

SUMAS ACUMULADAS CONJUNTAS TABLAS

C. POLO Y M. PEPIÓ

Laboratorio de Estadística

E.T.S.E.I.T. - U.P.C.

Las Tablas de la Longitud de Ráfaga Media (LRM) para los Gráficos de Control por Sumas Acumuladas (SUMAC) sólo se habían deducido para el control de la media de un proceso distribuido normalmente, si bien también puede salir fuera de control por la variabilidad. Este trabajo describe cómo seleccionar los parámetros de un esquema SUMAC, para la media y la desviación tipo muestrales, según la situación bajo control especificada conjuntamente por la media m_0 y la desviación tipo σ_0 , y el estado fuera de control de parámetros m_1 y σ_1 , mediante una Tabla LRM.

CUSUM for Location and Dispersion

Keywords: Longitud de ráfaga media, Sumas acumuladas, Respuesta inicial rápida.

1. INTRODUCCIÓN

Desde que W. A. Shewhart desarrolló en 1931 sus conocidos gráficos, \bar{X} y R , el control de los procesos de producción se ha basado casi exclusivamente en tales métodos. Sin embargo, en 1957, E. S. Page introdujo los fundamentos de una metodología de control alternativa, conocida como Gráficos de Control de Sumas

Acumuladas (SUMAC), que en los últimos años ha pasado a ser objeto de numerosas publicaciones, estudiando su eficacia, condiciones operativas, facilitando su aplicabilidad, así como su generalización al caso multivariable. En síntesis, el procedimiento ideado por Page consistía en asignar una puntuación, d_j , a la j -ésima muestra del proceso y dibujar las sumas $\sum_{1,r} d_j$ frente a r . Se consideraba que el proceso se había degradado, pasando a una situación fuera de control, en la primera r -ésima muestra para la cual

$$\sum_{j=1}^r d_j - \min_{k \leq r} \sum_{j=1}^k d_j > h,$$

donde h es el denominado límite o intervalo de decisión. Es decir, la decisión de que el proceso se ha modificado se toma cuando $\sum d_j$ ha superado, el resultado previo más pequeño, en un valor h o mayor.

La eficacia de un gráfico SUMAC se evalúa mediante el número de muestras requerido, en unas condiciones específicas del proceso, para superar h ; número que recibe la denominación de longitud de ráfaga (LR), y que, dependiendo del azar del muestreo, es una variable aleatoria. La distribución de la LR y sus parámetros miden, pues, la potencia de un esquema de control SUMAC, y se utiliza en la práctica para seleccionar el procedimiento apropiado a las condiciones específicas del proceso que se desea someter a control. No obstante, en general, la determinación del SUMAC se realiza en base a la media de la distribución de la longitud de ráfaga, que recibe la designación de longitud de ráfaga media (LRM).

2. EL MÉTODO SUMAC

Actualmente la tónica general consiste en puntuar el estado de un proceso mediante el logaritmo neperiano de la razón de verosimilitud. El método SUMAC señala, que se ha producido una modificación del proceso cuando el acumulador, asociado a la r -ésima y última medición, AC_r , es tal que

$$AC_r = \sum_{i=1}^r \lg [f_1(x_i)/f_0(x_i)] - \min_{k \leq r} \sum_{i=1}^k \lg [f_1(x_i)/f_0(x_i)] > L,$$

donde f_0 representa la verosimilitud de la observación cuando el proceso está en la situación óptima, y f_1 la relativa a una situación del proceso degradada que se desea detectar rápidamente, y L es el intervalo o límite de decisión.

El acumulador AC_r puede calcularse recurrentemente de la forma

$$AC_r = \max \{AC_{r-1} + \lg [f_1(x_r)/f_0(x_r)]; 0\},$$

asimismo se puede modificar la escala dividiendo el logaritmo neperiano de $f_1(x)/f_0(x)$ y L por la misma constante. Como valor inicial del acumulador AC_0 , se puede tomar cualquier número entre 0 y L , sin embargo, para mejorar su respuesta en el arranque, tanto en la implantación como después de una acción correctiva, Lucas y Crosier (1982) recomiendan tomar $AC_0 = L/2$, elección que, también, está avalada por las consideraciones que se expondrán en relación a la LRM.

