{u}^{N+1}$ a través de las ecuaciones (15) y así cerrar el ciclo de cálculo. Esta posibilidad de integrar las ecuaciones (14) trabajando a nivel local es la principal ventaja de los esquemas explícitos. El ciclo general podría ser el que se muestra en la Figura 5.

1. Condiciones iniciales
 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}^{1/2} = \dot{\mathbf{u}}(0)$, $N = 0$
2. Actualiza movimientos
 $\mathbf{u}^{N+1} = \mathbf{u}^N + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{N+1/2}$
3. Calcula fuerzas externas $\mathbf{p}^{N+1}$
4. Calcula fuerzas internas $\mathbf{f}^{N+1}$, $\mathbf{a}^{N+1}$
Para cada elemento:
(a) $\mathbf{f}_e^{N+1} = -\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e^{N+1}$
(b) ensambla $\mathbf{f}_e^{N+1}$ en $\mathbf{f}^{N+1}$
(c) $\mathbf{a}_e^{N+1} \simeq -\mathbf{c}_e \mathbf{u}_e^{N+1/2}$
(d) ensambla $\mathbf{a}_e^{N+1}$ en $\mathbf{a}^{N+1}$
5. Actualiza aceleraciones estructura $\ddot{\mathbf{u}}^{N+1} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{p}^{N+1} + \mathbf{f}^{N+1} + \mathbf{a}^{N+1}]$
6. $N \leftarrow N + 1$
7. Actualiza velocidades estructura $\dot{\mathbf{u}}^{N+1/2} = \dot{\mathbf{u}}^{N-1/2} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}^N$
8. Impone las condiciones de contorno esenciales a velocidades
9. Vuelve a 2.

Figura 5. Ciclo general de cálculo.

Estabilidad numérica

El esquema de integración paso a paso expuesto en el apartado anterior es sólo condicionalmente estable. La estabilidad del ciclo general de integración exige que (Belytschko⁸):

$$\Delta t \leq \frac{2}{w_{\max}} (\sqrt{1 + \xi^2} - \xi)$$

donde $w_{\max}$ es la máxima frecuencia natural del modelo con que hemos representado la estructura, y ξ es la fracción del amortiguamiento crítico para esa frecuencia. Es decir,

$$w_{\max}^2 = \lambda_{\max}$$

donde $\lambda_{\max}$ es el máximo autovalor del problema:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (17)$$

En general resulta engorroso determinar el paso de integración máximo admisible resolviendo el problema de autovalores (17), donde intervienen las matrices globales de la estructura. Sin embargo, el máximo autovalor de (17) está acotado superiormente por el máximo autovalor de los elementos que componen la estructura (Belytschko⁸), esto es:

$$\lambda_{\max} \leq \max_e \{\lambda_{\max}^e\}$$

donde $\lambda_{\max}$ es el máximo autovalor del problema:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \lambda^e \mathbf{M}_e \mathbf{u}_e$$

Para el elemento barra que se está empleando los autovalores no nulos resultan ser:

$$\begin{aligned} \lambda_1^e &= \frac{4E}{\rho L^2} & \longrightarrow & \omega_1^e = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \lambda_2^e &= \frac{48EI}{\rho AL^4} & \longrightarrow & \omega_2^e = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{12EI}{\rho AL^2}} \\ \lambda_3^e &= \frac{192EI}{\rho AL^4} & \longrightarrow & \omega_3^e = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{48EI}{\rho AL^2}} \end{aligned}$$

donde ρ es la densidad del material, E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia de la sección y A es el área de la sección.

Como $\lambda_2^e < \lambda_3^e$, resulta que $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1^e, \lambda_3^e\}$ y, por tanto, para la estabilidad del ciclo bastará que, para todo elemento e se cumpla;

$$\Delta t \leq \min\left\{\frac{2}{\omega_1^e}(\sqrt{1 + \xi_1^2} - \xi_1), \frac{2}{\omega_3^e}(\sqrt{1 + \xi_3^2} - \xi_3)\right\} \quad (18)$$

Nótese que los elementos cortos o con relación A/I pequeña son los que penalizan el paso de integración.

APLICACIONES

La particularización del modelo descrito a una aplicación concreta se consigue introduciendo las acciones exteriores correspondientes. Estas acciones pueden formularse en función de los movimientos, velocidades o aceleraciones de la estructura sin ninguna limitación, ya que en cada instante de tiempo se dispone de todos los parámetros del movimiento del sistema para el cálculo del valor de las mismas.

En el presente trabajo se han estudiado dos aplicaciones de relevancia práctica en el campo de la Ingeniería Civil: el tráfico de vehículos sobre puentes y las oscilaciones de estructuras "offshore" producidas por el oleaje. La adaptación del modelo a otro tipo de acción seguiría pasos análogos a los que se describen en los párrafos siguientes, y no representa ningún problema conceptual adicional salvo el que pudiera introducir la propia definición del sistema de sollicitaciones.

Movimiento de vehículos sobre puentes

Cuando un vehículo atraviesa un puente se produce una interacción entre las oscilaciones debidas a su suspensión y las oscilaciones del propio puente^{5,21,22}. La acción resultante sobre el tablero es producto de esta interacción y puede obtenerse fácilmente en cada instante de tiempo si se integran simultáneamente las ecuaciones de la vibración del vehículo y las del movimiento del puente.

Así, de forma simplificada, una rueda o eje del móvil puede modelarse como un oscilador simple que se desplaza a velocidad c sobre los elementos de la estructura (Figura 6). Un vehículo completo podría modelarse utilizando varios de estos osciladores simples o, de forma más precisa, utilizando un único sólido rígido soportado por varios resortes²². Por razones de simplicidad, en nuestra exposición se utilizará el modelo representado en la Figura 6.

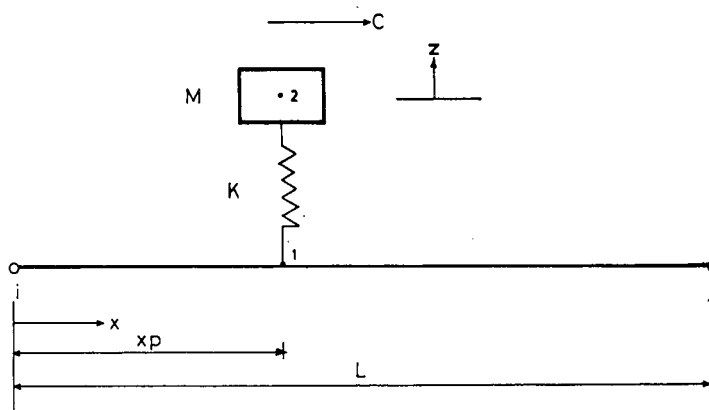


Figura 6. Modelo para una carga móvil.

El movimiento del nodo 1 (Figura 6) se considera igual en cada instante al del punto del elemento ij sobre el que se encuentra más un valor δ que puede representar la rugosidad del pavimento. Se calcula entonces este movimiento a partir del de los

nodos i, j (a través de las relaciones (1) y (3)) y utilizando el valor de δ correspondiente al punto sobre el que se encuentre el vehículo.

En el caso corriente de que el móvil se desplace en dirección horizontal (Figura 6) se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 &= v_i (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \theta_i L \xi (\xi - 1)^2 + v_j (3\xi^2 - 2\xi^3) + \theta_j L \xi^2 (\xi - 1) + \delta \\ &= v_i \psi_1 + \theta_i \psi_2 + v_j \psi_3 + \theta_j \psi_4 + \delta \end{aligned} \quad (19)$$

donde z_1 es el desplazamiento vertical del nodo 1, $v_i, v_j, \theta_i, \theta_j$ son los desplazamientos verticales y giros de los nodos i, j , δ es el valor de la rugosidad y $\xi = \frac{x_p}{L}$.

