

DETERMINACIÓ PRELIMINAR DEL GEOIDE A CATALUNYA

Motivació

Una pregunta natural que hom es fa en relació amb el nostre planeta és: quina forma té la Terra? Una resposta, senzilla i aproximada, seria: té forma esfèrica. Però és ben sabut que la Terra és una mica aplanada en els pols, de manera que una resposta més acurada fóra de dir que és un el·lipsoide de revolució al voltant de l'eix de rotació. Podem mesurar l'aplanament mitjançant el paràmetre adimensional $f = (a_e - a_p) / a_e$, on a_e és el radi equatorial de l'el·lipsoide i a_p el radi polar. El valor aproximat d' a_e és 6 378 km (vegeu més endavant) i f és proper a 1/300. Així, doncs, a_p és uns 21 km més petit que a_e . Però la forma de la Terra, amb tota la riquesa del seu relleu, és realment molt més complicada.

Hom pot pensar que podem descriure la forma de la Terra mitjançant mapes. Considerem, per exemple, el problema de les alçàries. Per a això cal establir-ne un origen. Prenem el nivell del mar com a origen. Però la superfície del mar es mou degut a les onades, als corrents, etc. Bé, doncs, agafem el nivell mitjà del mar en un punt donat. A l'estat espanyol hom pren com a referència el nivell mitjà del mar a Alacant. Si tota la superfície de la Terra estigués coberta per aigua sense onades ni corrents, llavors el potencial gravitatori seria constant sobre ella (en cas contrari les aigües es mourien) i podríem prendre com a superfície de referència la d'aquest mar global. Com que, sortosament, hi ha part de la superfície terrestre no coberta per aigua, podem mesurar l'alçària d'un punt a base d'usar un nivell i anar progressant cap al punt on volem obtenir l'alçària. Aquesta alçària que mesurem, H , és l'alçària respecte a una superfície equipotencial que coincideix aproximadament amb el nivell del mar, i que s'anomena Geoide. Però, aquesta superfície és força complicada i convindria determinar en cada punt l'alçària del Geoide respecte a un el·lipsoide de referència, N , i així conèixer l'alçària del punt de la superfície terrestre respecte a l'el·lipsoide: $h = H + N$.

Tradicionalment, el Geoide s'ha calculat amb poca precisió per mètodes astrogeodèsics.

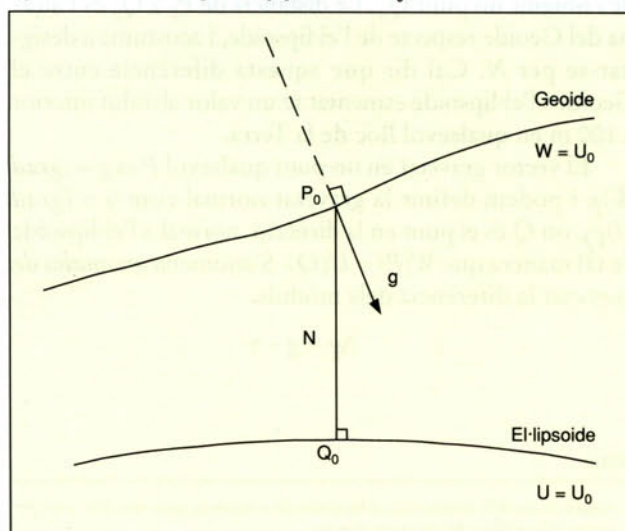
En els últims anys, s'han desenvolupat tècniques de posicionament global utilitzant diversos satèl·lits (posició d'un punt en tres coordenades respecte al centre de la

Terra), que permeten obtenir fàcilment la posició d'un punt respecte a un cert el·lipsoide de referència. Això fa que els papers s'hagin invertit, i que, actualment, sigui necessari el coneixement del Geoide amb gran precisió per poder deduir alçàries sobre el nivell del mar, sense haver de recórrer a la nivellació. A continuació expressem els fonaments i la metodologia que han permès d'obtenir uns primers resultats sobre el Geoide a Catalunya. Destaquem que, de moment, només s'han utilitzat dades de tipus gravimètric. Esperem que mesures addicionals, usant també altres tipus de dades com el posicionament tridimensional i la deflexió de la vertical, de les quals l'Institut Cartogràfic de Catalunya (ICC) disposarà en el futur, ens permetin d'assolir resultats de gran precisió.

Fonaments

Anomenarem V el potencial gravitatori terrestre, i W serà el resultat d'afegir el potencial centrífug $W(x,y,z) = V(x,y,z) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$, on ω és la velocitat angular de rotació de la Terra, que considerem constant, i xyz és un sistema de coordenades cartesianes directe de tal manera que l'eix z coincideix amb l'eix mitjà de rotació terrestre.

Figura 1: El Geoide és la superfície equipotencial $W = U_0$



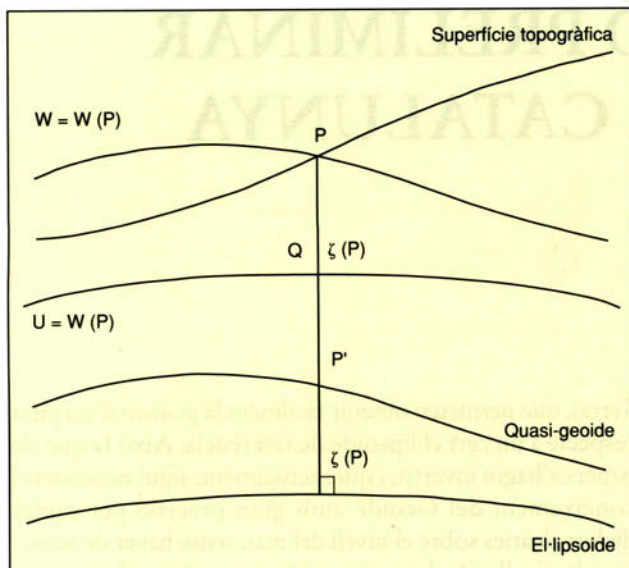


Figura 2: El punt Q és en la direcció normal a l'el·lipsoide i compleix $W(P) = U(Q)$. La distància de P a Q s'anomena anomalia d'alçada $\zeta(P)$. Per a cada punt P de la superfície terrestre, construïm un P' en la normal a l'el·lipsoide i a alçada $\zeta(P)$. El conjunt de tots els P' forma el quasi-geoide

Donat un *el·lipsoide de referència*, en el nostre cas el WGS84¹, queda definit un únic potencial U , anomenat normal, de tal manera que l'el·lipsoide és una superfície equipotencial, és a dir, en l'el·lipsoide $U = U_0$ (constant).

Així podem escriure $W = T + U$, on T s'anomena *potencial anòmal o perturbador*. L'avantatge d'aquesta descomposició rau en el fet que el potencial T és petit, cosa que ens permet de fer aproximacions lineals. D'altra banda, T és una funció harmònica complint $\Delta T = 0$, on Δ és l'operador Laplaciana ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$).

Quant a les superfícies equipotencials de W , n'hi ha una que és particularment important, $W = U_0$, anomenada Geoide, i que coincideix aproximadament amb la superfície del mar. Com indica la figura 1, donat un punt P_0 del Geoide podem projectar-lo de manera normal a l'el·lipsoide i obtenir un punt Q_0 . La distància de P_0 a Q_0 és l'alçada del Geoide respecte de l'el·lipsoide, i acostuma a designar-se per N . Cal dir que aquesta diferència entre el Geoide i l'el·lipsoide esmentat té un valor absolut inferior a 100 m en qualsevol lloc de la Terra.

El vector gravetat en un punt qualsevol P és $\vec{g} = (\text{grad } W)_P$ i podem definir la gravetat normal com $\vec{\gamma} = (\text{grad } U)_Q$, on Q és el punt en la direcció normal a l'el·lipsoide de tal manera que $W(P) = U(Q)$. S'anomena *anomalia de gravetat* la diferència dels mòduls:

$$\Delta g = g - \gamma$$

Nota:

1. Aquest és un dels nombrosos el·lipsoïdes de referència existents. S'ha triat per ser un dels millors de què hom disposa.

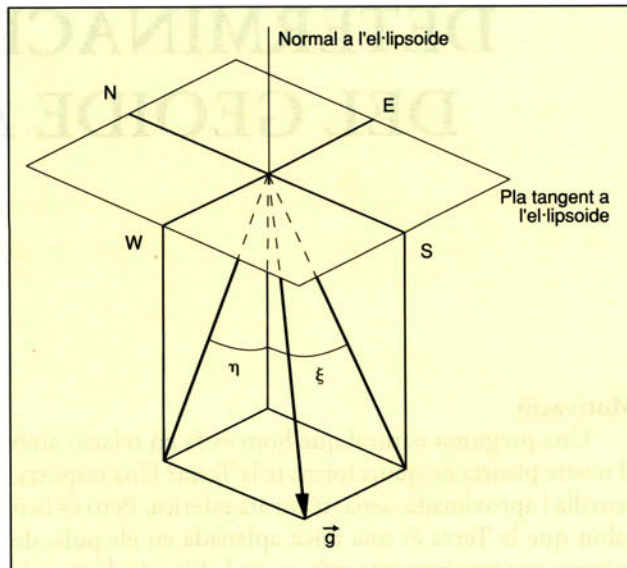


Figura 2 bis: Definim les deflexions de la vertical (ξ , η) com els angles que formen el vector $\vec{g}$ amb la normal a l'el·lipsoide, en les direccions nord-sud i est-oest, respectivament

Semblantment, podem definir l'anomalia d'alçada en un punt P , $\zeta(P)$ com la distància de P a Q .

A partir de l'anomalia d'alçada podem construir una superfície, que anomenarem quasi-geoide, tal com indica la figura 2: per a cada punt P de la superfície terrestre, construïm un P' en la normal a l'el·lipsoide i a una alçada $\zeta(P)$. El conjunt de tots els P' forma el quasi-geoide. Notem que Geoide i quasi-geoide pràcticament coincideixen en el mar. També es poden definir les deflexions de la vertical (ξ , η) com els angles que formen el vector $\vec{g}$ amb la normal a l'el·lipsoide, en les direccions del meridià i del paral·lel, respectivament (figura 2 bis).