Se ha de hacer hincapié en que la expresión del acumulador, por estar basado en la razón de verosimilitudes, es único cualquiera que sea la degradación que se desee detectar, ya un aumento ya una disminución de la característica de tendencia central del proceso, ya un aumento de la variabilidad, y que es en la aplicación del acumulador, a la característica y degradación que se desea detectar, como se obtiene la expresión pertinente a un control unilateral o bilateral, como se observará en la determinación de un control conjunto, bilateral para la media y unilateral para la variancia, de una variable aleatoria normal, expuesta seguidamente.

En el caso de una variable aleatoria normal, $X \sim N(m; \sigma^2)$, que se controla periódicamente mediante una muestra de tamaño n , se debe comprobar que tanto la media como la variancia muestrales toman valores que permitan considerar que el proceso está operando en las condiciones deseadas o, por el contrario, constatar su degradación para emprender las acciones correctivas pertinentes. La utilización de estos estadísticos para el control del proceso no sólo se fundamenta en su suficiencia y completitud sino, también, en su independencia (el proceso está caracterizado por una variable cuya distribución es normal), por lo cual el SUMAC de cada uno de los estadísticos de control puede determinarse independientemente del otro (en forma similar a la determinación de los gráficos \bar{X} y R de Shewhart).

a) SUMAC para el control de la tendencia central

La determinación de la expresión de los acumuladores del SUMAC, para el control del centrado del proceso de producción, se fundamenta en la razón de verosimilitudes de la muestra, bajo la hipótesis de que el proceso está bajo control, $X \sim N(m_0; \sigma_0^2)$, frente a la hipótesis de que ha sufrido un desplazamiento del valor medio, por lo que $X \sim N(m_1; \sigma_0^2)$. Así

$$\begin{aligned} \lg [f_1(\underline{x})/f_0(\underline{x})] &= [n(m_1 - m_0)/\sigma_0^2] [\bar{x} - (m_1 + m_0)/2] \\ &= [n(m_1 - m_0)/\sigma_0] [(\bar{x} - m_0)/\sigma_0 - (m_1 - m_0)/(2\sigma_0)]. \end{aligned}$$

a.1) Acumulador superior

Si $m_1 > m_0$, es decir cuando se desea controlar una inaceptable degradación del proceso, por un crecimiento del valor medio de m_0 hasta el valor m_1 , y este desplazamiento superior reducido que se quiere detectar se designa como $D_L = (m_1 - m_0)/\sigma_0$, el valor de referencia es $D_L/2$, y el estadístico de control $Y = (\bar{X} - m_0)/\sigma_0$. El acumulador, U_r , después de dividir por el factor de escala $n(m_1 - m_0)/\sigma_0$, resulta ser

$$U_r = \max [U_{r-1} + Y_r - D_L/2; 0],$$

y se considera que el proceso se ha descentrado cuando U_r es mayor que HM, intervalo de decisión para la media del proceso.

a.2) Acumulador inferior

Si $m_0 > m_1$, ya que se desea detectar una disminución del valor medio del proceso, entonces $m_1 - m_0 = (-1)|m_1 - m_0|$, y

$$\begin{aligned} \lg [f_1(\underline{x})/f_0(\underline{x})] &= [-n|m_1 - m_0|/\sigma_0] [(\bar{x} - m_0)/\sigma_0 + |m_1 - m_0|/(2\sigma_0)] \\ &= [n|m_1 - m_0|/\sigma_0] [-(\bar{x} - m_0)/\sigma_0 - |m_1 - m_0|/(2\sigma_0)], \end{aligned}$$

siendo, ahora, $D_L = |m_1 - m_0|/\sigma_0$, el desplazamiento inferior absoluto reducido, e I_r el acumulador,

$$I_r = \max [I_{r-1} - Y_r - D_L/2; 0],$$

detectándose, con el riesgo asociado, un descentramiento inferior cuando I_r supere a HM.