Si suponemos que el resorte oscila alrededor de la posición de equilibrio correspondiente al peso de la masa M , la fuerza P que se ejerce sobre el elemento ij se puede poner como:

$$P = Mg + (z_2 - z_1) K \quad (20)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

En cuanto al movimiento de oscilación de la suspensión, éste viene gobernado por la ecuación:

$$(z_1 - z_2) K + M \ddot{z}_2 = 0 \quad (21)$$

donde z_1 y z_2 representan el desplazamiento de los nodos 1 y 2 (Figura 6).

La integración de la ecuación (21) se puede realizar de manera explícita dentro del ciclo general a la hora de determinar las acciones sobre la estructura. El ciclo de integración se representa en la Figura 7 y exige para su estabilidad que:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{M}{K}}$$

Las operaciones representadas en la Figura 7 permiten obtener la fuerza P sobre la estructura que se deriva en cada instante de la interacción entre las oscilaciones del puente y las de la suspensión del móvil. Esta fuerza P se lleva a los nodos del modelo estructural según el procedimiento general ya expuesto en los párrafos anteriores.

Respuesta estructural de plataformas "offshore"

El diseño y construcción de plataformas para extracción de petróleo es, quizá, una de las áreas de la ingeniería actual que requiere de las más avanzadas tecnologías. Uno de los tipos de plataforma "offshore" más utilizado consiste en una armadura tridimensional de miembros tubulares de acero soldados entre sí. En la parte superior se disponen los equipos necesarios para la operación de la plataforma así como los servicios requeridos por el personal, mientras que la parte inferior llega hasta el lecho marino, donde se fija a través de pilotes de acero que se hincan a gran profundidad.

Dado el tamaño de estas estructuras y el gran diámetro de sus miembros, se comprende que la evaluación de las fuerzas hidrodinámicas derivadas del oleaje marino

- Condiciones iniciales: en cada móvil
 $Z_2(0) = Z_2(0)$, $\dot{Z}_2^{1/2} = \dot{Z}_2(0)$, $N = 0$

- Cálculo de p^{N+1} en cada ciclo

Para cada móvil

(a) determina posición.

(b) $Z_1^{N+1} = V_i \Psi_1 + \theta_i \Psi_2 + V_j \Psi_3 + \theta_j \Psi_4$

(c) $Z_2^{N+1} = Z_2^N + \Delta t \dot{Z}_2^{N+1/2}$

(d) $\ddot{Z}_2^{N+1} = -\frac{1}{M} K (Z_2^{N+1} - Z_1^{N+1})$

(e) $\dot{Z}_2^{N+3/2} = \dot{Z}_2^{N+1/2} + \Delta t \ddot{Z}_2^{N+1}$

(f) $P^{N+1} = M (g - \ddot{Z}_2^{N+1})$

(g) Se obtienen los valores nodales correspondientes a P^{N+1} y se ensamblan en p^{N+1} .

Figura 7. Ciclo de integración para la oscilación de los móviles.

en situaciones críticas de tormenta reviste la mayor importancia si se desea obtener diseños confiables. Básicamente, es necesario disponer de: (a) una teoría que caracterice el estado del mar, es decir, que describa el movimiento del fluido y (b) una formulación apropiada que permita transformar el movimiento del fluido en fuerzas hidrodinámicas aplicadas sobre los elementos estructurales.

En lo que sigue se describirán brevemente algunas de las teorías más usuales para evaluar la interacción fluido-estructura en el contexto que nos ocupa.

Cinemática de la partícula de agua

Para el modelado determinista y bidimensional de los estados del mar existen varias teorías de onda (Sarpkaya et al¹¹, Dean¹²). Una de las más simples y utilizadas en la práctica es la teoría lineal de Airy. Dado que la derivación de su formulación está bien documentada en la literatura técnica, nos limitaremos aquí a hacer un breve recuento de las ecuaciones correspondientes.

La función ϕ potencial de velocidades es dependiente de la posición (x, y) de la partícula en el seno del fluido y del instante t en consideración, según recoge la expresión siguiente:

$$\phi(x, y, t) = \frac{Ag}{\omega} \frac{\cosh\{K(y+d)\}}{\sinh(Kd)} \sin(Kx - \omega t) \quad (22)$$

donde

A = amplitud de la onda

g = aceleración de la gravedad

ω = frecuencia de la onda (rad/seg)

K = número de onda

d = altura de la lámina de agua

La Figura 8 ilustra los parámetros antes descritos. El número K puede ser

determinado a partir de la relación no lineal:

$$\omega^2 = Kg \tanh(Kd) \quad (23)$$

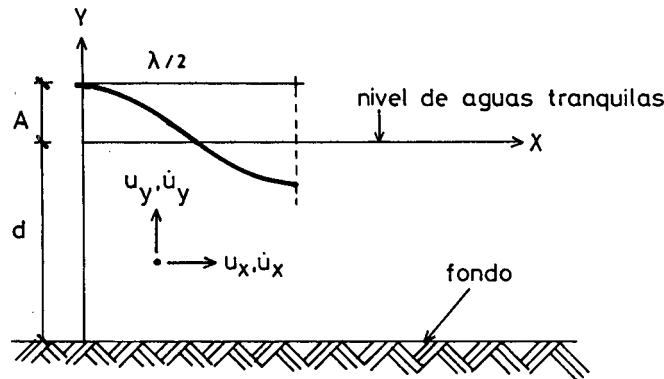


Figura 8. Caracterización del oleaje: teoría lineal de Airy.

Si d es suficientemente grande entonces $\tanh(Kd) \rightarrow 1$ y se puede escribir una expresión simplificada para el cálculo de K :

$$K \simeq \frac{\omega^2}{g} \quad (24)$$

Por otro lado, la longitud de onda λ puede ser calculada mediante la relación:

$$\frac{2\pi}{T^2} = \frac{g}{\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \quad (25)$$

donde T es el período de la onda. Otra vez aquí, si d es grande, puede escribirse:

$$\lambda \simeq \frac{T^2 g}{2\pi} \quad (26)$$

Derivando (22) con respecto a la posición se obtienen los campos de velocidades en el fluido:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{KA g}{\omega} \frac{\cosh\{K(y+d)\}}{\sinh(Kd)} \cos(Kx - \omega t) \\ u_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{KA g}{\omega} \frac{\sinh\{K(y+d)\}}{\sinh(Kd)} \sin(Kx - \omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

Si ahora se derivan las ecuaciones (27) con respecto al tiempo, se obtienen los campos de aceleraciones del fluido:

$$\begin{aligned}\dot{u}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = K A g \frac{\cosh\{K(y+d)\}}{\sinh(Kd)} \sin(Kx - \omega t) \\ \dot{u}_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -K A g \frac{\sinh\{K(y+d)\}}{\sinh(Kd)} \cos(Kx - \omega t)\end{aligned}\quad (28)$$

La teoría lineal de Airy resulta conveniente para la formulación del problema dado su carácter lineal y su sencillez. Es bueno destacar aquí que los cálculos de velocidades y aceleraciones en cada instante t se efectúan de una forma expedita, simplemente evaluando una expresión algebraica. Teorías no lineales —por ejemplo Stokes de quinto orden (Dean¹², Cerrolaza¹⁶)— requerirían de cálculos más complejos, traduciéndose ésto en un gran esfuerzo computacional. Por otro lado, la teoría lineal de Airy presenta un rango adecuado de aplicabilidad para diversos parámetros oceanográficos, como lo sugiere el estudio de Dean¹².

Fuerzas hidrodinámicas sobre elementos estructurales

Cuando el elemento estructural no perturba significativamente la propagación de la onda incidente, es posible utilizar la ecuación de Morison (Morison et al¹³) para el cálculo de fuerzas hidrodinámicas sobre cilindros esbeltos. Tal es el caso de la gran mayoría de las plataformas de acero, donde los elementos estructurales usualmente no superan diámetros de dos metros, frente a longitudes de onda que son generalmente mayores de cien metros para las olas de diseño.

