Sobre la Obtención de Tests de Potencia Garantizada

E. MORA, E. CASTILLO, J. PUIG PEY

Este trabajo analiza y discute el planteamiento clásico de los tests de hipótesis compuesta frente a alternativa compuesta especialmente en lo que se refiere a los tests uniformemente más potentes, haciéndo notar que las condiciones que se exigen a éstos son demasiado fuertes, por lo que sólo existen en casos muy particulares. Este motivo conduce al estudio de los tests maximín o de potencia garantizada, que al exigir menos condiciones existen en la mayor parte de los casos, dándose un teorema que proporciona una nueva metodología para la obtención de dichos tests.

Por otra parte, al ser las condiciones requeridas para estos tests, parte de las que se precisan para los uniformemente más potentes, estos últimos, si existen, pueden obtenerse con la metodología propuesta.

Finalmente el método se ilustra con algunos ejemplos.

1. INTRODUCCION

El problema de los tests más potentes en el caso de hipótesis simple frente a alternativa simple quedó definitivamente resuelto en el momento en que Neyman y Pearson publicaron su trabajo "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses", /1/ . Sus conclusiones fueron posteriormente mejoradas y generalizadas por otros autores (/2/, etc.) . Sin embargo , no puede decirse lo mismo para el caso de que una o ambas hipótesis sean compuestas. En este supuesto se conocen,/3/,soluciones a algunos casos particulares, como por ejemplo el caso de familias exponenciales, pero falta una solución general del problema análoga a la dada por Neyman y Pearson. Por otra parte, los conocidos tests de razón de verosimilitud, también propuestos por los mismos autores en /4/ , aunque resuelven el problema de forma general, no constituyen una solución satisfactoria, ya que se basan en un principio arbitrario, aunque consistente con la solución citada anteriormente.

Ante este panorama, sería interesante conocer una metodología general para obtener tests más potentes en el caso de hipótesis compuesta frente a alternativa compuesta. Además debería resultar de una idea de minimización de los errores de tipo II para un tamaño del test acotado, sin utilizar ninguna otra hipótesis que pudiera considerarse como arbitraria.

En los párrafos que siguen se aborda este problema y se obtiene una metodología general que, además de ser consistente con los resultados de Neyman y Pearson, no utiliza hipótesis arbitrarias.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Previamente a entrar de lleno en el tema de este trabajo, se hace necesario revisar de nuevo los conceptos básicos de los tests de hipótesis, ya que en ellos está el origen de esta nueva metodología.

Sea $\{F(x;\theta);\ \theta\in\Omega\subset \mathbb{R}^p;\ x\in X\subset \mathbb{R}^n\}$ una familia de funciones de distribución, donde θ es un vector paramétrico, Ω es el espacio paramétrico y X es el espacio de definición (normalmente el espacio muestral) de una variable aleatoria n-dimensional.

Supóngase que trata de contrastarse la hipótesis nula de que $\theta\in\omega\subset\Omega$ frente a la hipótesis alternativa de que $\theta\in\Omega-\omega$ y que $R\subset X\cap\beta^n$ (β^n es la σ-álgebra de Borel) es la región

- E. Mora, E. Castillo i J. Puig-Pey. Escuela de Ingenieros de Caminos, Can. y Puertos. Dept. de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería. Avda. de los Castros, s/n. Santander.
- Article rebut el Maig del 1980.

de rechazo. El error de tipo I para este test es, por definición, la probabilidad de rechazar la hipótesis siendo cierta, es decir:

$$\text{Prob } (R/\theta)\text{; } \theta\in\omega \tag{1}$$

El error de tipo II es, también por definición, la probabilidad de aceptar la hipótesis siendo falsa, es decir:

$$\text{Prob } (X\text{-}R/\theta)\text{; } \theta\in\Omega-\omega \tag{2}$$

Por otra parte, la potencia del test se define como:

$$\text{Prob } (R/\theta)\text{; } \theta\in\Omega-\omega \tag{3}$$

En el caso de que tanto la hipótesis nula como la alternativa sean simples, es decir, que tanto ω como $\Omega-\omega$ se reduzcan a un punto, los errores de tipo I, de tipo II y la potencia quedan perfectamente determinados con el conocimiento de la región R. Por tanto, el problema de la obtención de tests óptimos puede reducirse a minimizar el error de tipo II (o maximizar la potencia) con respecto a R para un error de tipo I acotado; es decir, que "test óptimo" se hace equivalente a "test de máxima potencia" para un error de tipo I acotado. Sin embargo, si alguna o ambas hipótesis son compuestas, es decir, ω y/o $\Omega-\omega$ contienen más de un punto, tanto los errores de tipo I y/o los de tipo II y la potencia no sólo son funciones de R, sino que también dependen de θ, por lo que puede darse el caso, bien de que el error de tipo I satisfaga la acotación, o que se verifique la condición de máxima potencia, sólo para algunos valores de θ. Por todo ello, se hace necesario introducir conceptos nuevos que permitan el planteamiento de tests óptimos. De esta forma surge el concepto de tamaño del test, que se define mediante:

$$\text{Tamaño del test}=\sup_{\theta\in\omega} \text{Prob}(R/\theta) \tag{4}$$

cuyo significado físico es claro, ya que representa la menor de las cotas superiores del error de tipo I para todos los valores de θ de la hipótesis nula, es decir, que el error de tipo I será como mucho el tamaño del test, para una R fija, si bien, puede ser inferior. Además no existe mejor cota de ese error de tipo I que el tamaño del test.

Por otra parte, como el tamaño del test para hipótesis nula simple coincide con el error de tipo I, el problema de los tests óptimos puede plantearse, en este caso, como maximización de la potencia con respecto a R para un tamaño del test acotado.

De esta forma queda perfectamente planteado el problema en el caso de hipótesis nulas compuestas frente a alternativa simple, pero permanece cuando la alternativa es compuesta. Para resolver este inconveniente, muchos autores imponen a los tests de hipótesis más potentes, que lo sean además uniformemente, es decir, que si $R_o c X\cap\beta^n$ es la región de rechazo, debe ser:

$$\text{Prob}[R_o/\theta] \geq \text{Prob}[R/\theta]\text{;}$$

$$\forall\, R c X\cap\beta^n\text{; } \forall\, \theta\in\Omega-\omega \tag{5}$$

con lo cual desaparece la dependencia de θ en el caso de alternativa compuesta.

Por tanto, el planteamiento clásico de un test óptimo (en el sentido de uniformemente más potente) consiste en obtener $R_o\in C_\alpha$ de forma que

$$\text{Prob}[R_o/\theta] \geq \text{Prob}[R/\theta]\text{;}$$

$$\forall\, \theta\in\Omega-\omega\text{; } \forall\, R\in C_\alpha \tag{6}$$

donde

$$C_\alpha=\{R c X\cap\beta^n/\sup_{\theta\in\omega} \text{Prob}[R/\theta] \leq \alpha\} \tag{7}$$

Otro posible planteamiento ya propuesto por Lehmann /5/ y conocido como el de los tests maximín o de potencia garantizada llevaría a obtener $R_o\in C_\alpha$ verificando:

$$\inf_{\theta\in\Omega-\omega} \text{Prob}[R_o/\theta] \geq \inf_{\theta\in\Omega-\omega} \text{Prob}[R/\theta]\text{;}$$

$$\forall\, R\in C_\alpha \tag{8}$$

lo cual conduce a un test tal que el supremo de los errores de tipo II es ínfimo, ya que dicha expresión equivale a:

$$\sup_{\theta\in\Omega-\omega} \text{Prob}[X\text{-}R_o/\theta] \leq \sup_{\theta\in\Omega-\omega} \text{Prob}[X\text{-}R/\theta]\text{;}$$

$$\forall\, R\in C_\alpha$$

Por otra parte, trivialmente, toda solución

R, de (6), lo es de (8).

Por la teoría de los tests de hipótesis actual, se sabe que el problema (6) no admite solución general. Por todo esto, el planteamiento (8) se considera como el más adecuado en el sentido de que admite solución general como luego se verá, y porque da la solución de (6) en el caso de que ésta exista.

Por tanto, el problema de los tests óptimos puede plantearse como obtener $R_o \subset X\cap\beta^n$ que maximiza el extremo inferior de la potencia en $\Omega-\omega$ es decir, que maximiza la expresión:

$$\inf_{\theta\in\Omega-\omega} \int_R d\, F(x;\theta) \tag{9}$$

con la condición (tamaño del test acotado):

$$\sup_{\theta\in\omega} \int_R d\, F(x;\theta) \leq \alpha \tag{10}$$

De la solución, R_o, de este problema se dirá que corresponde al "test maximín o de potencia garantizada".