En general, por la simplicidad que representa utilizar los mismos valores de referencia, $D_L/2$, y límites de decisión, HM, para ambos acumuladores, los valores medios, m_1 , se toman simétricos respecto a m_0 , en el caso de controles bilaterales, llevando a cabo conjuntamente el estudio de la evolución de ambos acumuladores.

b) Control de la dispersión

Para determinar mediante un esquema SUMAC si la variabilidad del proceso se mantiene en el nivel deseado, cuantificado por el valor σ_0^2 de la variancia, o ha aumentado a un valor $A^2\sigma_0^2$, donde A es el coeficiente de amplificación, que se desea detectar, el logaritmo neperiano de la razón de verosimilitudes de la cuasivariancia muestral, S^2 , es

$$\begin{aligned}\lg [f_1(S^2)/f_0(S^2)] &= \{(n-1)S^2 [1/\sigma_0^2 - 1/(A^2\sigma_0^2)] - (n-1)\lg A^2\} / 2 \\ &= [(n-1)(A^2-1)/(2A^2)] [S^2/\sigma_0^2 - A^2\lg A^2/(A^2-1)]\end{aligned}$$

tomando el factor constante $(n-1)(A^2-1)/(2A^2)$ como modificación de la escala; S^2/σ_0^2 como el estadístico de control y $A^2\lg A^2/(A^2-1)$ como valor de referencia, el acumulador toma la forma

$$V_r = \max [V_{r-1} + S_r^2/\sigma_0^2 - A^2\lg A^2/(A^2-1); 0],$$

considerándose que la variabilidad se ha degradado, aumentando hasta $A^2\sigma_0^2$, cuando el acumulador V_r es mayor que el intervalo de decisión de la cuasivariancia, HS.

3. TABLAS DE LAS LONGITUDES DE RÁFAGA MEDIA

Fijados el tamaño de la muestra, así como el desplazamiento reducido y la amplificación a detectar, la eficacia de un control SUMAC queda establecida por los valores elegidos para los límites de decisión HM y HS, y medida por la longitud de ráfaga media.

La longitud de ráfaga media, LRM, es el número de muestras que se examinará, en promedio, para obtener una señal de que el proceso está fuera de control (es decir, para que el acumulador supere el límite de decisión). Por tanto, si el proceso está en el nivel de calidad deseado, la LRM deberá ser grande, pues, en este caso, superar el intervalo de decisión representaría una falsa señal; en cambio, si el proceso está degradado, la LRM debe ser muy pequeña, al objeto de detectarlo rápidamente y corregirlo.

Las Tablas de las LRM publicadas son exclusivas del control de la media del proceso, ya unilateral ya bilateral, y para su obtención se pueden utilizar dos procedimientos. El primero, debido a Page, resuelve una ecuación integral mediante un sistema de ecuaciones lineales, empleando una cuadratura de Gauss de 24 puntos. El sistema alternativo, propuesto por Brook y Evans, utiliza unas cadenas de Markov, substituyendo el esquema continuo del SUMAC por otro que representa $t + 1$ estados posibles, el inicial corresponde al SUMAC en el nivel cero, y el último, que es el de absorción, a un nivel mayor que el intervalo de decisión.

Diversos autores han obtenido las LRM situando el SUMAC en cero, $AC_0 = 0$, que siendo el menor valor posible, implica que esas LRM son conservadoras, en el sentido de que las reales son ligeramente inferiores.

Una forma objetiva, si bien particular, de tener en cuenta que, raramente, cuando se produzca la degradación del proceso, el acumulador será cero, es adoptar, como sugieren Lucas y Crosier (1982), como valor inicial del acumulador la mitad del intervalo de decisión y evaluar la LRM asumiendo que, cuando se produce la degradación, el acumulador ha tomado ese valor.

El hecho de no disponer de unas tablas de la LRM conjunta para el control simultáneo, tanto de la tendencia central como de la variabilidad, motivaron a los autores a obtener esas tablas de la LRM asociada a un control SUMAC total, bilateral para la media del proceso y unilateral para la dispersión, según el desarrollo expuesto anteriormente. Las tablas en cuestión presentan las LRM en función de posibles valores de los parámetros: n, D, A, HM y HS ; la cantidad de parámetros, la relativa complejidad de los cálculos requeridos, así como las aproximaciones y límites necesarios, indujeron a obtener esas tablas por simulación, cuyas bases se comentan seguidamente.