La ecuación de Morison es una fórmula de tipo semiempírico, propuesta especialmente para cilindros rígidos verticales, cuya formulación puede establecerse así:

$$F = C_D \rho \frac{D}{2} |u|u + (C_M - 1) \rho \pi \frac{D^2}{4} \dot{u} + \rho \pi \frac{D^2}{4} \ddot{u} \quad (29)$$

donde

F = fuerza hidrodinámica por unidad de longitud

u = velocidad del fluido

$\dot{u}$ = aceleración del fluido

ρ = densidad del fluido

D = diámetro del cilindro

C_D, C_M = coeficientes de arrastre e inercia respectivamente.

Nótese que la componente de arrastre varía no linealmente con la velocidad del fluido, lo que obliga generalmente a la utilización de procedimientos especiales (Brebbia et al¹) si se quieren emplear las técnicas habituales del análisis dinámico lineal.

En la realidad los elementos estructurales son miembros flexibles que experimentan movimiento al entrar en contacto con el fluido. La fórmula de Morison, en consecuencia, ha sido modificada a fin de tomar en cuenta el movimiento de los miembros. Este acoplamiento fluido-estructura puede ser modelado mediante el método de la velocidad relativa¹⁴, el cual supone que la velocidad efectiva en la ecuación (29)

corresponde a la diferencia entre la velocidad del fluido u y la velocidad estructural $\dot{x}$. Asimismo, se acepta que la aceleración efectiva de (29) es la diferencia entre la aceleración del fluido $\dot{u}$ y la aceleración estructural $\ddot{x}$. De este modo, sustituyendo u por $u - \dot{x}$ y $\dot{u}$ por $\dot{u} - \ddot{x}$, se tiene:

$$F = C_D \rho \frac{D}{2} |u - \dot{x}|(u - \dot{x}) + (C_M - 1) \rho \pi \frac{D^2}{4} (\dot{u} - \ddot{x}) + \rho \pi \frac{D^2}{4} \dot{u} \quad (30)$$

Nótese que la sustitución de $\dot{u}$ por $\dot{u} - \ddot{x}$ no se efectuó en la tercera componente de (29). Esto se debe al hecho de que el término $\rho \pi \frac{D^2}{4} \dot{u}$ es producido por la variación de las aceleraciones del fluido o, en otras palabras, por la distorsión de las líneas de corriente del fluido y se considera que este efecto es independiente de la aceleración estructural.

Reorganizando (30) se obtiene:

$$F = C_D \rho \frac{D}{2} |u - \dot{x}|(u - \dot{x}) + C_M \rho \pi \frac{D^2}{4} \dot{u} - (C_M - 1) \rho \pi \frac{D^2}{4} \ddot{x} \quad (31)$$

Los coeficientes de arrastre y de inercia (C_D y C_M respectivamente) dependen del número de Reynolds, del número de Keulegan-Carpenter y de la rugosidad del miembro.

Otro aspecto digno de mención es la manera de proceder cuando el miembro estructural está inclinado con respecto al plano incidente de la onda. La fórmula de Morison (29) fue deducida en forma semiempírica mediante ensayos de campo y de laboratorio sobre elementos estructurales verticales sometidos a un desplazamiento horizontal de la onda incidente. En la literatura pertinente (Wade et al¹⁵, Cerrolaza¹⁶ y Ferrante et al¹⁷) se pueden encontrar al menos cinco técnicas diferentes para proceder en estos casos. En este trabajo se ha optado por trabajar con la técnica propuesta por Borgman¹⁸, la cual considera que sólo producen fuerzas las velocidades y aceleraciones normales al elemento estructural, despreciándose las componentes tangenciales (Figura 9a). Esta técnica ha demostrado producir unos resultados aceptables y que concuerdan razonablemente bien, dentro de la incertidumbre inherente a procesos de esta naturaleza, con los experimentos (Chakrabarti et al¹⁹, Kim et al²⁰).

Así pues, disponiendo de una teoría que describa la cinemática de la partícula de fluido y de una formulación capaz de evaluar las fuerzas ejercidas por el movimiento del mismo, es posible determinar las acciones sobre un elemento estructural en todos aquellos puntos que se precise. Para el presente trabajo dichas fuerzas se calculan en los extremos y punto medio de los elementos que modelan los miembros estructurales, con lo cual la distribución de fuerzas queda caracterizada por un polinomio de segundo orden (Figura 9b). A continuación, las distribuciones de cargas así obtenidas son transformadas en fuerzas equivalentes nodales mediante el procedimiento ya descrito en párrafos anteriores.

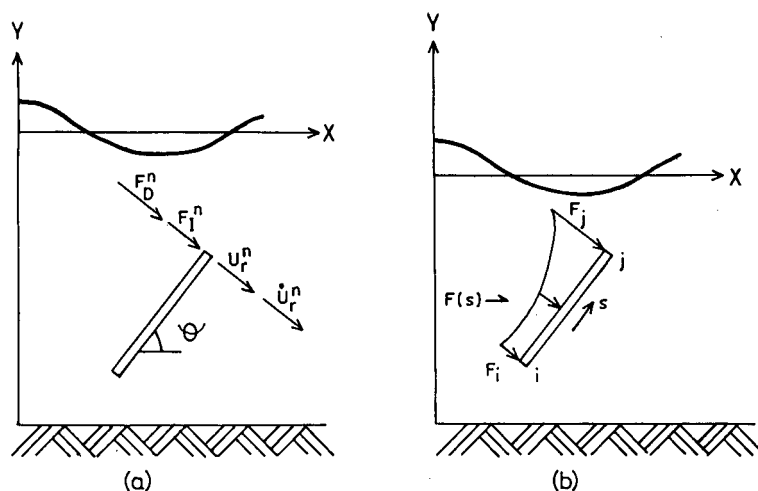


Figura 9. Carga hidrodinámica sobre el elemento inclinado.

F_D = fuerza de arrastre

F_I = fuerza de inercia

u_r = velocidad relativa

$\dot{u}_r$ = aceleración relativa.

EJEMPLOS NUMERICOS

Para mostrar la efectividad del modelo de cálculo presentado en los apartados anteriores se ha desarrollado un programa de ordenador basado en las ideas expuestas. El programa se ha escrito en lenguaje FORTRAN 77 y funciona en un ordenador personal compatible con coprocesador matemático.

De los casos analizados con este programa se han seleccionado tres. El primero de ellos es un ejemplo sencillo para el que la solución analítica es conocida; se ha escogido este caso con objeto de comprobar la precisión del esquema de cálculo. El segundo ejemplo se aproxima a un caso real de puente atravesado por un convoy ferroviario, mientras que en el tercer ejemplo se intenta representar una plataforma "offshore" sometida a la acción del oleaje. Con estos dos últimos ejemplos se pretende poner de manifiesto las posibilidades del método en el análisis de estructuras reales.

Los tiempos de ejecución del programa no superan la media hora en los dos primeros ejemplos, mientras que en el tercer ejemplo se empleó una hora y media aproximadamente.

Ejemplo 1: Vehículo sobre puente de hormigón

El ejemplo 1 se ha tomado de Inbanathan et al⁹. Se trata de un puente de hormigón simplemente apoyado de 50 metros de luz con sección en cajón. Las características del material y de la sección se dan en la Figura 10. No se considera amortiguamiento estructural. El puente es atravesado por una carga de 500 kN que se desplaza a una velocidad constante de 26.82 m/seg.

La estructura se ha modelado como una viga biapoyada y se han utilizado para ello cuarenta elementos. Para conseguir el efecto de una fuerza constante sobre la viga,

al móvil se le ha asignado una masa de 50000 kg y una rigidez baja (5 kN/m), de modo que su frecuencia propia de oscilación sea mucho menor que la principal del puente.