Es pot veure que les quantitats que hem definit es relacionen amb el potencial anòmal de la següent manera (suficientment aproximada):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad (\text{fórmula de Bruns}) \quad \xi = -\frac{1}{r\gamma} \frac{\partial T}{\partial \varphi},$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T, \quad \eta = -\frac{1}{r\gamma \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda},$$

on r és la distància al centre de la Terra, i φ i λ són la latitud i la longitud geocèntriques, respectivament.

Harmònics esfèrics

Donat que el potencial gravitatori V és una funció harmònica fora de la Terra, $\Delta V = 0$, es pot fer el seu desenvolupament en harmònics esfèrics,

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right],$$

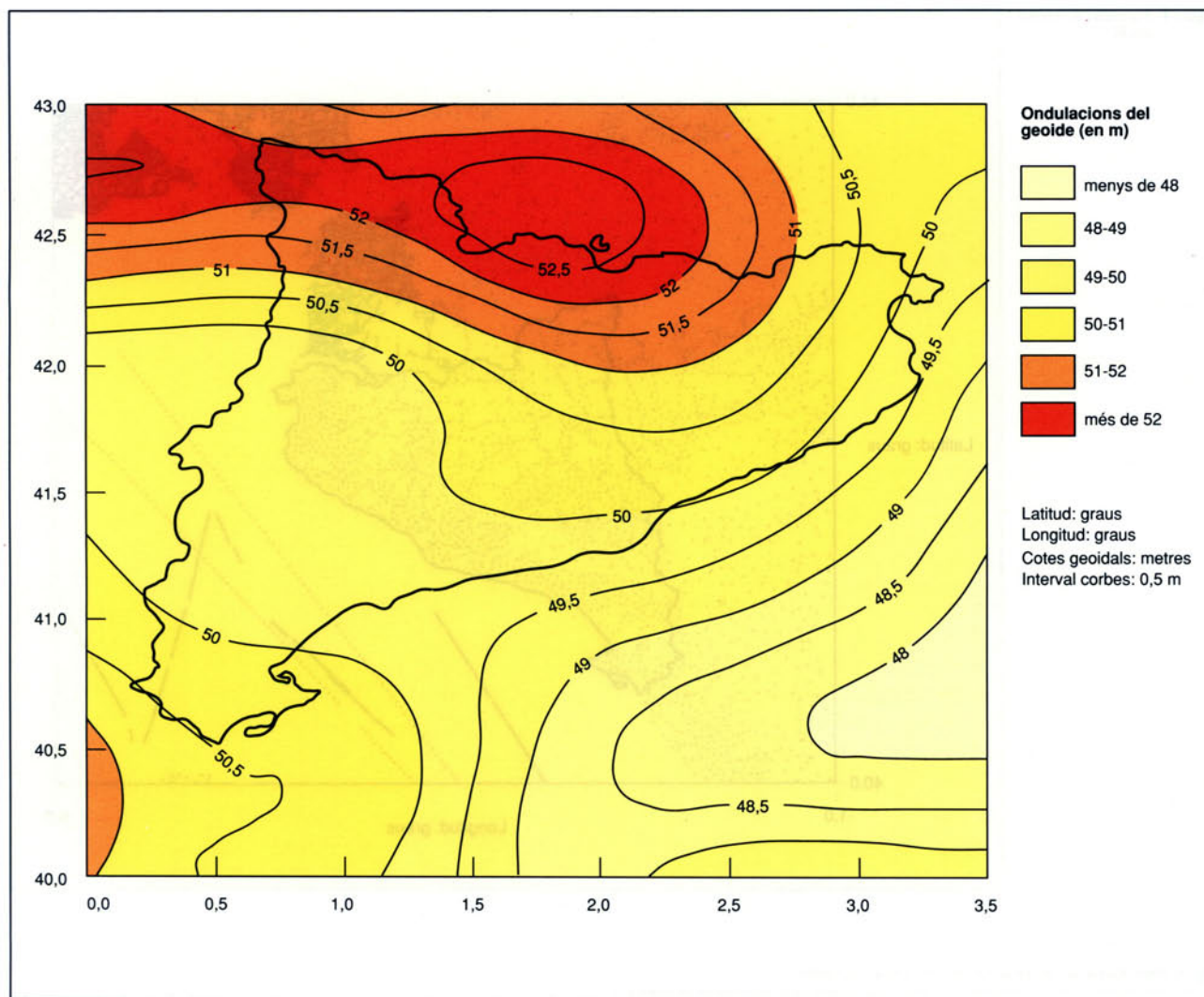


Figura 3: Geoide usant OSU89B (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

on θ és la colatitud ($\theta = \pi/2 - \varphi$), c_{nm} , s_{nm} són els coeficients del potencial i P_{nm} són les funcions associades de Legendre.

Actualment disposem dels coeficients del potencial OSU89B fins a l'ordre de 360, calculats l'any passat per R.H. RAPP, del Departament de Ciència Geodèsica de la Universitat de l'Estat d'Ohio, a partir del moviment de satèl·lits i d'anomalies de gravetat de tot el planeta. Amb aquests coeficients i la fórmula de Bruns es pot calcular una primera aproximació del Geoide que mostrem a la figura 3.

Col·locació mínim-quadràtica

Donat un model de potencial com l'esmentat en la secció anterior, hom té una aproximació del Geoide com la mostrada a la figura 3. Per a diverses magnituds observables hi ha diferències entre els valors calculats a partir

del model i els mesurats. Aquestes diferències poden ésser explicades mitjançant variacions dels coeficients del potencial, la qual cosa afectarà les prediccions i, en particular, el Geoide. El mètode de col·locació mínim-quadràtica permet, a partir d'amidaments de magnituds arbitràries relacionades amb el potencial, fer prediccions d'altres magnituds. Es mostra com un mètode molt flexible per a extreure informació a partir de conjunts de dades heterogènies. Passem a exposar-lo de forma breu.

Suposem que tenim dos vectors de quantitats aleatòries:

$$l = (l_1, \dots, l_n)^T \quad \text{i} \quad s = (s_1, \dots, s_m)^T,$$

que anomenarem respectivament *mesures* o *observacions*, i *senyals*, i suposem que aquestes quantitats són centrades, és a dir, que la seva esperança és zero: $E(l) = 0$, $E(s) = 0$.

Considerem també les matrius de covariàncies:

$$C_{ll} = \text{cov}(l, l), \quad C_{sl} = \text{cov}(s, l), \quad C_{ss} = \text{cov}(s, s).$$

Figura 4: Anomalies de gravetat del BGI

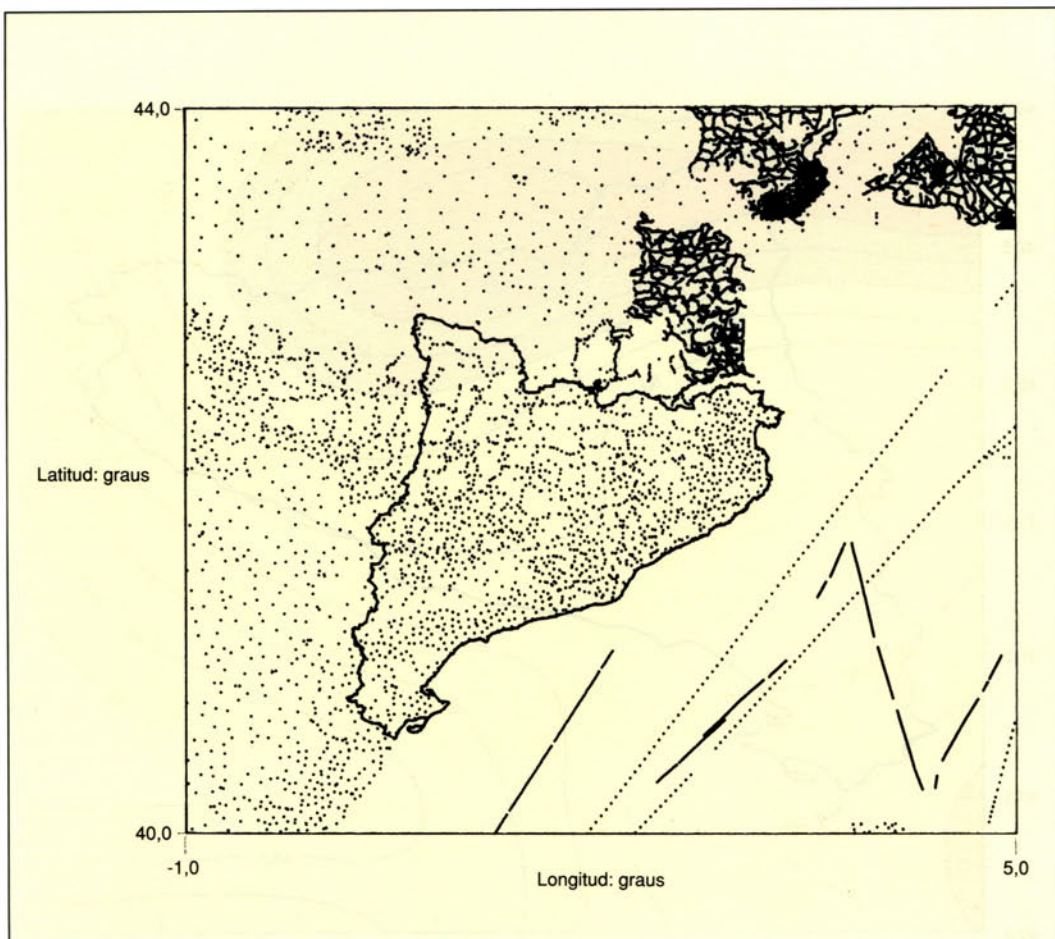
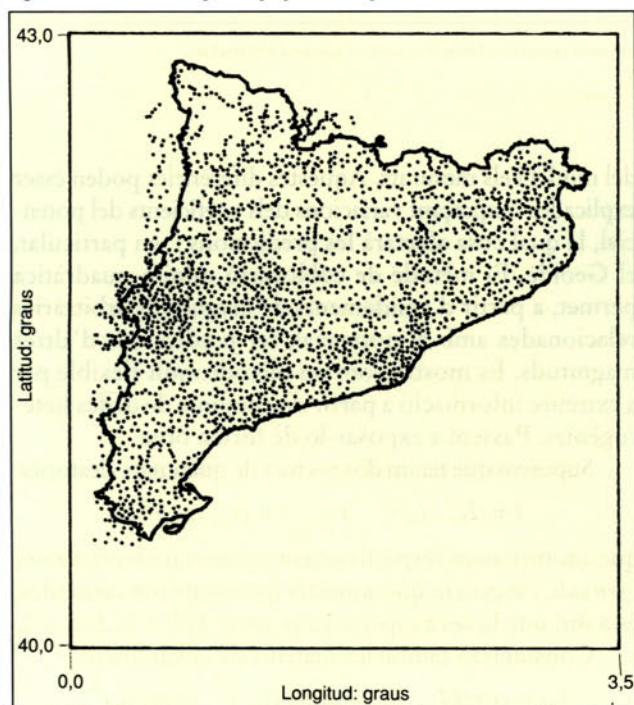