4. OBTENCIÓN DE LAS TABLAS DE LA LRM

Siendo la población $X \sim N(m; \sigma^2)$, el proceso se considera bajo control cuando $m = m_0$ y $\sigma^2 = \sigma_0^2$, deseando detectar una situación límite en la que la distribución de X sea tal que $m = m_1$ y $\sigma^2 = A^2 \sigma_0^2$. En este caso, el desplazamiento y la amplificación límites son $D_L = (m_1 - m_0)/\sigma_0$ y $A_L = A$; los valores de referencia $D_L/2$ y $A_L/2^2 \lg A_L^2 / (A_L^2 - 1)$, y los acumuladores toman la forma:

$$U_r = \max [U_{r-1} + Y_r - D_L/2; 0]$$

$$I_r = \max [I_{r-1} - Y_r - D_L/2; 0]$$

$$V_r = \max [V_{r-1} + S_r^2/\sigma_0^2 - A_L^2 \lg A_L^2 / (A_L^2 - 1); 0]$$

con $Y = (\bar{X} - m_0)/\sigma_0$, $U_0 = I_0 = HM/2$ y $V_0 = HS/2$.

Si la distribución real del proceso presenta un desplazamiento reducido $D = (m - m_0)/\sigma_0$ y una amplificación A , tal que $\sigma^2 = A^2\sigma_0^2$, la distribución del estadístico de control de la media es $Y \sim N(D; A^2\sigma_0^2/n)$, y la de la variabilidad verifica que $(n - 1)S^2/(A^2\sigma_0^2) \sim \chi^2$, con parámetro $\nu = n - 1$, siendo ambos estadísticos independientes, por lo que se pueden simular separadamente.

Cada simulación da lugar a Y y S^2/σ_0^2 , los dos estadísticos muestrales con los que se procede a calcular los respectivos acumuladores; repitiendo el proceso hasta que su valor supera el intervalo de decisión, ya sea por desplazamiento ya sea por dispersión, momento en que se restituyen los acumuladores a sus valores iniciales, U_0 , I_0 y V_0 , y se acumula una ráfaga. El número de muestras simuladas hasta conseguir una señal fuera de control es la longitud de ráfaga. Los valores medios de las longitudes de ráfaga LRM, se han obtenido como promedio de un número de ráfagas comprendido entre 1000 y 10000 según fuese la variabilidad.

Las Tablas 1-4 proporcionan las LRM para los esquemas SUMAC con muestras de tamaño 4 y 5. (Polo y Pepió (1990) presentan un conjunto más completo de tablas.)

TABLE I

$n = 4$		$D_L = 1$			$A_L = 1.50$	
		$A = 1$	$A = 1.25$		$A = 1.5$	
HM	HS	$D = 0$	$D = 0.5$	$D = 1$	$D = 0.5$	$D = 1$
1	4	81.67	4.23	1.87	2.53	1.71
2		218.72	6.98	2.62	3.32	2.18
3		219.42	10.01	3.18	3.79	2.55
4		222.67	13.15	4.02	4.10	2.92
5		226.10	14.85	4.43	4.32	3.25
1	6	118.05	4.52	1.82	2.79	1.78
2		1007.90	8.82	2.74	3.92	2.39
3		1237.77	12.64	3.56	4.75	2.95
4		1237.77	15.19	4.26	5.10	3.39
5		1237.77	18.63	5.15	5.38	3.72
1	8	131.62	5.19	1.94	3.10	1.90
2		3839.54	9.51	2.79	4.71	2.54
3		>5000	14.24	3.72	5.63	3.27
4		>5000	18.08	4.66	6.04	3.78
5		>5000	21.78	5.42	6.35	4.22
1	10	133.05	5.19	1.96	3.25	1.94
2		>5000	10.68	2.95	5.32	2.66
3		>5000	16.69	3.73	6.17	3.43
4		>5000	21.83	4.73	7.00	4.06
5		>5000	25.16	5.49	7.33	4.54