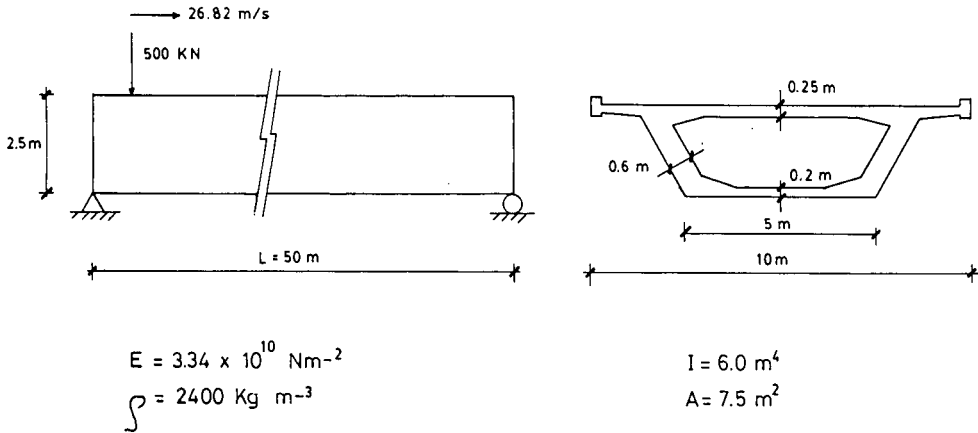


Figura 10. Características de la estructura.

En la Figura 11 se muestran los resultados obtenidos para la flecha en el centro del vano. Si se compara esta solución con la obtenida analíticamente por Timoshenko¹⁰ utilizando los tres primeros modos de vibración de la viga, se encuentra que son indistinguibles a la escala del dibujo.

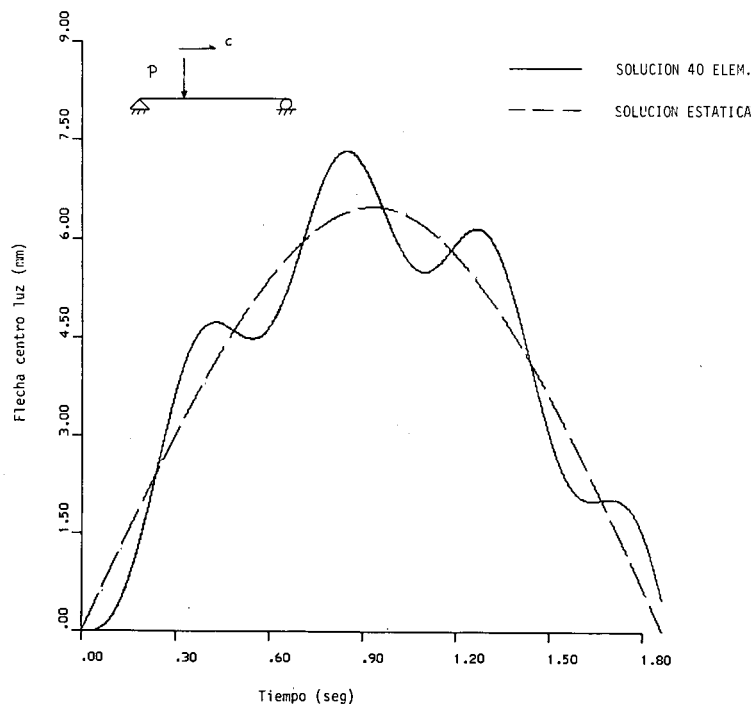


Figura 11. Ejemplo 1. Historia de la flecha en el centro del vano.

Ejemplo 2: Convoy ferroviario sobre puente de celosía

En este ejemplo se analiza la estructura representada en la Figura 12. Se trata de una de las vigas principales de un puente metálico con tres vanos de 35, 21 y 35 m. Las propiedades del material y las características de las barras se dan en la Tabla I. Se considera un amortiguamiento estructural mínimo del 2% del crítico a 5 Hz.

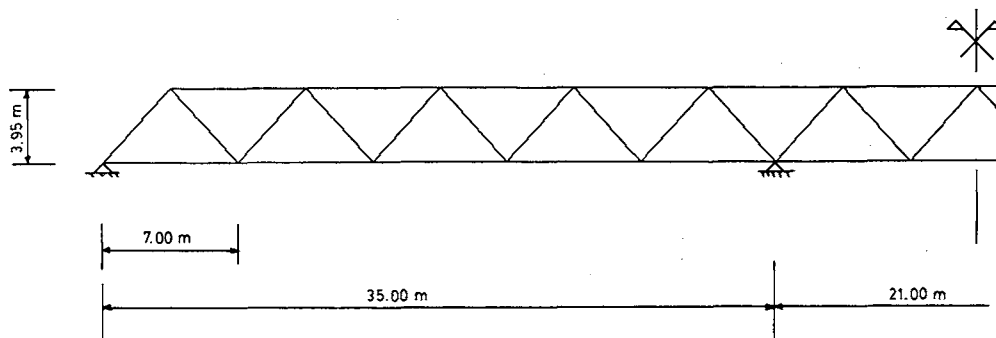


Figura 12. Ejemplo 2. Geometría de la estructura.

$E = 210 \text{ GPa}$ $\rho = 7500 \text{ kg m}^{-3}$		
	Area (10^{-4} m^2)	Inercia (10^{-4} m^4)
Cordón inferior	385.4	11.6484
Cordón superior y diagonales en apoyos extremos	156.6	2.0568
Diagonales en apoyos interiores	193.9	0.8563
Resto diagonales	149.1	0.8563

Tabla I. Ejemplo 2. Características de las barras.

Sobre el cordón inferior de la estructura se hace pasar el tren de cargas representado en la Figura 13, que corresponde a un convoy formado por una locomotora y cuatro vagones que se desplazan a una velocidad de 16.67 m/seg.

En la Figura 14 se puede ver la mitad del modelo empleado para la estructura. Se han utilizado 53 nodos y 77 elementos barra. En los nodos del cordón inferior se ha

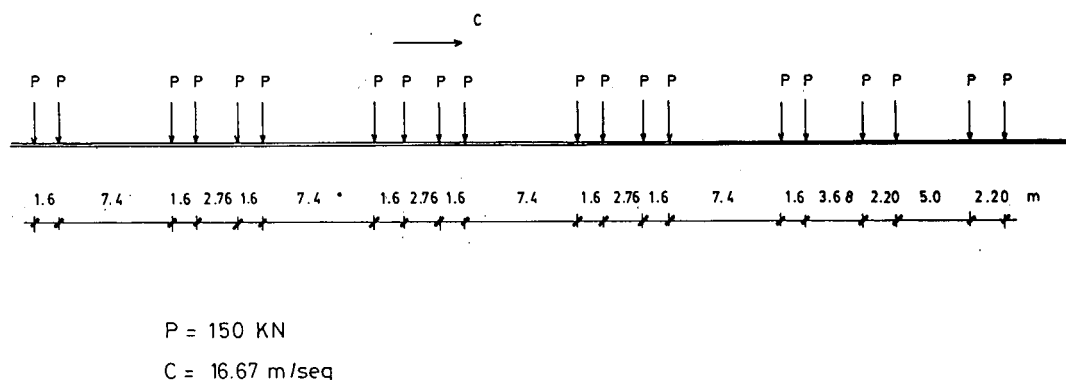


Figura 13. Ejemplo 2. Tren de cargas.

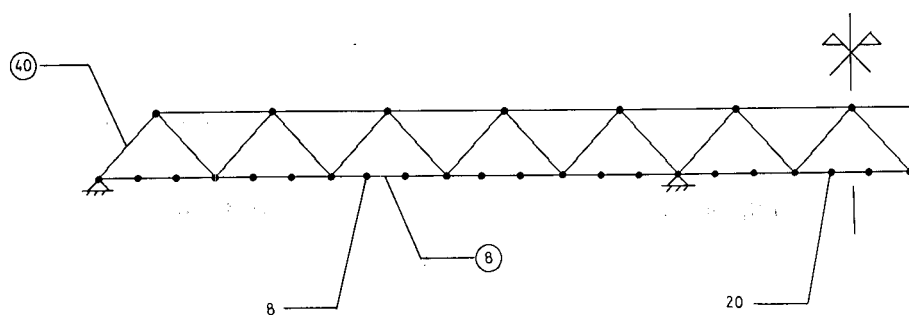


Figura 14. Ejemplo 2. Vista del modelo.

colocado, además de la masa correspondiente a las barras, una masa muerta de 4200 kg por nodo para tener en cuenta la presencia del tablero, balasto y vía.