Figura 4 bis: Anomalies de gravetat proporcionades per A.CASAS



La qüestió és trobar una estimació lineal de s de la forma $\hat{s} = Hl$, on H és una matriu $m \times n$ de tal manera que el vector de variàncies de l'error $\epsilon = \hat{s} - s$ tingui norma mínima. Es pot demostrar que la solució d'aquest problema és la següent:

$$\hat{s} = C_{sl} C_{ll}^{-1}$$

Aleshores, per aquesta aproximació tenim que la matriu de covariàncies de l'error és:

$$C_{\epsilon\epsilon} = C_{ss} - C_{sl} C_{ll}^{-1} C_{ls} \text{ (MORITZ, 1989).}$$

El mètode que acabem de descriure es pot aplicar en el cas que els vectors l i s siguin quantitats relacionades

Radi equatorial	$a_e = 6\,378\,136 \text{ m}$
Aplanament	$f = 1/298.257$
Constant de gravitació per a la massa de la Terra	$GM = 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Taula 1: El-lipsoide de referència WGS84

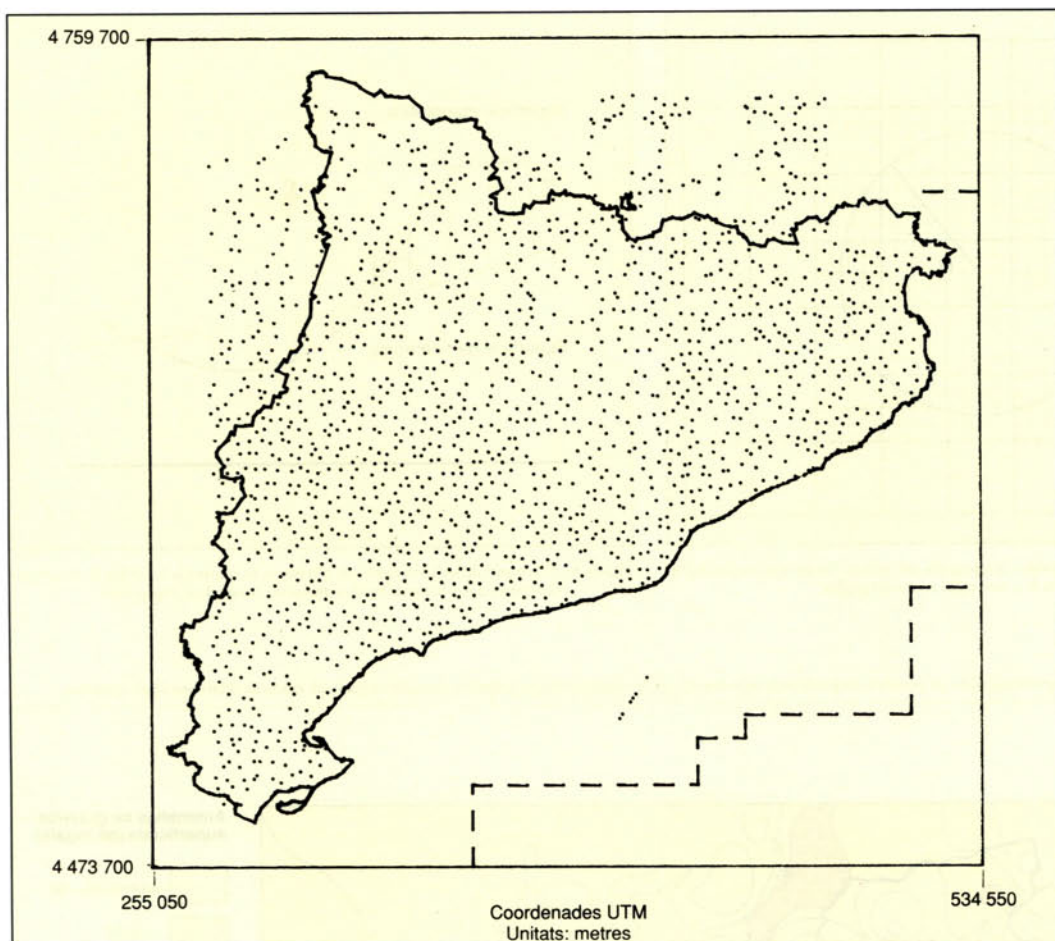
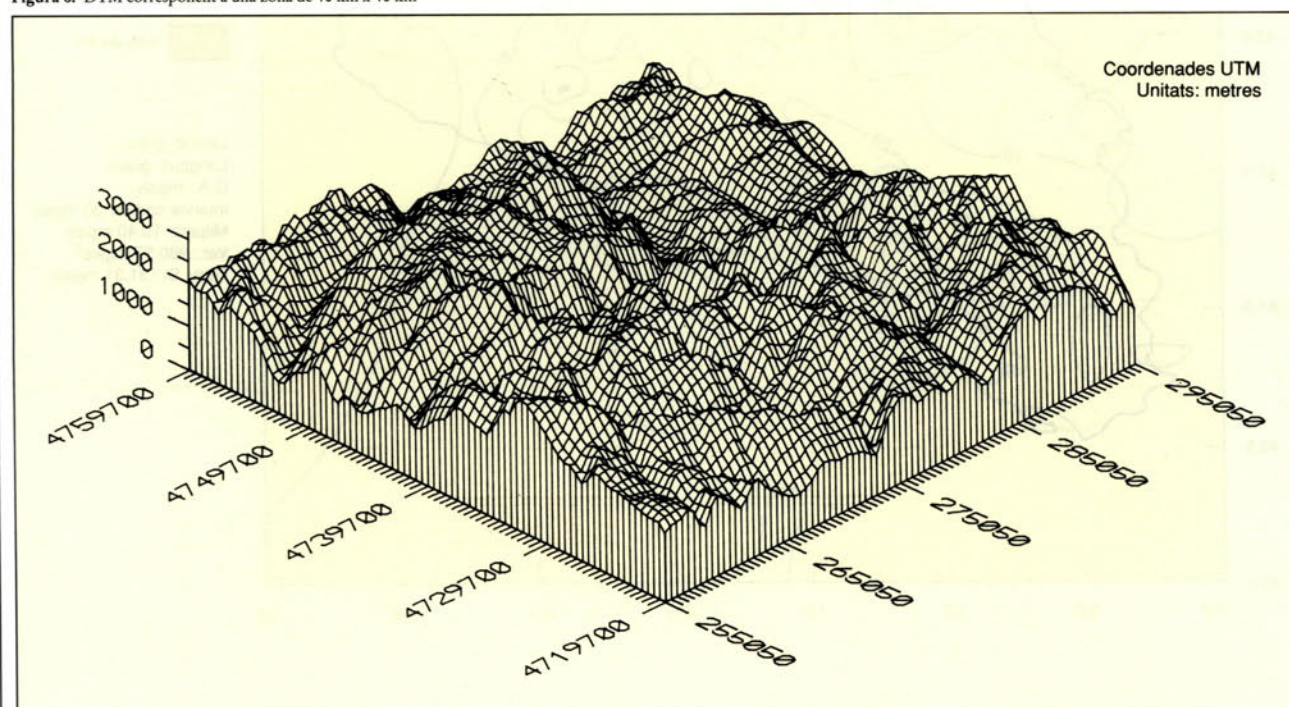


Figura 5: 1 719 observacions de la gravetat seleccionades. La línia discontinua assenyalava la frontera del DTM utilitzat

Figura 6: DTM corresponent a una zona de 40 km x 40 km



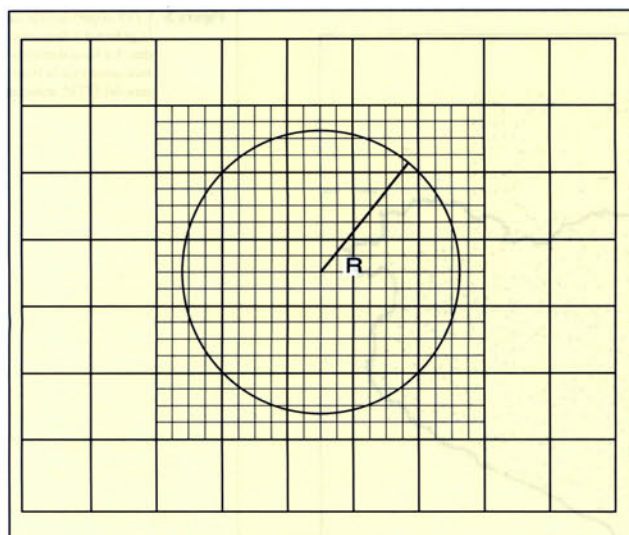


Figura 7: Per a les correccions degudes a la topografia del terreny s'utilitza un model digital fi fins a una certa distància R , i, més enllà, un model groller