TABLA II

$n = 5$		$D_L = 1$			$A_L = 1.50$	
		$A = 1$	$A = 1.25$		$A = 1.50$	
HM	HS	$D = 0$	$D = 0.50$	$D = 1$	$D = 0.50$	$D = 1$
1	4	404.83	4.66	1.83	2.62	1.59
2		>5000	8.55	2.63	3.39	2.17
3		>5000	11.33	3.36	3.72	2.61
4		>5000	14.89	4.10	4.14	2.95
5		>5000	16.60	4.77	4.14	3.24
1	6	416.28	5.41	1.87	2.98	1.72
2		>5000	9.99	2.70	4.13	2.37
3		>5000	14.28	3.68	4.82	2.91
4		>5000	17.70	4.32	4.94	3.35
5		>5000	21.25	5.36	5.31	3.84
1	8	416.28	5.97	1.90	3.38	1.87
2		>5000	10.88	2.83	4.88	2.59
3		>5000	16.13	3.72	5.45	3.13
4		>5000	20.91	4.60	5.86	3.84
5		>5000	25.33	5.56	6.18	4.26
1	10	416.28	5.97	1.91	3.72	1.90
2		>5000	12.56	2.87	5.45	2.69
3		>5000	18.78	3.88	6.48	3.30
4		>5000	23.23	4.91	7.06	4.16
5		>5000	28.87	5.67	7.20	4.67

TABLA III

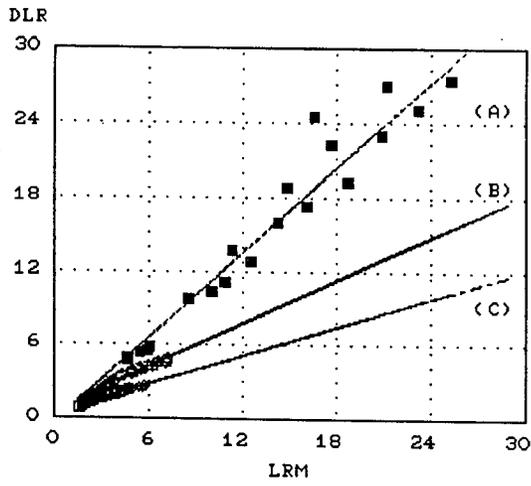
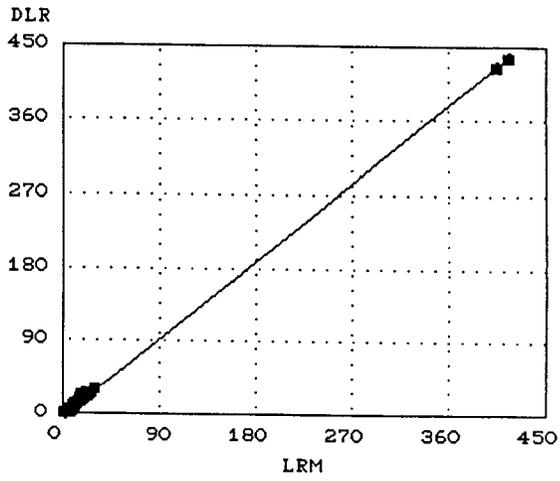
$n = 4$		$D_L = 1.5$			$A_L = 2.50$	
		$A = 1$	$A = 1.75$		$A = 2.50$	
HM	HS	$D = 0$	$D = 1$	$D = 1.5$	$D = 1$	$D = 1.5$
1	4	783.75	1.97	1.39	1.30	1.20
2		1403.87	2.45	1.69	1.40	1.32
3		1403.87	2.90	2.01	1.51	1.40
4		1403.87	3.22	2.29	1.60	1.48
5		1403.87	3.32	2.65	1.65	1.55
1	6	1707.64	2.03	1.48	1.40	1.26
2		>5000	2.85	1.90	1.54	1.42
3		>5000	3.45	2.20	1.69	1.53
4		>5000	3.88	2.58	1.81	1.64
5		>5000	4.04	2.91	1.85	1.70
1	8	1802.39	2.19	1.56	1.45	1.31
2		>5000	3.04	1.98	1.76	1.50
3		>5000	3.83	2.42	1.87	1.63
4		>5000	4.31	2.83	1.95	1.78
5		>5000	4.82	3.29	2.10	1.88
1	10	1802.39	2.38	1.57	1.58	1.38
2		>5000	3.28	2.11	1.82	1.57
3		>5000	4.14	2.57	2.00	1.79
4		>5000	4.82	2.97	2.17	1.90
5		>5000	5.42	3.44	2.28	2.06