Las cargas móviles se suponen de idénticas características con una masa de 15000 kg y una rigidez de 270 kN m^{-1} .

En las Figuras 15 y 16 se presentan los resultados obtenidos para la flecha de los nodos 8 y 20, que corresponden a nodos aproximadamente centrados en el primer vano y en el vano central respectivamente. Se observa el efecto de la deformación general de la estructura superpuesto al de la deformación local del cordón inferior. Esta última cambia de sentido según esté recibiendo las cargas un módulo de 7 m o sus módulos contiguos.

Las Figuras 17 y 18 muestran los resultados obtenidos para los esfuerzos axiales en las barras 8 (centro primer vano) y 40 (primer apoyo). Puede verse fácilmente que el esfuerzo crece cuando el tren se adentra en el primer vano, se alcanza luego un valor más o menos estable al igualarse las cargas que entran y salen del vano y finalmente decrece el esfuerzo al salir el tren del vano.

Por último, el momento flector en el extremo izquierdo de la barra 8, que está situada en el centro del primer vano, se representa en la Figura 19. Se observan aquí los cambios de signo en el esfuerzo debidos de nuevo a la modulación introducida tanto por el cordón inferior de la estructura como por el tren de cargas.

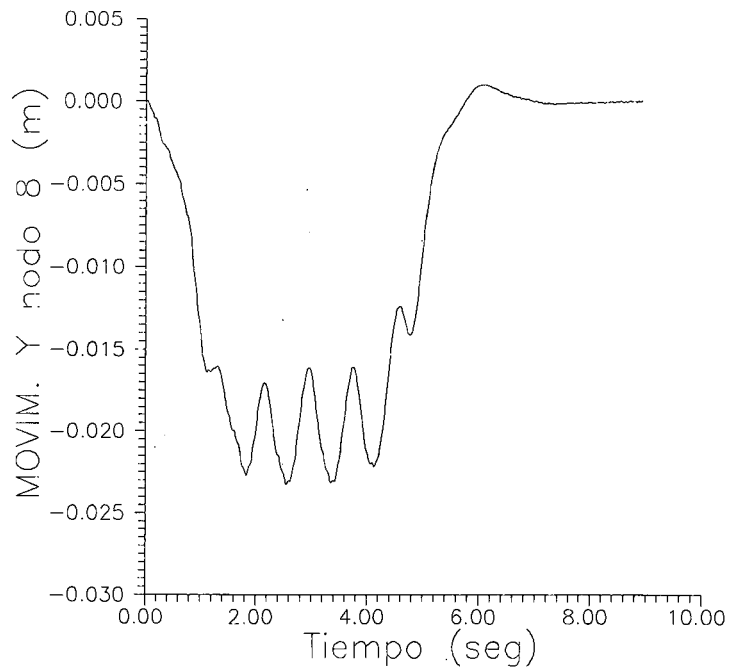


Figura 15. Ejemplo 2. Historia de la flecha en el centro del primer vano.

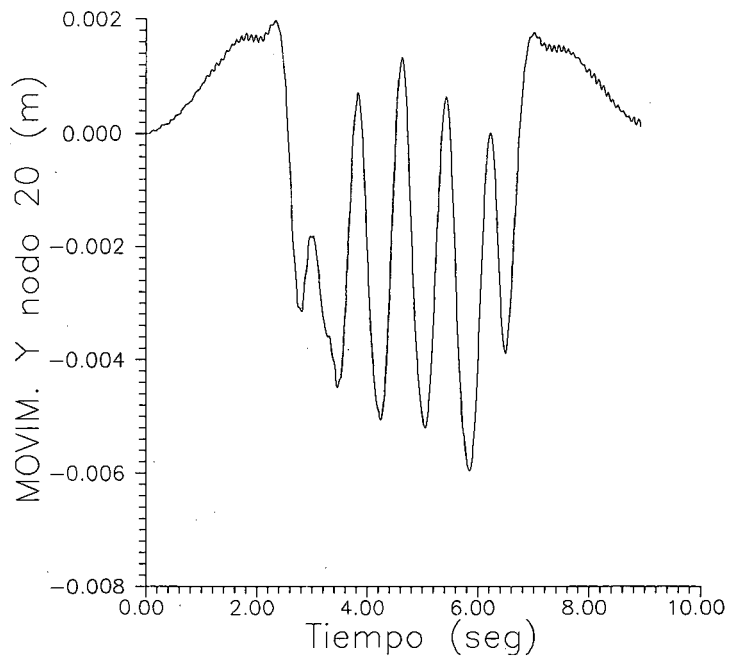


Figura 16. Ejemplo 2. Historia de la flecha en el centro del vano intermedio.

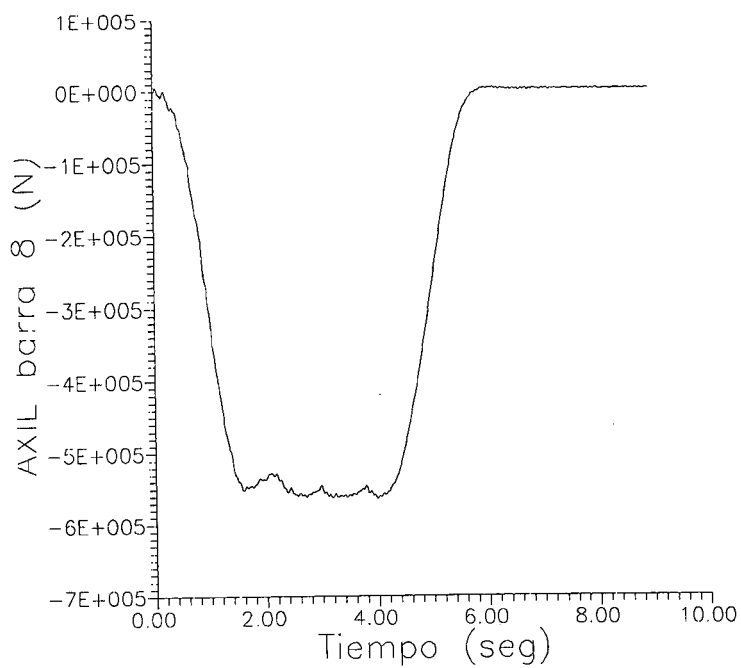


Figura 17. Ejemplo 2. Historia del axil en la barra 8.

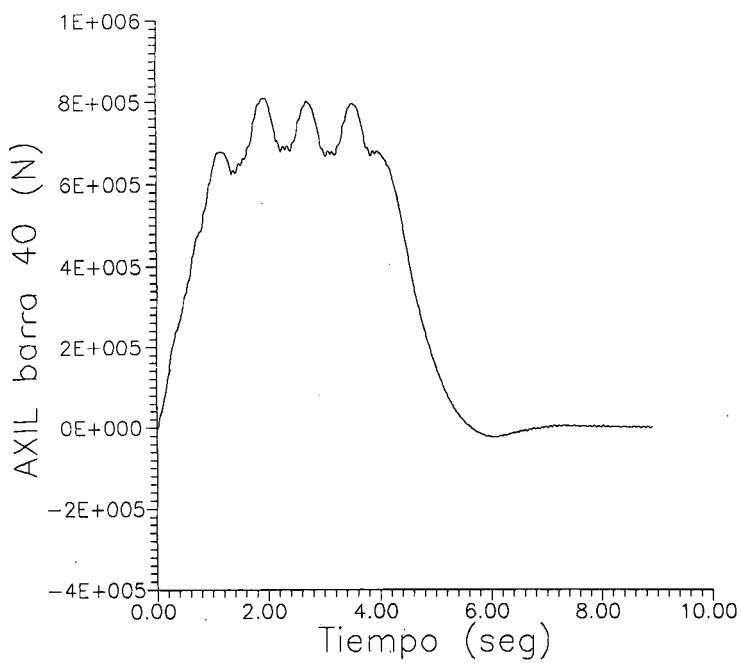


Figura 18. Ejemplo 2. Historia del axil en la barra 40.