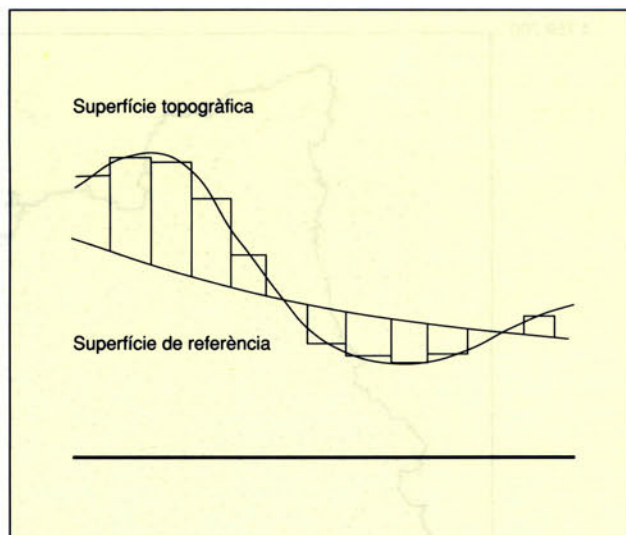
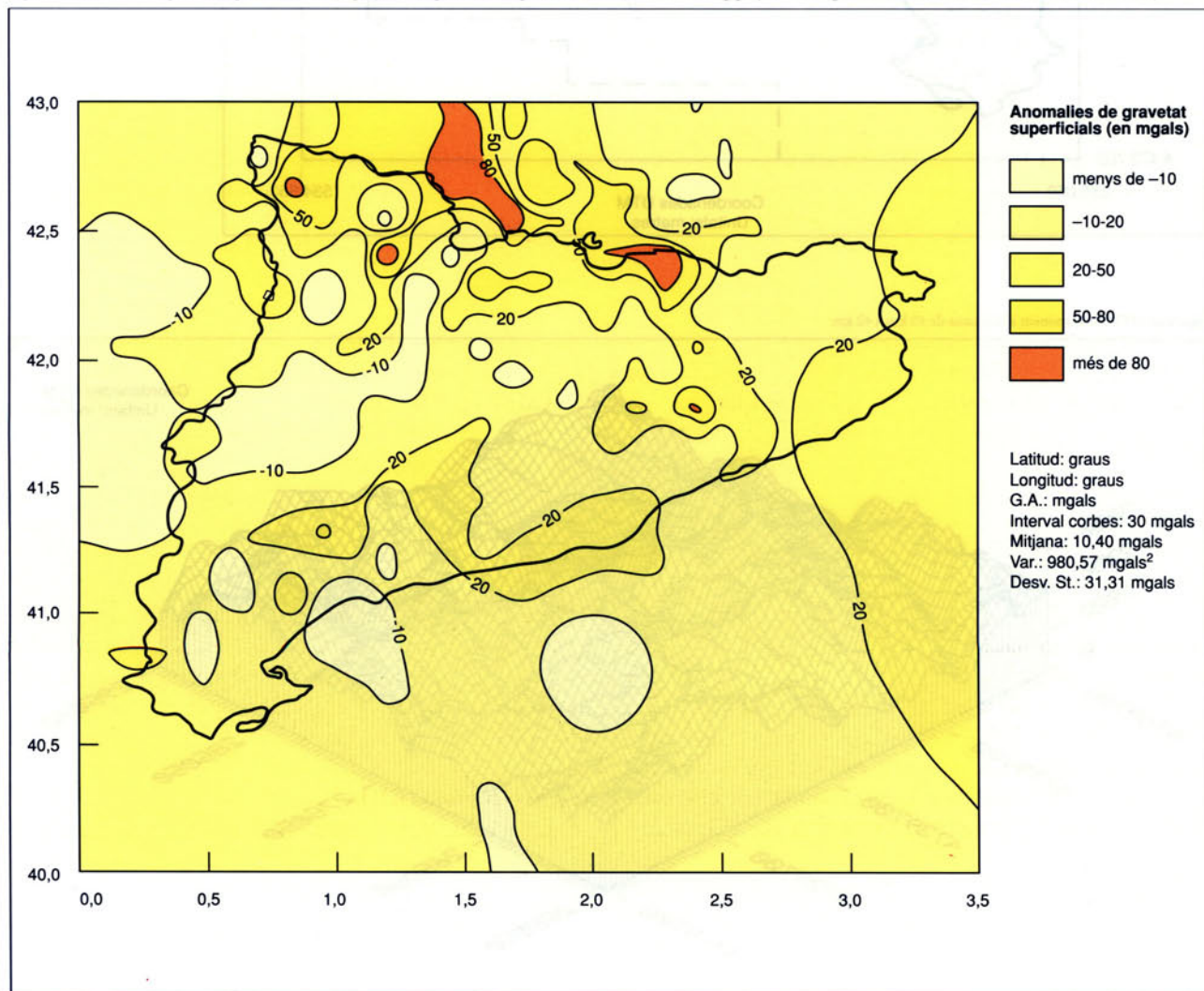


Figura 8: El càlcul de les correccions de terreny es fa sumant la contribució de prismes compresos entre la superfície de referència i la superfície topogràfica

Figura 9: Anomalies de gravetat superficials (GA) (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)



amb el potencial anòmal T . Ara, doncs, el vector l pot ésser format per observacions d'anomalies de la gravetat, anomalies d'alçària, deflexions de la vertical, ... i el mateix podem dir del vector $\hat{s}$ de prediccions.

Per il·lustrar millor la situació ho escriurem en el cas que només disposem d'anomalies de la gravetat, i vulguem calcular l'alçària del Geoide en un punt:

$$N(P) = (C_{P1}, \dots, C_{Pn}) \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_n \end{pmatrix},$$

on $C_{Pi} = \text{cov}(N(P), \Delta g_i)$ i $C_{ij} = \text{cov}(\Delta g_i, \Delta g_j)$.

Com podem veure, en el mètode de Col·locació mínim-quadràtica (LSC) és fonamental el coneixement de les covariàncies, de la qual cosa parlarem més endavant. També cal dir que hem presentat el mètode LSC en la versió més senzilla. Habitualment, a la matriu de covariàncies se li afegeix una matriu de soroll, diagonal, on els elements de la diagonal són les variàncies dels errors en les mesures. També hi ha versions del mètode LSC que inclouen paràmetres lineals.

Anomalies de la gravetat

El Dr. ALBERT CASAS, del Departament de Geològica, Petrologia i Prospecció Geològica de la Universitat de Barcelona, ens va proporcionar 2 422 observacions de la gravetat distribuïdes per tot Catalunya d'una manera bastant uniforme. Aquestes dades corresponen pràcticament a les que figuren en el llibre *Mapa Gravimètric de Catalunya* (CASAS, TORNÉ I BANDA, 1987).

Més endavant, varem demanar més dades al *Bureau Gravimétrique International* de Tolosa de Llenguadoc, perquè ens interessava de tenir mesures de la gravetat al sud de França, a l'Aragó i a la Mediterrània. El BGI ens va enviar més de 14 000 anomalies de la gravetat a l'àrea compresa entre els 40° i 44° de latitud i entre els -1° i 5° de longitud. D'aquestes només una mica més d'un centenar corresponen a punts que figuraven a les mesures proporcionades pel Dr. A. CASAS. Malauradament, a la Mediterrània les dades són escasses i allunyades de la costa.

Notem que en el mètode LSC la matriu de covariàncies té per dimensió el nombre d'observacions, i per tant, com més n'utilitzem més temps de càlcul i més memòria necessitem en l'ordinador. D'altra banda, ens interessa d'utilitzar dades tan equidistantes com es pugui. La solució consisteix a seleccionar les observacions que es troben a prop d'una xarxa regular. En el nostre cas varem prendre una xarxa de pas 2'.5, i així resulten 1 719 dades que es mostren a la figura 5. D'elles 1 465 han estat tretes de les proporcionades pel Dr. CASAS i les restants del BGI. Es

pot admetre de manera uniforme que la desviació típica dels errors de mesura és de l'ordre d'1 mgal.

Model digital i correccions de terreny

Com veurem més endavant, és important de disposar d'un bon Model Digital del Terreny (DTM) per a poder fer les correccions de terreny sobre les anomalies de la gravetat i sobre el Geoide. L'ICC ens va proporcionar un DTM en coordenades UTM de 500 m de resolució que cobreix tot Catalunya, així com una franja de 25 km de mar. A la figura 6 mostrem un tros d'aquest DTM. Cal dir que la batimetria es va obtenir digitalitzant mapes, expressament per dur a terme el nostre projecte de *Càlcul del Geoide*. D'aquí a poc temps l'ICC haurà conclòs l'elaboració d'un DTM de 15 m de resolució per a tot Catalunya.

Les correccions de terreny es calculen utilitzant el que s'anomena un Model Residual del Terreny (RTM). Per això, a més del DTM ja esmentat en calen altres dos, que s'obtenen a partir de l'anterior simplement amitjanant. Ambdós tenen una resolució de 10 km, però un d'ells amitjanant blocs de 10 km (DTM1), i l'altre, blocs de 50 km (DTM2). El DTM2 serveix de superfície de referència. En cada punt on tenim una observació de la gravetat calculem la influència del RTM, és a dir del terreny que hi ha entre la superfície topogràfica que ve donada pel DTM i la superfície de referència del DTM2. Aquest càlcul es fa simplement integrant paral·lelepípedes. Per a grans distàncies del punt de càlcul no és necessari utilitzar el DTM fi i es pot fer servir el DTM1, per tal d'estalviar temps de càlcul.

Per fixar idees, pensem que volem calcular la influència del RTM sobre l'anomalia de gravetat en un punt; la pregunta és: fins a quina distància hem de tenir en compte el RTM? Es pot fer una prova amb diversos punts, considerant distàncies de 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100 km, i es pot veure que per calcular la correcció de terreny sobre les anomalies de la gravetat basta considerar distàncies de 20-30 km; més enllà, la influència és en tot cas de l'ordre d'unes poques dècimes de mil·ligal ($1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$). No s'esdevé el mateix amb les correccions de terreny del RTM sobre el Geoide, on sembla que haurem de considerar distàncies de l'ordre de 100-120 km. Per tant, cal tenir un DTM, encara que sigui groller, en una certa àrea perifèrica a Catalunya. Aquest model existeix a nivell mundial i en els propers mesos el podrem utilitzar.