TABLA IV

$n = 5$		$D_L = 1.5$			$A_L = 2.50$	
		$A = 1$	$A = 1.75$		$A = 2.50$	
HM	HS	$D = 0$	$D = 1$	$D = 1.5$	$D = 1$	$D = 1.5$
1	4	>5000	2.02	1.40	1.28	1.22
2		>5000	2.51	1.77	1.40	1.31
3		>5000	2.92	2.13	1.49	1.40
4		>5000	3.50	2.42	1.58	1.46
5		>5000	3.61	2.78	1.61	1.55
1	6	>5000	2.13	1.40	1.37	1.26
2		>5000	2.85	1.87	1.55	1.36
3		>5000	3.46	2.22	1.63	1.48
4		>5000	3.81	2.62	1.75	1.58
5		>5000	4.10	2.97	1.73	1.61
1	8	>5000	2.44	1.50	1.53	1.29
2		>5000	3.16	1.93	1.69	1.49
3		>5000	3.82	2.45	1.83	1.66
4		>5000	4.55	2.89	1.84	1.73
5		>5000	4.99	3.20	1.94	1.83
1	10	>5000	2.45	1.55	1.60	1.38
2		>5000	3.44	2.00	1.80	1.60
3		>5000	4.22	2.50	2.02	1.73
4		>5000	5.12	3.07	2.17	1.95
5		>5000	5.41	3.54	2.18	2.02

5. VARIANCIA DE LA LONGITUD DE RÁFAGA

La simulación ha permitido evaluar, además de las longitudes de ráfaga medias, LRM, las variancias de las longitudes de ráfaga, VLR. Denotando por DLR a la desviación tipo, $DLR = \sqrt{VLR}$, su relación con LRM se muestra en la Fig. 1, que corresponde a los valores de la Tabla 2, ($n = 5; D_L = 1; A_L = 1, 50$). En ella se observa una dependencia lineal muy buena



Figs. 1y 2. Relación entre LRM y DLR.

El ajuste de la recta mínimo cuadrática a los 82 pares de valores da como resultado $DLR = -0,911 + 1,049 * LRM$, con un coeficiente de correlación $r = 0,9997$.

A pesar de este valor tan elevado, índice del grado de ajuste, la observación de los datos pone de manifiesto que cubren un espectro muy amplio de valores, del orden de 450 unidades, y la mayoría de ellos están en la zona próxima al origen, $(0 \div 30)$, correspondiendo los más extremos al caso de proceso bajo control. La Fig. 2 es una ampliación de la anterior, en las proximidades del origen, y en ella se detecta la posible existencia de tres tendencias distintas. Las rectas ajustadas a estos colectivos dieron como resultados:

$$\begin{array}{llll}
 D = 0,50 & A = 1,50 & DLR = 0,82 + 0,577 * LRM & r = 0,98 \quad (B) \\
 D = 0,50 & A = 1,25 & DLR = -0,19 + 1,138 * LRM & r = 0,97 \quad (A) \\
 D = 1,00 & A = 1,25 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} D = 0,50 \\ D = 0,50 \end{array}} \right\} & \\
 D = 1,00 & A = 1,50 & DLR = 0,56 + 0,384 * LRM & r = 0,97 \quad (C)
 \end{array}$$

Obteniéndose resultados similares con el resto de las tablas, relativas a los otros valores críticos, D_L y A_L . Como consecuencia, y considerando a efectos generales la dependencia funcional entre LRM y DLR conjunta, se puede asumir que la desviación tipo de la longitud de ráfaga, DLR, es, en el peor de los casos, del mismo orden que la media, LRM; por tanto, dado que las LRM simuladas se han obtenido como promedio de 1000 ráfagas, como mínimo, en las condiciones más desfavorables, el error tipo de la estimación no es superior a $LRM/\sqrt{1000}$.

6. COMPARACIÓN CON LOS VALORES DE LRM DE OTROS AUTORES

Lucas y Crosier presentan tablas de LRM para el control de la media de un proceso, bajo el supuesto de que la variabilidad se mantiene constantemente bajo control. Para estos autores el desplazamiento viene reducido con la desviación tipo de la media muestral, de forma que su estadístico es $Y = (\bar{X} - m_0)\sqrt{n}/\sigma_0$, lo que representa un cambio de escala de factor \sqrt{n} respecto a los valores que se presentan en este trabajo, factor que también afecta a los valores de referencia y a los intervalos de decisión.