Lehmann /6/ , mediante la distribución menos favorable da algunos teoremas para obtener estos tests en casos muy particulares. - Sin embargo, no consigue un método para encontrar prácticamente estas distribuciones, con lo que la obtención de los tests de potencia garantizada queda sin resolver. Los - párrafos que siguen dan una solución a este problema.

Previamente a este desarrollo se propone un lema y se demuestra de una nueva forma el - teorema de Neyman-Pearson.

LEMA 1.- La condición necesaria y suficiente para que el funcional:

$$G(R) = \int_R d\, H(x) \tag{11}$$

donde $H(x)$ es una medida definida en $X\cap\beta^n$, - alcance un máximo para $R_o c X\cap\beta^n$ es que:

$$R_o = \{x\in X \,/ d\, H(x) > 0\} \tag{12}$$

salvo conjuntos de medida nula.

Demostración:

- Condición necesaria:

Supóngase que se alcanza el máximo para R_o y que existe algún $R_1 c R_o$, de medida no nula, - tal que $d\, H(x) < 0$; $\forall x\in R_1$, entonces:

$$\int_{R_0-R_1} d\, H(x) = \int_{R_0} d\, H(x) - \int_{R_1} d\, H(x) >$$

$$> \int_{R_0} d\, H(x) \tag{13}$$

que contradice la hipótesis de que se alcanza el máximo para R_o.

- Condición suficiente:

Supóngase que no se alcanza el máximo para - R_o, sino para $R_1 \neq R_o$ salvo conjuntos de medida nula; entonces se tendrá:

$$\int_{R_1} d\, H(x) > \int_{R_0} d\, H(x) \geq 0 \tag{14}$$

y además, por la condición necesaria: $R_1 = \{x\in X/d\, H(x) > 0\} = R_o$, salvo conjuntos de medida nula, lo que va en contra de que $R_1 \neq R_o$, salvo conjuntos de medida nula.

TEOREMA 1 (Neyman-Pearson).- Para el caso - particular en que trate de contrastarse la - hipótesis nula de que X se distribuye según $F_o(x)$ frente a la alternativa de que se distribuye según $F_1(x)$ y supuesto que se verifican ciertas condiciones de regularidad de - $F_o(x)$ y $F_1(x)$, la región R_o, solución del - problema (6), y por tanto del (8), viene dada por:

$$R_o = \{x\in X/ \frac{dF_1(x)}{dF_o(x)} > \lambda\} \tag{15}$$

donde $\lambda \geq 0$ se obtiene de la ecuación:

$$\int_{R_0} d\, F_o(x) = \alpha \tag{16}$$

Demostración:

En efecto, el problema de maximizar el funcional:

$$\int_R d\, F_1(x) \tag{17}$$

respecto a todos los $R c X\cap\beta^n$ que verifican la condición:

$$\int_R d\, F_o(x) \leq \alpha \tag{18}$$

equivale al problema de maximizar el funcional (17) respecto a todos los $R c X\cap\beta^n$ y $\varepsilon\in\mathbb{R}$ - tales que:

$$\int_R d\,F_o(x) = \alpha-\varepsilon^2 \qquad (19)$$

lo cual es lo mismo, según la técnica de los multiplicadores de Langrage, que considerar la función auxiliar:

$$\int_R d\,F_1(x)-\lambda\int_R d\,F_o(x)+\lambda\alpha-\lambda\varepsilon^2 \qquad (20)$$

como función de R, ε y λ.

En consecuencia, una condición necesaria para la existencia de máximo es que su derivada parcial respecto de ε se anule, es decir:

$$-2\lambda\varepsilon = 0 \qquad (21)$$

de donde resulta, si $\lambda\neq 0$, que:

$$\varepsilon = 0 \qquad (22)$$

Por tanto, si existen tests óptimos en el sentido (6), debe verificarse que la desigualdad que figura en (7), para la solución, R_o, debe convertirse en igualdad, ya que $\varepsilon=0$ Análogamente, puede decirse lo mismo de la expresión (8).

Por otra parte, del Lema 1 y de (19) y (22) se deduce que la región R_o que maximiza (20) es la dada por (15) y (16).

Seguidamente se da un teorema que suministra una metodología para obtener tests de potencia garantizada.