Remove-Restore (RR)

En el càlcul del Geoide, juntament amb el mètode de col·locació s'acostuma a utilitzar la tècnica RR. La idea és: a les anomalies de gravetat superficials se li resta la contribució del desenvolupament en harmònics esfèrics fins a un cert ordre, 360 en el nostre cas. Després, traiem les correccions de terreny degudes al RTM. El fet d'utilitzar

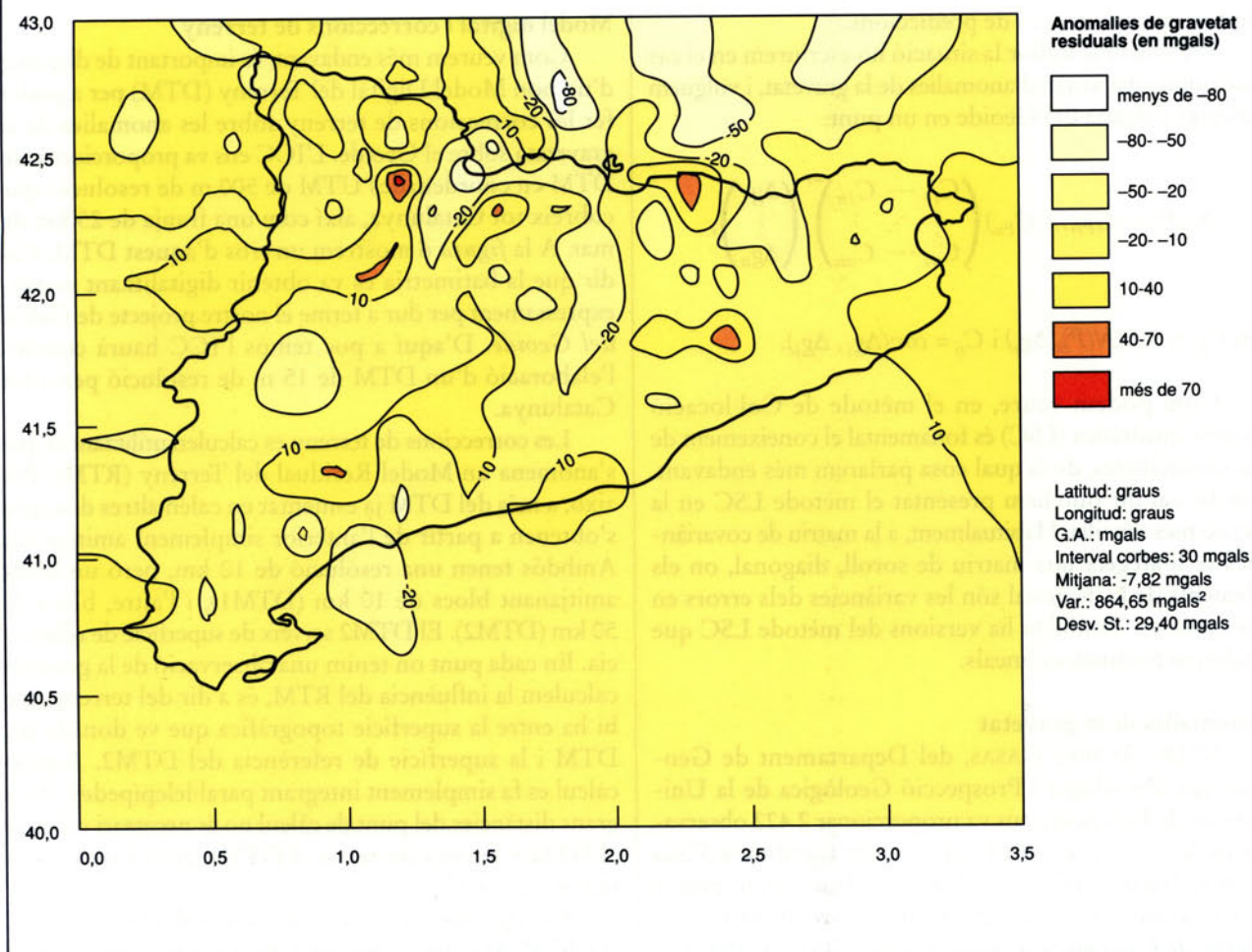


Figura 10: GA menys desenvolupament en harmònics esfèrics (SHE) (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

aquest tipus de correccions de terreny queda clar si pensem que, en certa manera, el desenvolupament en harmònics esfèrics fins a un cert ordre, ja porta informació del terreny mitjà. Una vegada tenim les anomalies de gravetat residuals, apliquem el mètode de LSC, i després, restaurem la influència del RTM sobre el Geoide i la contribució dels harmònics esfèrics. Les figures 9, 10 i 11 mostren les anomalies de gravetat superficials i els residus en treure el desenvolupament en harmònics esfèrics i les correccions de terreny.

Correcció lineal

Malgrat que les anomalies de gravetat residuals són molt més suaus, és a dir tenen una variància molt més petita que no pas les anomalies de gravetat superficials, encara continuen tenint alguna característica no desitjable. Com és pot apreciar a la figura 12, les anomalies residuals tenen correlació amb l'alçària, cosa que no hauria de passar i que

es pot atribuir a la no homogeneïtat de la densitat del terreny. Per tal de solucionar aquest problema, només cal fer una correcció lineal en l'alçària, que correspon a restar la recta de regressió. Aquesta correcció es traduirà sobre el Geoide, després de la col·locació, en un *shift* d'uns pocs centímetres.

Després de la correcció lineal, les anomalies tenen una distribució semblant a una de normal, una mica esbiaixada cap a valors positius, però que considerem acceptable a manca de posteriors refinaments.

Covariància empírica i model de covariància

Com ja hem esmentat abans, per tal d'utilitzar el mètode LSC és indispensable de conèixer la funció covariància del potencial anòmal, o equivalentment de quantitats relacionades amb ell com són les anomalies de gravetat o les deflexions de la vertical. Habitualment es determina la covariància de les anomalies de gravetat

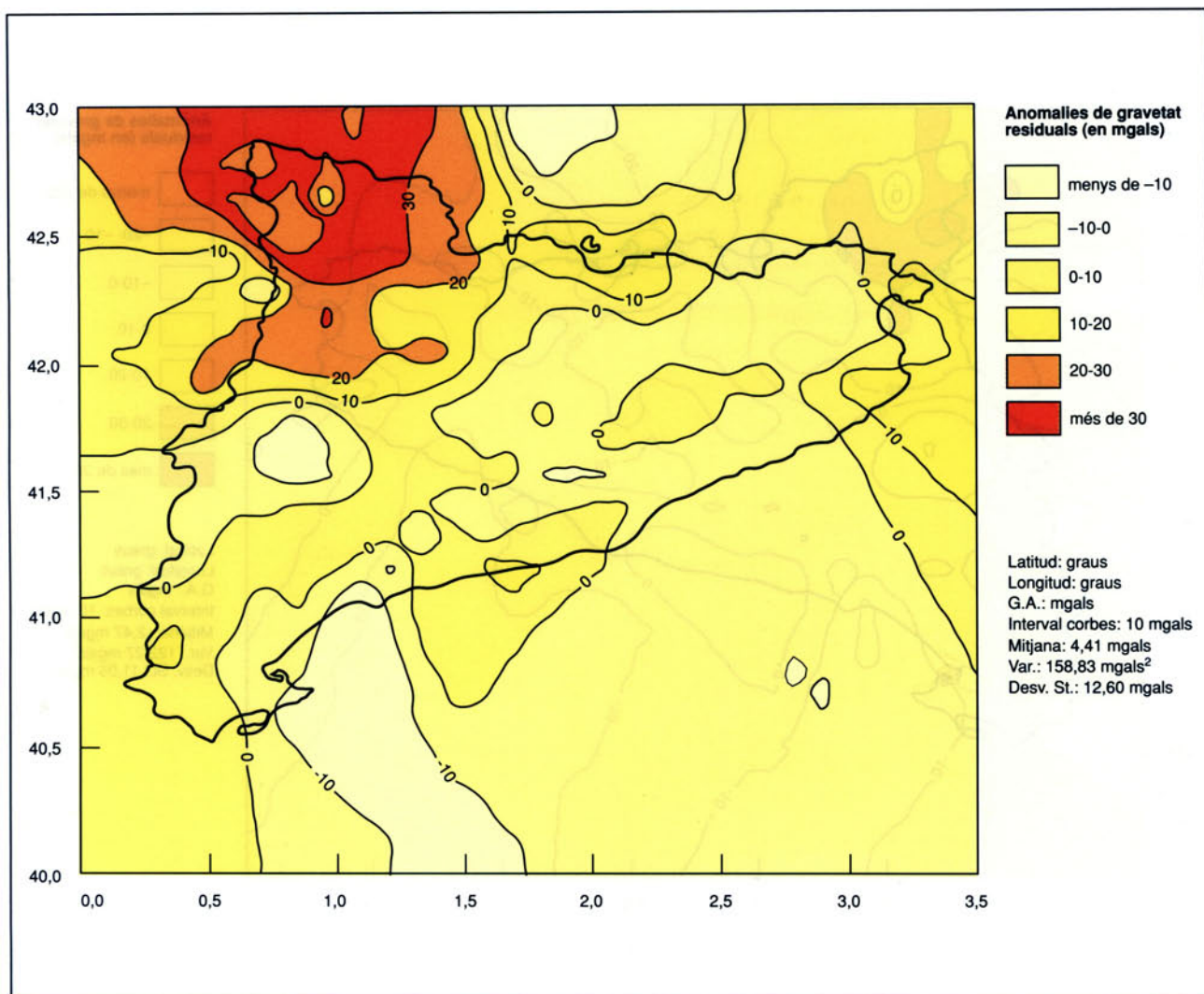


Figura 11: GA - SHE menys correccions de terreny (TC) (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