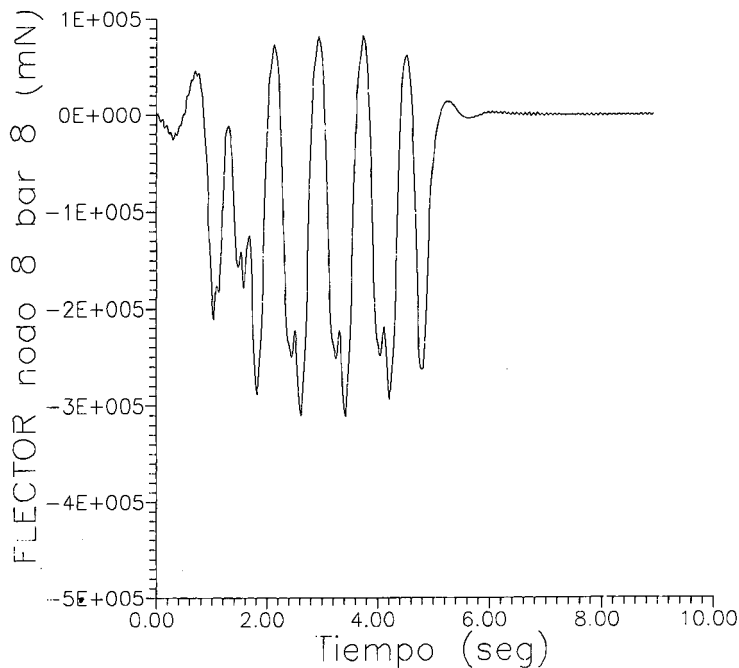


Figura 19. Historia del momento flector en el centro del primer vano.

Ejemplo 3: Plataforma “offshore” sometida a cargas de oleaje.

Se analiza el comportamiento dinámico de un modelo bidimensional simplificado de una estructura offshore real¹⁶. La Figura 20 ilustra el modelo adoptado con sus respectivas dimensiones. Sobre él actúan las mismas cargas que se esperan sobre una plataforma real. La estructura se discretiza con 37 elementos barra y 22 nodos. Las barras empleadas son de sección tubular y sus características geométricas se especifican en la Tabla II.

Sección Num.	Diámetro (mts)	Espesor (mts)	Barras
1	0.85	0.0250	3,6,9,12,15,18,21,24,26,27
2	0.60	0.0125	Todas las demás

Tabla II. Características geométricas de las secciones.

El material empleado es acero: módulo de Young = 210 GPa; coeficiente de Poisson = 0.3 y densidad = 7500 kg/m³. El amortiguamiento estructural mínimo se ha definido como el correspondiente a una fracción del amortiguamiento crítico igual al 3% a 5 Hz. Se ha supuesto que los equipos operacionales sobre la parte superior de

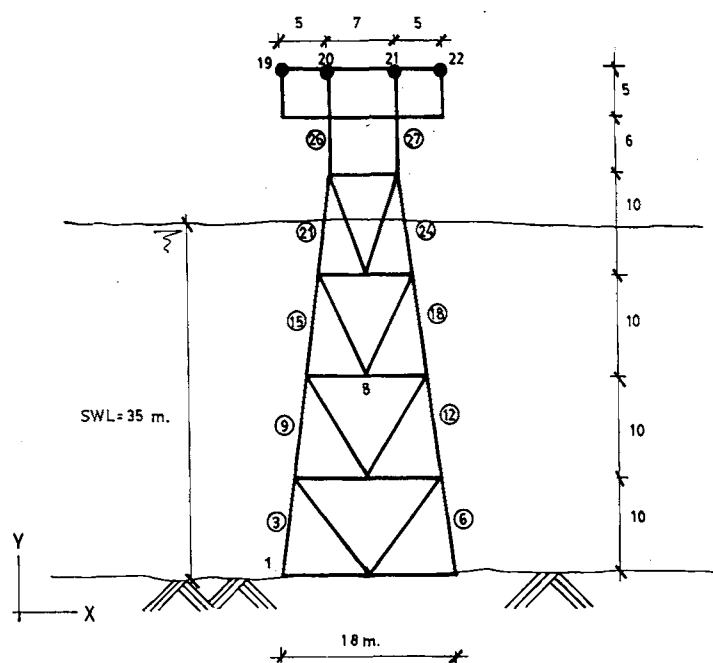


Figura 20. Ejemplo 3. Vista del modelo: discretización y geometría.

Nodo	Masa (kg)
19	30000.0
20	60000.0
21	60000.0
22	30000.0

Tabla III. Masas concentradas en la plataforma.

la plataforma pueden ser representados por sendas masas traslacionales concentradas, cuyos valores se dan en la Tabla III.

Por otro lado, en este análisis, se ha supuesto que la estructura está fija al fondo del mar. La inclusión, no obstante, de los pilotes de fundación en el modelo así como su interacción no lineal con el terreno, no representa ningún problema adicional mediante el procedimiento general descrito en anteriores apartados.

Los parámetros que caracterizan el estado del mar son los siguientes:

Altura de la lámina de agua (d) = 35.0 mts.
 Amplitud de la ola de diseño (A) = 3.0 mts.
 Período de la ola de diseño (T) = 9.0 seg.

Los coeficientes hidrodinámicos se han tomado como $C_M = 1.5$ y $C_D = 1.0$.

En cuanto a las condiciones iniciales, a falta de información más confiable, se ha adoptado la hipótesis de velocidades y movimientos nulos en el instante inicial $t = 0$, es decir, $\dot{x}_0 = x_0 = 0$. Esta hipótesis, aunque estrictamente hablando no refleja fielmente la realidad física, se basa en la suposición de que el estado del mar previo a la tormenta de diseño es relativamente calmo. Así, cuando ésta sobreviene, las velocidades y movimientos estructurales serán pequeños en comparación con los introducidos por la tormenta en los instantes iniciales pudiendo, por tanto, asumirse como nulos.

Con la finalidad de evaluar los resultados proporcionados por la técnica aquí empleada, se ha analizado el mismo modelo con el programa comercial ABAQUS²⁵. Este programa permite la definición de cargas de oleaje mediante varias teorías y efectúa el análisis a través de métodos implícitos de integración en el tiempo. En las Figuras que siguen la respuesta proporcionada por ABAQUS se representa con línea de trazos, mientras que los resultados obtenidos con el programa desarrollado en el presente estudio quedan recogidos con línea continua.

La Figura 21 muestra la historia de desplazamientos horizontales del nodo 19, correspondiente a la parte superior de la plataforma, mientras que la Figura 22 hace lo propio con la velocidad horizontal del mismo nodo.

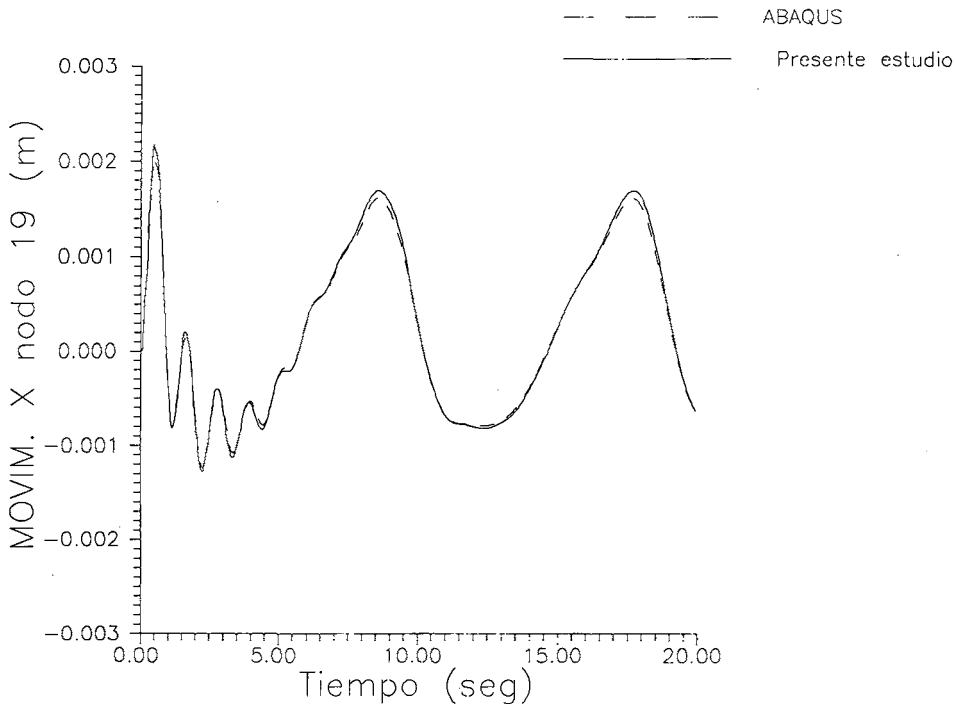


Figura 21. Ejemplo 3. Historia del desplazamiento horizontal del nodo 19.