TEOREMA 2.- Sea $\{f(x\,;\,\theta);\ \theta\in\Omega\subset \mathbb{R}^p;\ x\in X\subset \mathbb{R}^n\}$ una familia de funciones de densidad, donde $\theta=(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_p)$ es un vector paramétrico, Ω es el conjunto paramétrico y X el espacio de definición de una variable aleatoria n-dimensional x.

El test de potencia garantizada, de tamaño α para contrastar la hipótesis nula $H_o:\theta\in\omega$ frente a la alternativa $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ viene definido por la región crítica:

$$R_o=\{x\in X/f(x;\theta^{**})>\int_{\omega_o} f(x;\theta)\,d\lambda(\theta)\} \qquad (23)$$

siempre que existan $\theta^{**}\in\overline{\Omega-\omega}$, $\omega_o\subset\bar{\omega}$ y una medida $\lambda(\theta)$ en ω_o, tales que sean soluciones del sistema

$$\underset{\theta\in\Omega-\omega}{\operatorname{Inf}} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx=\int_{R_o} f(x;\theta^{**})\,dx \qquad (24)$$

$$\underset{\theta\in\omega}{\operatorname{Sup}} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx=\int_{R_o} f(x;\theta^{*})\,dx;\ \forall\,\theta^{*}\in\omega_o\subset\bar{\omega} \qquad (25)$$

$$\int_{R_o} f(x;\theta^{*})\,dx = \alpha;\ \theta^{*}\in\omega_o\subset\bar{\omega} \qquad (26)$$

Demostración:

Para que los ω_o, θ^{**} y $\lambda(\theta)$ soluciones del sistema de ecuaciones (24), (25) y (26) proporcionen una región crítica R_o, solución del problema planteado, debe demostrarse que se verifica la desigualdad

$$\underset{\theta\in\Omega-\omega}{\operatorname{Inf}} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx\geq \underset{\theta\in\Omega-\omega}{\operatorname{Inf}} \int_R f(x;\theta)\,dx;\ \forall R\in C_\alpha \qquad (27)$$

donde

$$C_\alpha=\{R\subset X\cap\beta^n/\underset{\theta\in\omega}{\operatorname{Sup}}\int_R f(x;\theta)\,dx\leq \alpha\} \qquad (28)$$

y que, además, dicha región, R_o, pertenece a C_α. En efecto, lo anterior equivale a maximizar, respecto a R en C_α, el funcional:

$$F(R) = \underset{\theta\in\Omega-\omega}{\operatorname{Inf}}\int_R f(x;\theta)\,dx \qquad (29)$$

sometido a la condición:

$$\underset{\theta\in\omega}{\operatorname{Sup}}\int_R f(x;\theta)\,dx = \alpha \qquad (30)$$

Si el ínfimo de (29) es tal que

$$\underset{\theta\in\Omega-\omega}{\operatorname{Inf}}\int_R f(x;\theta)\,dx=\int_R f(x;\theta^{**})\,dx;\ \theta^{**}\in\overline{\Omega-\omega} \qquad (31)$$

y si el supremo de (30) es tal que

$$\underset{\theta\in\omega}{\operatorname{Sup}}\int_R f(x;\theta)\,dx=\int_R f(x;\theta^{*})\,dx;\ \forall\,\theta^{*}\in\omega_o\subset\bar{\omega} \qquad (32)$$

este problema, teniendo en cuenta la técnica de los multiplicadores de Lagrange, supuesto que se verifican las condiciones de regularidad para poder aplicarla, equivale a maximizar el funcional definido por:

$$G(R)=\int_R \left[f(x;\theta^{**})-\int_{\omega_o} f(x;\theta)\,d\lambda(\theta) \right]dx \qquad (33)$$

donde $\lambda(\theta)$ es una medida en ω_o.

Por tanto, aplicando el Lema 1 la región crítica que resulta es:

$$R_o=\{x\in X/f(x;\theta^{**})-\int_{\omega_o} f(x;\theta)\,d\lambda(\theta)>0\} \qquad (34)$$

donde los θ^{**}, ω_o y $\lambda(\theta)$ se obtienen de las expresiones (24), (25) y (26).

Como se aprecia, la región (34) y la (23) - son equivalentes, y además, como se verifica que

$$\sup_{\theta\in\omega} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx = \alpha \tag{35}$$

la región R_o pertenece a C_α, con lo que queda demostrado el teorema.