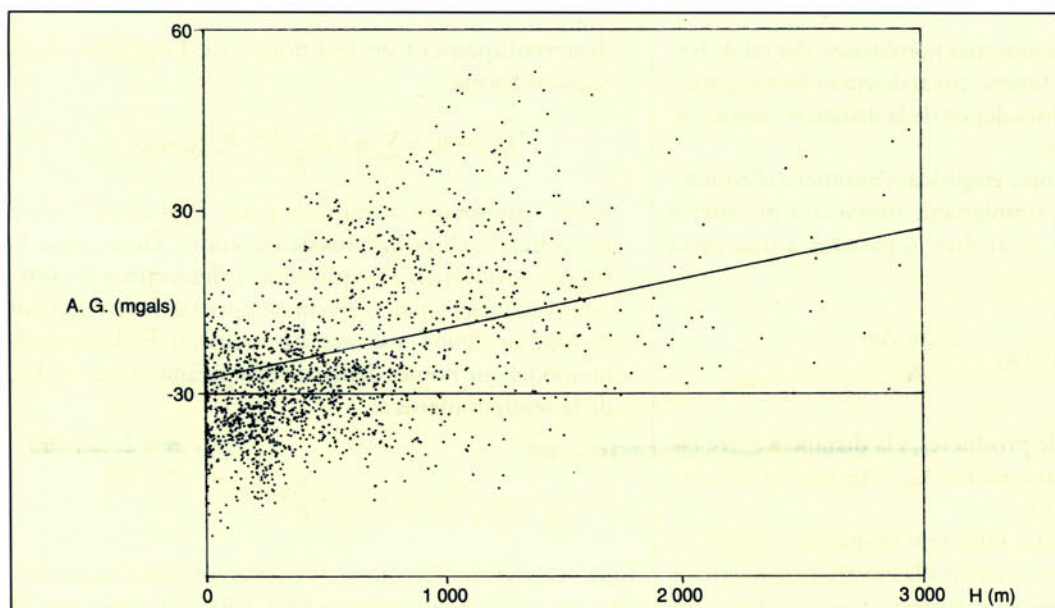


Figura 12: Relació entre anomalies de gravetat residuals i alçària

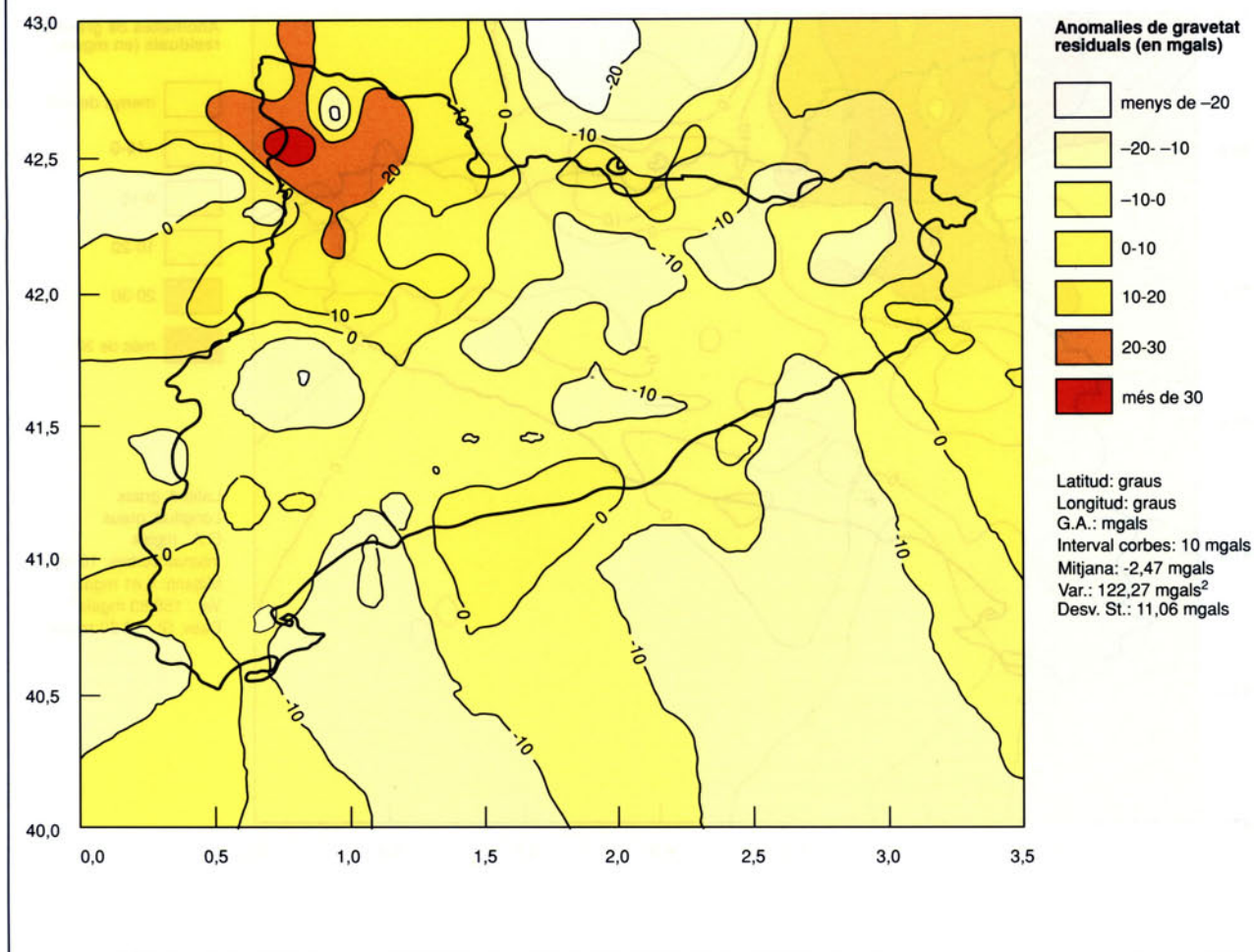


Figura 13: GA - SHE - TC menys correcció lineal (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

perquè són les observacions més nombroses. Per tal de fer-ho, suposarem que la funció covariància és homogènia i isòtropa, i per tant només depèn de la distància esfèrica ψ , i seguirem dues etapes:

- Càlcul de la covariància empírica: s'anomena d'aquesta manera l'obtinguda simplement amitjanant productes d'observacions que es troben separades a una certa distància:

$$Cov^{(e)}(\psi) = \frac{\sum \Delta g_i \Delta g_j}{N}$$

on N és el nombre de productes, i la distància entre els punts on hi ha les anomalies Δg_i i Δg_j cau en un cert interval al voltant de ψ .

- Model de covariància: intentem trobar un model de funció covariància que s'ajusti a la covariància empírica ja esmentada. Sabem que aquesta funció admet un

desenvolupament en polinomis de Legendre de la següent forma:

$$Cov(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 \frac{(n-1)^2}{R^2} P_n(\cos \psi)$$

on ϵ_n^2 s'anomenen *variàncies-grau*, R és el radi mitjà terrestre i P_n els polinomis de Legendre. Determinar la funció covariància és equivalent a determinar les infinites variàncies-grau, i òbviament, per tal de fer-ho, hem de suposar alguna cosa més. En realitat, treballarem amb un model que només depèn de tres paràmetres, a , A , R_B , de la següent manera:

$$\sigma_n^2 = a e_n^2 \quad n = 2, \dots, 360$$

$$\sigma_n^2 = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+4)} \left(\frac{R_B}{R}\right)^{2n+2} \quad n > 360$$

Els ϵ_n^2 expressen l'error en els coeficients del desenvolupament en harmònics esfèrics OSU89B i són coneguts. El

Figura 14: Histograma de les anomalies de la figura anterior

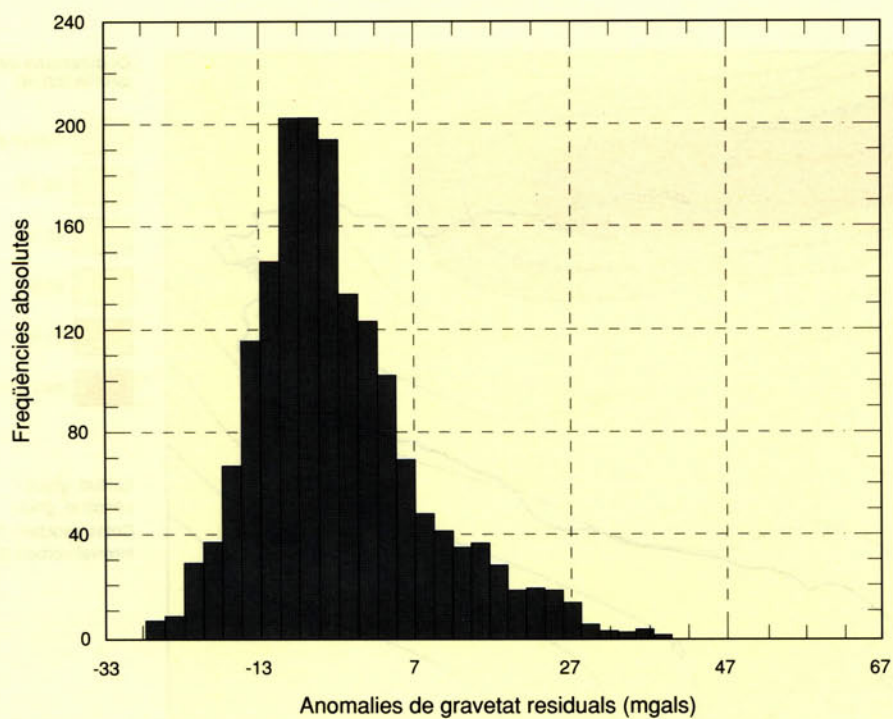
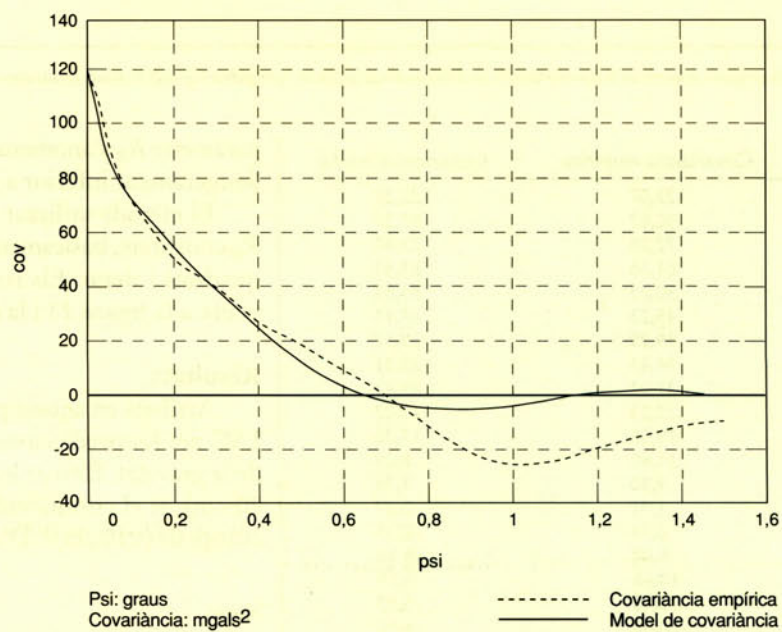