La Figura 23 recoge la historia de desplazamientos de un nodo sumergido (nodo 8), mientras que la Figura 24 ilustra los esfuerzos axiales obtenidos en la base de la

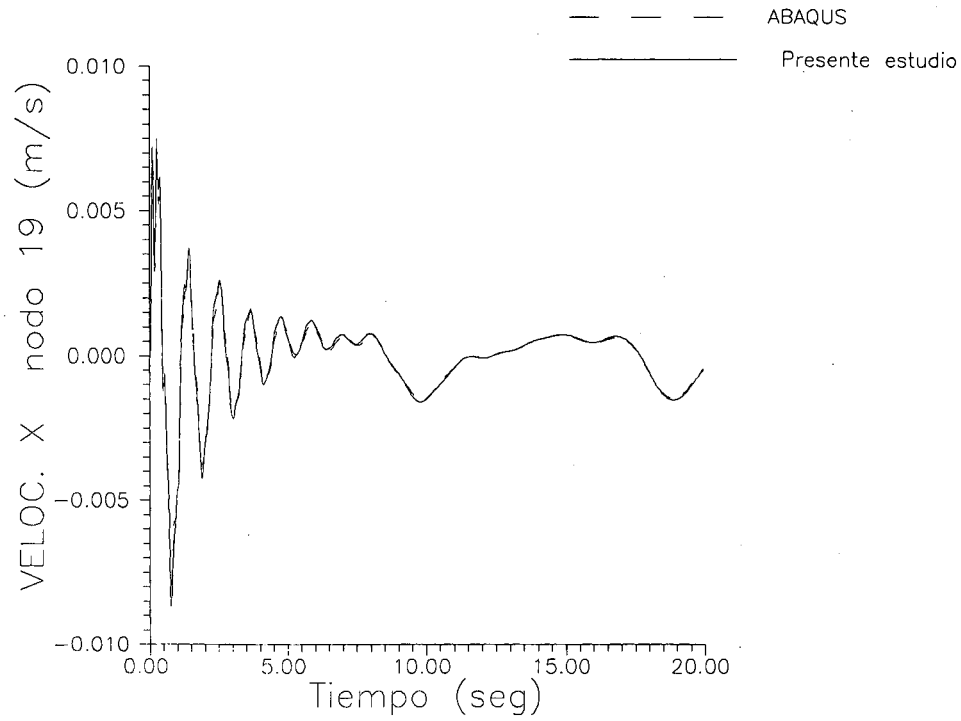


Figura 22. Ejemplo 3. Historia de la velocidad horizontal del nodo 19.

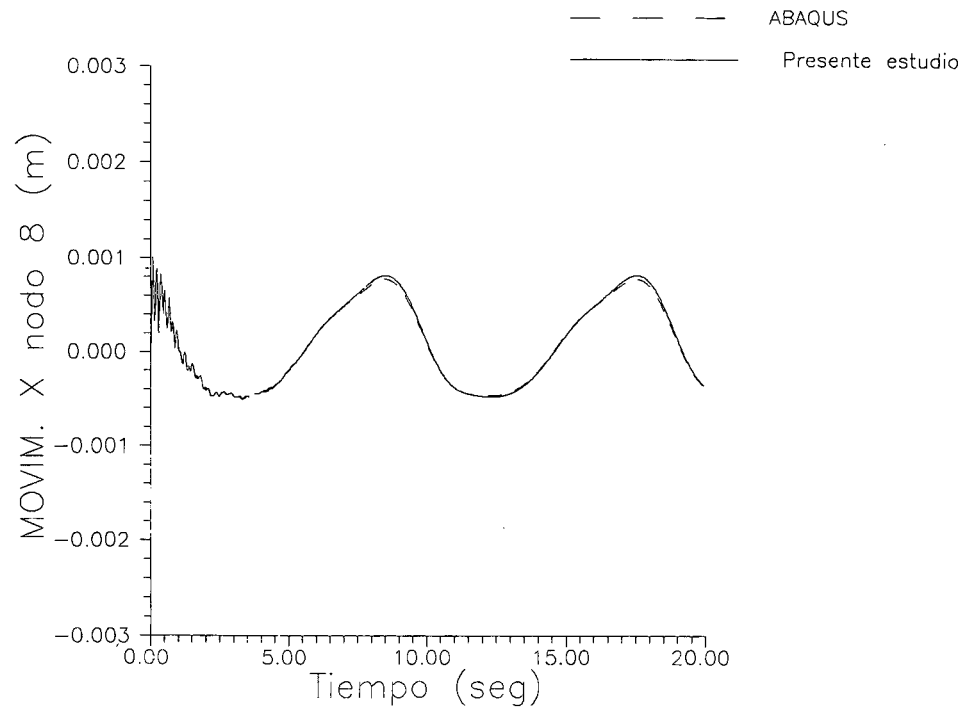


Figura 23. Ejemplo 3. Historia del desplazamiento horizontal del nodo 8.

estructura (nodo 1), cuyas magnitudes resultan esenciales para el posterior análisis y diseño de los pilotes de fundación.

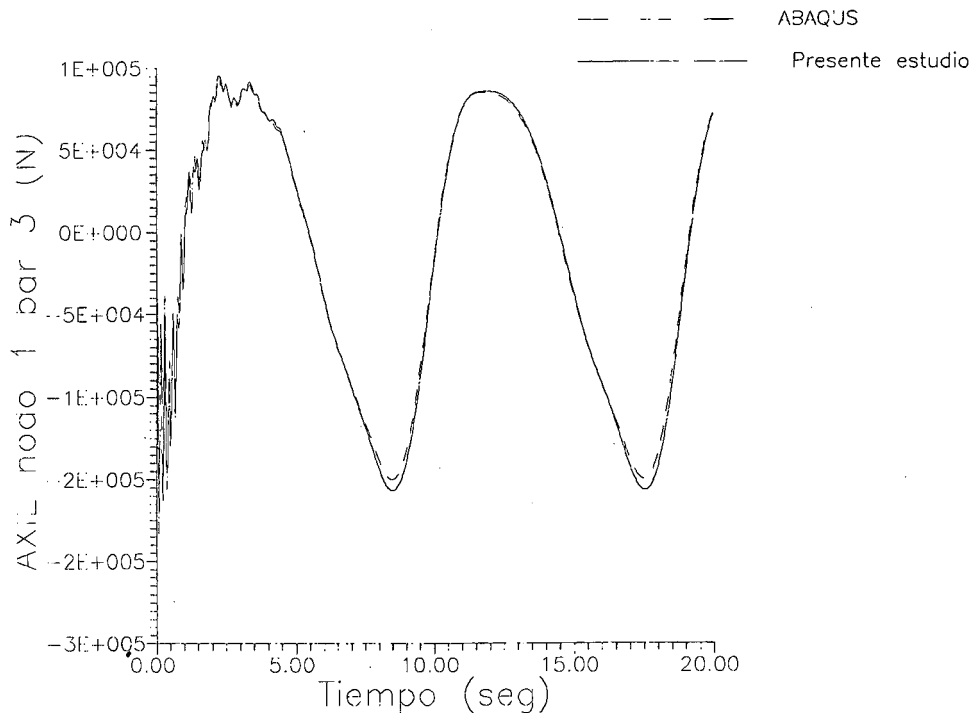


Figura 24. Ejemplo 3. Historia del esfuerzo axial en el nodo 1 barra 3.