NOTA: En la mayoría de los casos ω_o será un subconjunto finito $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_m^*\}\subset\bar{\omega}$ con - lo que la región crítica se convierte en:

$$R_o=\{x\in X/f(x;\theta^{**}) > \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(x;\theta_j^*)\} \tag{36}$$

y el sistema (24), (25) y (26), se transforma en el dado por:

$$\inf_{\theta\in\Omega-\omega} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx=\int_{R_o} f(x;\theta^{**})\,dx \tag{37}$$

$$\sup_{\theta\in\omega} \int_{R_o} f(x;\theta)\,dx=\int_{R_o} f(x;\theta_j^*)\,dx;\ j=1,2,..,m \tag{38}$$

$$\int_{R_o} f(x;\theta_i^*)\,dx = \alpha \tag{39}$$

Este teorema se ha aplicado /7/ a - - los siguientes casos:

1. Contraste unilateral de la media de una - población normal de varianza conocida.

2. Contraste unilateral de la desviación típica de una población normal de media conocida.

3. Contraste unilateral de la desviación típica de una población normal de media desconocida.

4. Contraste bilateral, en la hipótesis nula, de la media de una población normal de varianza conocida.

5. Contraste bilateral, en la hipótesis alternativa, de la media de una población normal de varianza conocida.

6. Contraste bilateral, en la hipótesis nula, de la desviación típica de una población normal de media conocida.

7. Contraste bilateral, en la hipótesis alternativa, de la desviación típica de una población normal de media conocida.

Habiéndose obtenido los tests que figuran en la Tabla I, y que corresponden a tests ya conocidos.

Seguidamente y con objeto de mostrar la potencia de este método, se aplica a un nuevo caso.

3. CONTRASTE SIMULTANEO DE LOS PARAMETROS μ Y σ DE UNA POBLACION NORMAL

Sea $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria simple, de la que se sabe que x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son variables $N(\mu,\sigma)$. Se desea contrastar la hipótesis nula $H_o:\mu\in[\mu_1, \mu_2]$, $\sigma\in[\sigma_1, \sigma_2]$; $(\mu_1\leq\mu_2, \sigma_1\leq\sigma_2)$ frente a la - hipótesis alternativa $H_1:\mu\in[\mu_3, \mu_4]$, - $\sigma\in[\sigma_3, \sigma_4]$; $(\mu_3\leq\mu_4, \sigma_3\leq\sigma_4)$.

Las hipótesis nula y alternativa se pueden - representar gráficamente como se indica en - la Figura 1.

La función de densidad de la variable n-dimensional $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}\, \ell^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \tag{40}$$

Aplicando el teorema 2 en el supuesto de que el conjunto ω_o, en él definido, esté constituído por un solo elemento, la región crítica tendrá la forma

$$R_o=R(\mu_o^*,\mu_o^{**},\sigma_o^*,\sigma_o^{**},\lambda_o)=$$

$$=\{x\in X/\left(\frac{\sigma_o^*}{\sigma_o^{**}}\right)^n \ell^{1/2\left[\frac{1}{\sigma_o^{*2}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o^*)^2 - \frac{1}{\sigma_o^{**2}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o^{**})^2\right]} > \lambda_o\} \tag{41}$$

o lo que es lo mismo

$$R_o=\{x\in X/\frac{1}{\sigma_o^{*2}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o^*)^2-\frac{1}{\sigma_o^{**2}}\sum_{i=1}^{n}(x_o-\mu_o^{**})^2\geq$$

$$\geq 2(\mathrm{Log}\,\lambda_o+n\mathrm{Log}\,\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^*})\} \tag{42}$$

que es idéntico a

$$R_o=\{x\in X/\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\sigma_o^{*2}} - \frac{1}{\sigma_o^{**2}}\right)x_i^2-2\left(\frac{\mu_o^*}{\sigma_o^{*2}} - \frac{\mu_o^{**}}{\sigma_o^{**2}}\right)\right.\text{(sigue)}$$