Figura 15: Covariància empírica i model de covariància



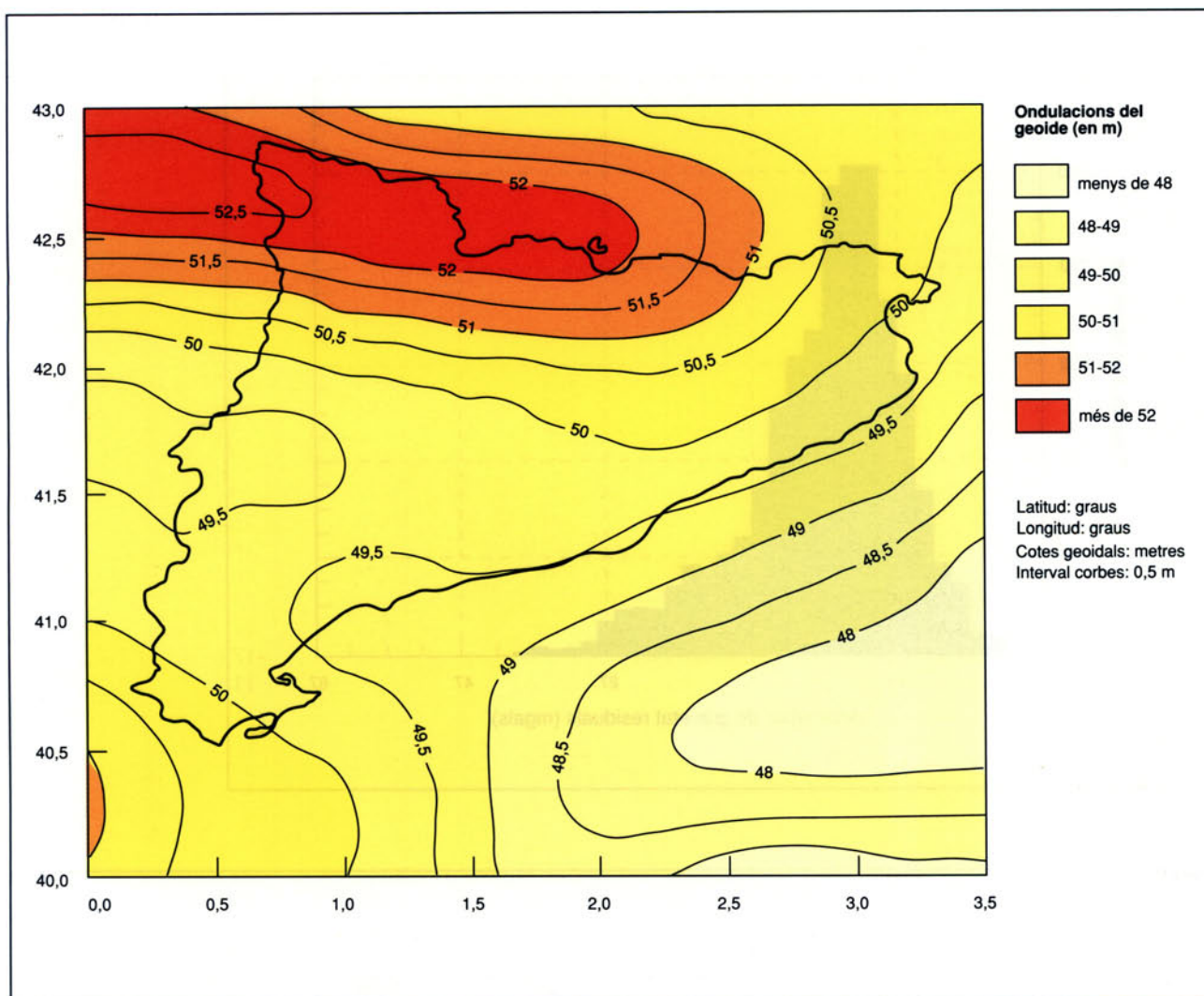


Figura 16: Geoida (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

Psi (gr.)	Covariància empírica	Covariància model
0,00	122,07	122,22
0,05	90,07	87,38
0,10	72,28	73,40
0,15	61,35	63,53
0,20	50,73	55,03
0,25	45,23	47,13
0,30	39,29	39,57
0,35	34,43	32,31
0,40	27,02	25,43
0,45	22,23	19,02
0,50	19,06	13,20
0,55	14,90	8,09
0,60	9,80	3,76
0,65	4,91	0,27
0,70	0,74	-2,35
0,75	-5,60	-4,16
0,80	-10,68	-5,19
0,85	-16,48	-5,53
0,90	-20,92	-5,31
0,95	-23,72	-4,64
1,00	-24,80	-3,67

Taula 2: Comparació de covariància empírica i model

paràmetre R_B s'anomena *radi de Bjerhammar* i té un valor lleugerament inferior a R .

El mètode utilitzat per a ajustar els paràmetres a , A , R_B consisteix, bàsicament, a linealitzar, ajustar per mínims quadrats i iterar. Els resultats en el nostre cas es poden veure a la figura 15 i la taula 2.

Resultats

Arribats en aquest punt, podem ja utilitzar el mètode LSC per fer prediccions de cotes geoidals o d'anomalies de la gravetat. L'error local que s'obté és encara gran (15-20 cm), si el comparem amb el que tenen altres països europeus (<10 cm)². D'altra banda, des del punt de vista

Nota:

2. H. DENKER, *GPS Control of the 1989 Gravimetric Quasigeoid for the Federal Republic of Germany*, i R. FORSBERG, *A New High-Resolution Geoid of the Nordic Area*. Comunicacions presentades en el 1st International Geoid Commission Symposium. Milà, 1990.

Nombre	Latitud (graus)	Longitud graus	H m	Delta G (mgal)		
				observacions	prediccions	diferència
18 219	42,609583	1,152444	1 390,7	43,04	34,51	8,53
21 403	42,470361	1,105472	1 155,1	11,86	13,90	-2,04
21 608	42,392972	1,689111	1 479,5	51,06	55,07	-4,01
22 011	42,352861	2,973778	85,0	13,19	13,55	-0,36
25 317	42,313472	1,278833	1 134,8	21,02	17,55	3,47
25 610	42,221361	2,234611	727,6	10,88	7,29	3,59
25 803	42,311306	2,841028	228,0	17,13	17,15	-0,02
29 002	42,120639	1,012194	590,8	-14,34	-15,63	1,29
29 126	42,142472	1,476167	1 221,9	38,52	32,05	6,47
29 402	42,048083	2,264444	508,3	3,84	2,22	1,62
29 526	42,098083	2,497306	507,6	15,41	14,47	0,94
29 607	42,149806	2,871722	135,0	7,98	10,17	-2,19
32 702	41,844222	0,742861	420,3	-15,60	-17,45	1,85
32 825	41,952889	1,059028	579,9	7,08	7,30	-0,22
33 020	41,838889	1,539694	906,4	36,17	38,02	-1,85
33 312	41,932250	2,516583	600,0	35,73	38,57	-2,84
35 945	41,739750	0,641611	259,0	-16,54	-16,01	-0,53
36 108	41,808694	1,277972	500,7	0,78	0,00	0,78
36 309	41,739056	1,978222	551,6	25,61	26,59	-0,98
36 513	41,676528	2,726944	66,8	18,15	21,41	-3,26
38 908	41,633611	0,933417	275,0	-17,22	-17,65	0,43
39 033	41,634583	1,337722	537,6	11,53	11,83	-0,30
39 217	41,517833	1,899639	113,6	-13,16	-11,61	-1,55
39 406	41,559222	2,504250	6,1	14,64	16,37	-1,73
41 636	41,483194	0,561111	209,5	1,13	0,55	1,68
41 817	41,388056	1,403389	601,3	29,21	30,57	-1,36
41 943	41,435278	1,592528	565,5	35,08	33,02	2,06
42 108	41,468250	2,187250	25,8	17,66	14,87	2,79
44 507	41,234444	0,846167	343,1	12,45	10,93	1,52
44 644	41,174444	1,470167	17,0	15,17	13,66	1,51
47 217	41,067750	0,946722	100,9	-8,45	-10,07	1,62
49 713	40,981417	0,582139	356,0	12,40	12,93	-0,53
52 225	40,739694	0,715806	3,1	0,08	-0,88	0,96

Nombre: 33

	Observacions	Prediccions	Diferència
Mitjana	12,77	12,25	0,53
Desviació estàndard	17,86	17,93	2,62

Taula 3: Comparació entre observacions i prediccions de GA

pràctic, el que interessa és l'error relatiu entre diferents punts, és a dir l'error de la diferència de cotes geoidals que estiguin separades per una certa distància. En aquest sentit, els nostres resultats tenen un error de l'ordre de 10 cm per cada 100 km.

Quant a la predicció d'anomalies de gravetat, els resultats són francament bons, com es pot observar a la taula 3.

Nota:

3. Per a una informació més actualitzada sobre l'estat d'aquesta recerca, vegi's la primera referència bibliogràfica

Línia a seguir en els propers mesos³

En primer lloc, cal dir que, d'acord amb la tècnica RR exposada anteriorment, ara hauríem d'afegir, als resultats de la figura 16, la contribució del RTM sobre el Geoide, però actualment no ho podem fer per manca d'un DTM en la zona perifèrica a Catalunya. Hom espera aconseguir aquest DTM a través de R. FORSBERG del National Survey and Cadastre (Charlottenlund, Dinamarca).