En las Figuras descritas puede notarse la excelente coincidencia entre los resultados aquí obtenidos y los proporcionados por el programa ABAQUS. Los valores pico de los regímenes transitorios calculados con ambos programas no difieren en más del 5%, mientras que las diferencias son menores aún en los respectivos regímenes permanentes. Como era de esperar, las figuras reproducen cualitativamente la forma cuasi-sinusoidal de la señal de excitación una vez alcanzado el régimen permanente. Asimismo, en la Figura 21 pueden observarse unos ligeros puntos de inflexión en el régimen estable de la respuesta estructural, debidos, fundamentalmente, a los efectos no lineales de la componente de arrastre en la fórmula de Morison.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo sencillo de cálculo que aplica esquemas de integración explícita al estudio de cargas móviles y no lineales sobre estructuras de barras.

La integración explícita produce el desacoplamiento a nivel local de las ecuaciones del movimiento y genera por tanto algoritmos sencillos que permiten

implementar con facilidad y con escasas simplificaciones cualquier tipo de formulación de las acciones que actúan sobre la estructura.

Por otro lado, los esquemas explícitos aplicados a estructuras de barras, al no tener necesidad de ensamblar las matrices globales de la estructura (rigidez, masa,...), ni de resolver sistemas de ecuaciones, generan programas que precisan relativamente de poca memoria. Esto los hace especialmente aptos para su uso en ordenadores personales. La limitación del paso de integración, necesaria para la estabilidad numérica, no debe dar tiempos de ejecución excesivamente largos, a menos que se empleen barras muy cortas o con una relación área/inercia muy pequeña.

Se ha presentado la aplicación del modelo a dos problemas típicos en Ingeniería Civil: el tráfico de vehículos sobre puentes y las oscilaciones de plataformas "offshore" producidas por el oleaje. En el primer caso el modelo permite estudiar con facilidad el movimiento acoplado de la estructura y de la suspensión de los vehículos, así como introducir las irregularidades del pavimento. En el segundo caso el modelo no exige la linealización previa de las fuerzas de arrastre. Los resultados obtenidos en los casos analizados han sido satisfactorios, lo que indica que programas basados en el modelo numérico presentado, o en otros análogos, pueden utilizarse con confianza para analizar el comportamiento real de estructuras sometidas a cargas no lineales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Prof. J. Martí de la ETSI de Minas de Madrid y al Dr. J. Goicolea de Principia S.A. sus valiosas sugerencias y el apoyo prestado durante el desarrollo del presente estudio. También quieren expresar su reconocimiento a A. Alacrén por el esmero puesto en la delineación de las figuras.

REFERENCIAS

1. C. Brebbia y F. Walker, *"Dynamic Analysis of Offshore Structures"*, Newnes Butterworths, Londres (1979).
2. M.O.P., "Instrucción Relativa a las Acciones a Considerar en el Proyecto de Puentes de Carreteras", M.O.P., Madrid, (1972).
3. M.O.P., "Instrucción Relativa a las Acciones a Considerar en el Proyecto de Puentes de Ferrocarril", M.O.P., Madrid, (1975).
4. A. Aparicio y J.R. Casas, "Resultados y Conclusiones de las Pruebas Efectuadas en el Paso Superior de Alfonso X, en el Cinturón de Ronda de Barcelona: Una Fuente de Enseñanza", *Hormigón y Acero*, No. 162, pp. 33-141, (1987).
5. R. Alvarez, J. Molina, M. Doblare y E. Alarcón, "Interacción Dinámica Vehículo-Vía-Estructura-Cimiento en Puentes de Ferrocarril", *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año I, no. 1, pp. 451-460, (1983).
6. E. Alarcón, R. Alvarez y M.S. Gómez, *"Cálculo Matricial de Estructuras"*, Editorial Reverté, Barcelona, (1986).
7. R. Clough y J. Penzien, *"Dynamics of Structures"*, Editorial McGraw Hill, New York, (1975).
8. T. Belytschko, "An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures",

- Computational Methods for Transient Analysis*, Capítulo 1, editado por T. Belytschko y T. Hughes, Editorial North-Holland, Nueva York, (1983).
9. M. Inbanathan y M. Wieland, "Bridge Vibrations due to Vehicle Moving over Rough Surface", *ASCE, J. of Structural Engineering*, Vol. 113, no. 9, (1987).
 10. S. Timoshenko y D. Young, "Vibration Problems in Engineering", Editorial Van Nostrand, Nueva York, (1955).
 11. T. Sarpkaya y M. Isaacson, "Mechanics of Wave forces on offshore structures", Editorial Van Nostrand, Nueva York, (1981).
 12. R.G. Dean, "Stream Function Representation of Non Linear Ocean Waves", *J. of Geophysical Research*, Vol. 70, no. 18, (1965).
 13. J.R. Morison, M.P. Obrien, J.W. Johnson y S.A. Schaaf, "The Force Exerted by Surface Waves on Piles", *Tech. Inst. of Mining Eng.*, Vol. 189, (1950).
 14. E. Laya, "Effect of Structural Motion on the Hydrodynamic Forcing of Offshore Steel Structures", *MSc Thesis*, MIT, Mass, (1980).
 15. B.G. Wade y M. Dwyer, "On the Application of Morison's Equation to Fixed Offshore Platforms", *Proc. Offshore Tech. Conf.*, no. 2733, (1975).
 16. M. Cerrolaza, "Response Analysis of Offshore Structures Subjected to Wave Action", *MSc Thesis*, COPPE, Civil Eng. Prog., UFRG, Río de Janeiro, (1980).
 17. A. Ferrante, S.H. Sphaier, G. Ellwanger, C. Cenatios y M. Cerrolaza, "On the Use of Morison's Equation for Steel Jacket Structures", *Offshore Engineering*, (Carneiro et al eds.), Pentech Press, Londres, (1982).
 18. L.E. Borgman, "Computation of the Ocean Wave Forces on Inclined Cylinders", *J. of G. Research*, Vol. 39, (1958).
 19. S.K. Chakrabarti y W.A. Tam, "Cross and Local Waves Loads on a Large Vertical Cylinder - Theory and Experiment", *Proc. Offshore Tech. Conf.*, no. 1818, (1972).
 20. Y.Y. Kim y H.C. Hibbard, "Analysis of Simultaneous Wave Force and Particle Velocity Measurements", *Proc. Offshore Tech. Conf.*, no. 2192, (1975).
 21. J. Molina, R. Alvarez y E. Alarcón, "Program TRIGRA: Dynamic Evaluation of Vehicle-Structure Interaction", *Comparison of the Results of Calculation and Measurements on Two Bridges - Selection of the Most Suitable Program*, ORE Question D 160 - Permissible Deflection of Bridges, Report no. 5, Utrech, (1986).
 22. R. Alvarez, "Interacción Dinámica Vehículo-Vía-Estructura en Puentes de Ferrocarril", *Tesis Doctoral*, ETSII Madrid, (1984).
 23. S. Levy y J. Wilkinson, "The Component Element Method in Dynamics", Editorial McGraw Hill, Nueva York, (1976).
 24. J. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", Editorial McGraw Hill, Nueva York, (1968).
 25. "ABAQUS - Users Manual", Versión 4.7, Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc., (1988).
 26. T. Belytschko y C.S. Tsay, "WHAMSE: A program for Three-Dimensional Nonlinear Structural Dynamics", NP-2250, Northwestern University, Illinois, (1982).
 27. T. Belytschko, L. Schwer y M.J. Klein, "Large Displacement Transient Analysis of Space Frames", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 65-84, (1987).