El hecho de llevar a cabo el control simultáneo de la tendencia central y de la variabilidad hace que los valores de las LRM presentadas no sean estrictamente comparables con las de Lucas y Crosier (LC). Sin embargo, para los casos de $A_L = 2,5$ y $HS = 10$, que son los menos exigentes en el control de la variabilidad,

dentro del conjunto de las presentes tablas, el número de falsas señales por variabilidad, cuando el proceso no tiene amplificación, $A = 1$, será negligible y la práctica totalidad de las señales serán debidas al desplazamiento. Así pues, se trata de una situación muy próxima a la de LC y es en la que se basa la comparación que se va a llevar a cabo.

En las Tablas 5 y 6 se presentan las longitudes de ráfaga media acompañadas del valor del error tipo de la estimación, que figura entre paréntesis, y que pone de manifiesto la buena precisión del método. Los valores de las LRM debidas a Lucas y Crosier presentan una proximidad muy elevada con las de la metodología presentada, para estos valores de la calidad rechazable que dan lugar a casos comparables.

TABLA V

$D_L = 0.5 \quad (D_L * \sqrt{n} = 1)$										
D	0		0.25		0.50		0.75		1.00	
HM		LC		LC		LC		LC		LC
1	14.89	15.13	7.02 (7.44)	7.17	3.10 (2.67)	3.09	1.88 (1.20)	1.87	1.41 (0.68)	1.40
2	147.51	148.70	19.70 (20.4)	20.06	5.27 (4.16)	5.29	2.87 (1.63)	2.86		
3	1217.61	1215.00	38.86 (41.1)	38.71	7.45 (5.25)	7.38	3.89 (1.92)	3.88		

LC = Lucas y Crosier (1982)

(...) = 100 * error tipo

TABLA VI

$D_L = 1 \quad (D_L * \sqrt{n} = 2)$										
D	0		0.25		0.50		0.75		1.00	
HM		LC		LC		LC		LC		LC
1	135.72 (145)	120.81	34.04 (37.1)	33.57	7.57 (7.81)	7.77	3.09 (2.58)	3.12	1.87 (1.20)	1.87

LC = Lucas y Crosier (1982)

(...) = 100 * error tipo

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Crosier, R.B.** (1986). "A new Two-sided Cumulative Sum Quality Control Scheme". *Technometrics*, 28, 187-194.
- [2] **Goel, A.L.** (1971). "Determination of ARL and a Contour Nomogram for CUSUM Charts to Control normal Mean". *Technometrics*, 13, 221-230.
- [3] **Healey, J.D.** (1987). "A Note on Multivariate CUSUM Procedures". *Technometrics*, 29, 409-412.
- [4] **Lucas, J.M. y Crosier, R.B.** (1982). "Fast initial Response for CUSUM Charts to Control Normal Schemes". *Technometrics*, 24, 199-205.
- [5] **Lucas, J.M.** (1985). "Counted Data CUSUM's". *Technometrics*, 27, 129-144.
- [6] **Page, E.S.** (1957). *Biometrika*, 44, 248-252.
- [7] **Pepió, M. y Polo, C.** (1986). "Esquemas de Control por Sumas Acumuladas". CEAM, 197, 23-28.
- [8] — (1987a). "Informatización del Control de Calidad". *Novamáquina*, 131, 135-139.
- [9] — (1988). "Control de Calidad por Sumas Acumuladas". *Qüestió*, 12-1, 4357.
- [10] — (1990). "Sumas Acumuladas Conjuntas. Tablas". I.I. 1/90.
- [11] **Vanderman, S. y Ray, D.** (1985). "Average Run Length for CUSUM Schemes when Observations are Exponentially Distributed". *Technometrics*, 27, 145-150.
- [12] **Waldmann, K.H.** (1986). "Bounds for the Distribution of the Run Length of One-sided CUSUM Quality Control Schemes". *Technometrics*, 28, 61-68.
- [13] **Woodall, W.H.** (1983). "The Distribution of the Run Length of One-sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables". *Technometrics*, 25, 295-301.
- [14] — (1984). "On Markov Chain Approach to the Two-sided CUSUM". *Technometrics*, 26, 41-46.
- [15] **Woodall, W.H. y Ncube, M.M.** (1986). "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures". *Technometrics*, 27, 185-199.