En segon lloc, i amb la intenció de disminuir els errors a la costa, caldria tenir gravimetria en el mar, cosa que esperem rebre de D. ARABELOS, del Departament de Geodèsia i Topografia de la Universitat de Tessalònica (Grècia).

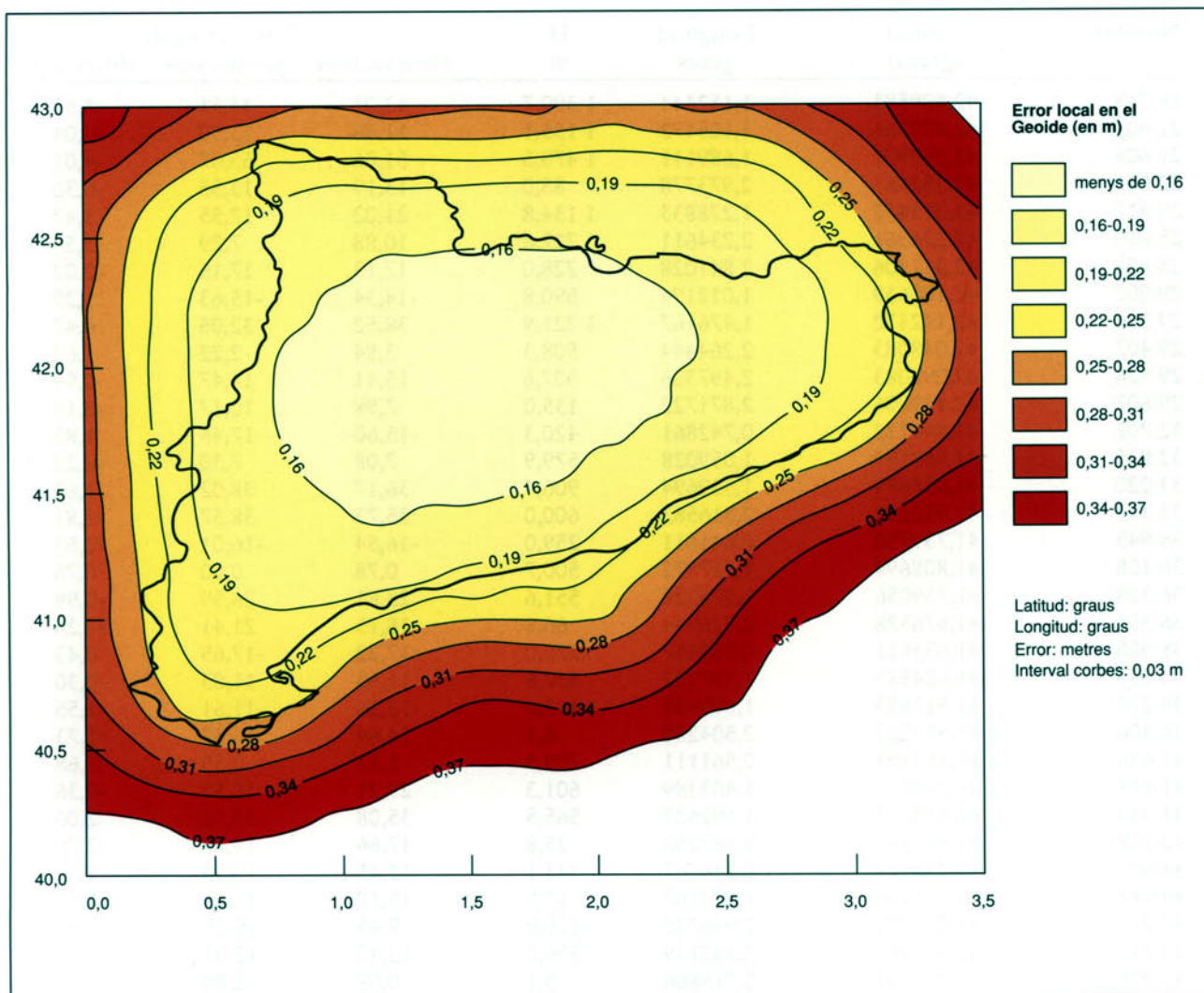


Figura 17: Error local en el Geoide (la projecció emprada en la representació de les dades no és cap projecció cartogràfica habitual; és només il·lustrativa dels resultats)

D'altra banda, l'ICC té planejat d'iniciar en els propers mesos una campanya de mesura de deflexions de la vertical, cosa que ha demostrat ser molt útil en països en els quals, com en el nostre, la influència de les regions muntanyoses és important. Tanmateix, actualment, l'ICC ha començat a fer mesures de posicionament tridimensional i podem, inicialment, comparar els resultats que es deriven d'aquestes mesures amb les nostres prediccions de cotes geoidals, així com, més tard, incloure en el càlcul d'un geoid més precís, les cotes geoidals que es dedueixen del posicionament tridimensional.

Agraïments

Volem donar les gràcies especialment a C.C. TSCHERNING, del Geophysical Institute (Copenhaguen, Dinamarca) per haver cedit el seu software a l'ICC, haver-nos dedicat alguns dies de les seves vacances, així com per tots els suggeriments i comentaris al nostre treball.

També hem d'agrair a A. CASAS, del Departament de Geoquímica, Petrologia i Prospecció Geològica de la Universitat de Barcelona, i a G. BALMINO, del Bureau Gravimétrique International de Tolosa de Llenguadoc, per les dades facilitades.

I a l'últim, i molt especialment, a l'Institut Cartogràfic de Catalunya, que ha finançat la realització d'aquest projecte, i ens ha proporcionat nombroses dades addicionals.

Data de recepció de l'original: 07.90

Miquel Àngel Andreu i Barrieras
Llicenciat en Ciències Matemàtiques

Carles Simó i Torres
Catedràtic d'Anàlisi Numèrica

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

BIBLIOGRAFIA

- ANDREU, M.A. i SIMÓ, C.: *Determinació del Geoide a Catalunya*. Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona.
- ARABELOS, D. i TSCHERNING, C.C.: "Gravity Field Mapping from Satellite Altimetry, Sea-Gravimetry and Bathymetry in the Eastern Mediterranean", a *Geophysical Journal*, núm. 92, pàgs. 195-206. 1988.
- CASAS, A., TORNÉ, M. i BANDA, E.: *Mapa Gravimètric de Catalunya*. Institut Cartogràfic de Catalunya. 1987.
- FORSBERG, R. i TSCHERNING, C.C.: "The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation", a *Journal of Geophysical Research*, volum 86, núm. B9, pàgs. 7843-7854. 1981.
- GOAD, C.C., TSCHERNING, C.C. i CHIN, M.M.: "Gravity Empirical Covariance Values for the Continental United States", a *Journal of Geophysical Research*, volum 89, núm. B9, pàgs. 7962-7968. 1984.
- HEISKANEN, W.A. i MORITZ, H.: *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional. 1985.
- KNUDSEN, P.: "Estimation and Modelling of the Local Empirical Covariance Function Using Gravity and Satellite Altimeter Data", a *Bulletin Geodesique*, volum 61, pàgs. 145-160. 1987.
- LAHMEYER, B.: "Gravity Field Continuation of Irregularly Spaced Data Using Least Squares Collocation", a *Geophysical Journal*, núm. 95, pàgs. 123-134. 1988.
- MORITZ, H.: *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Zona. ed. 1989.
- RAPP, R.H. i PAULIS, N.K.: "The Development and Analysis of Geopotential Coefficient Models to Spherical Harmonic Degree 360", a *Journal of Geophysical Research*. Per publicar. 1990.
- TSCHERNING, C.C., RAPP, R.H. i GOAD, C.: "A Comparison of Methods for Computing Gravimetric Quantities from High Degree Spherical Harmonic Expansions", a *Manuscripta Geodaetica*, volum 8, pàgs. 249-272. 1983.
- TSCHERNING, C.C.: *Local Gravity Field Approximation*. Beijing International Summer School. 1984.
- TSCHERNING, C.C.: "Geoid Modeling Using Collocation in Scandinavia and Greenland", a *Marine Geodesy*, volum 9, núm. 1. 1985.
- TSCHERNING, C.C. i FORSBERG, R.: "Geoid Determination in the Nordic Countries from Gravity and Height Data", a *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*. Anno XLVI-N. 1. 1987.
- TSCHERNING, C.C.: *Achievable Accuracy for Geoid Height Differences across the Strait of Gibraltar*. First International Workshop on Geodesy for the Europe-Africa Fixed Link Feasibility Studies in the Strait Gibraltar. 1989.

LA LUZ. EL PRINCIPIO DE LA CREACION

REPROGRAFIA INDUSTRIAL

COURTESY & ASSOCIATES

Fotolitos a la velocidad de la luz para la electrónica, dibujo técnico, sismografía, fotografía aérea y cartografía.

Materiales fotográficos adecuados para fotoplotters y producción de circuitos impresos en el sector de la electrónica.

Sistemas fotográficos completos para despachos de ingenieros, industria de construcción naval y de aviación,

empresas de servicios públicos, para dibujo sobre película fotográfica, copias intermedias, renovación de originales y archivo.

Películas para fotografía aérea y fotolitos con elevada estabilidad dimensional para la confección de mapas geográficos.



Tarjetas de identificación sistema Secucard, prácticamente imposibles de falsificar.



Sistemas completos que desde la pre-impresión ofrecen una garantía de calidad y seguridad en la comunicación industrial.

AGFA. LA CREACIÓN POR PRINCIPIO

SECTOR DE SISTEMAS GRAFICOS

- | | | |
|---------------------------|---|---|
| • COPIADORAS | • SISTEMAS DE PRE-IMPRESION ELECTRONICA (EPS) | • SISTEMAS DE PRE-IMPRESION FOTOGRAFICA (PPS) |
| - PUBLICACION COLOR | - COPYPROOF-CAMARAS | - SISTEMAS DE PRUEBAS |
| - EDICION ELECTRONICA | - PLANCHAS OFFSET | - REPROGRAFIA INDUSTRIAL |
| - PRESENTACIONES GRAFICAS | - PELICULA GRAFICA | - MATERIALES DE FOTOCOMPOSICION Y SCANNER |

AGFA