TABLA I

DISTRIBUCION	DATOS	H_o	H_1	REGION DE RECHAZO
$N(\mu, \sigma)$	σ conocida	$\mu\in[\mu_1, \mu_2]$	$\mu\in[\mu_3, \mu_4]$	Si $\mu_1>\mu_4$ $\dfrac{1/n \sum_{i=1}^{n} x_i-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}<F^{-1}_{N(0,1)}(\alpha)$ Si $\mu_2<\mu_3$ $\dfrac{\mu_2-1/n \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}\sqrt{n}<F^{-1}_{N(0,1)}(\alpha)$
"	μ conocida	$\sigma\in[\sigma_1, \sigma_2]$	$\sigma\in[\sigma_3, \sigma_4]$	Si $\sigma_1>\sigma_4$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_1^2}<F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha)$ Si $\sigma_2<\sigma_3$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_1^2}>F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$
"	μ desconocida	$\sigma\in[\sigma_1, \sigma_2]$	$\sigma\in[\sigma_3, \sigma_4]$	Si $\sigma_1>\sigma_4$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2}<F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$ Si $\sigma_2<\sigma_3$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_2^2}>F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha)$
"	σ conocida *	$\mu\in[\mu_1, \mu_2]\cup[\mu_5, \mu_6]$	$\mu\in[\mu_3, \mu_4]$	$C_1<\sum_{i=1}^{n} x_i<C_2$ $(C_1<C_2)$ obteniéndose C_1 y C_2 de (1)
"	σ conocida *	$\mu\in[\mu_3, \mu_4]$	$\mu\in[\mu_1, \mu_2]\cup[\mu_5, \mu_6]$	$\sum_{i=1}^{n} x_i<C_1$ y $\sum_{i=1}^{n}{}_i>C_2$ $(C_1<C_2)$ obteniéndose C_1 y C_2 de (2)
"	μ conocida **	$\sigma\in[\sigma_2, \sigma_2]\cup[\sigma_5, \sigma_6]$	$\sigma\in[\sigma_3, \sigma_4]$	$C_1<\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2<C_2$ $(C_1<C_2)$ obteniéndose C_1 y C_2 de (3)
"	μ conocida **	$\sigma\in[\sigma_3, \sigma_4]$	$\sigma\in[\sigma_1, \sigma_2]\cup[\sigma_5, \sigma_6]$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2<C_1$ y $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2>C_2$ $(C_1<C_2)$ obteniéndose C_1 y C_2 de (4)

* $\mu_1\leq\mu_2<\mu_3\leq\mu_4<\mu_5\leq\mu_6$

** $\sigma_1\leq\sigma_2<\sigma_3\leq\sigma_4<\sigma_5\leq\sigma_6$

$S^2=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ $\qquad \bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

H_o = hipótesis nula

H_1 = hipótesis alternativa

(sigue)

(1) $F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_2-n\mu_2}{\sqrt{n}\sigma}\right)-F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_1-n\mu_2}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\alpha$ $F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_2-n\mu_5}{\sqrt{n}\sigma}\right)-F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_1-n\mu_5}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\alpha$	(2) $F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_2-n\mu_3}{\sqrt{n}\sigma}\right)-F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_1-n\mu_3}{\sqrt{n}\sigma}\right)=1-\alpha$ $F_{N(0,\ 1)}\left(\frac{C_2-n\mu_4}{\sqrt{n}\sigma}\right)-F_{N(0,1)}\left(\frac{C_1-n\mu_4}{\sqrt{n}\sigma}\right)=1-\alpha$
(3) $F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_2}{\sigma_2^2}\right)-F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_1}{\sigma_2^2}\right)=\alpha$ $F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_2}{\sigma_5^2}\right)-F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_1}{\sigma_5^2}\right)=\alpha$	(4) $F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_2}{\sigma_3^2}\right)-F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_1}{\sigma_3^2}\right)=1-\alpha$ $F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_2}{\sigma_4^2}\right)-F_{\chi^2_n}\left(\frac{C_1}{\sigma_4^2}\right)=1-\alpha$

(sigue fórmula)

$$x_i+\frac{\mu_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}}-\frac{\mu_o^{**2}}{\sigma_o^{**2}}\ \Big]\geq 2\left(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^{*}}\right)\Big\} \qquad (43)$$

y también a

$$R_o=\{x\in X/\left(\frac{1}{\sigma^{*2}}-\frac{1}{\sigma_o^{**2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\ \dots$$

$$\left[x_i^2-2\frac{\frac{\mu_o^*}{\sigma_o^{*2}}-\frac{\mu_o^{**}}{\sigma_o^{**2}}}{\frac{1}{\sigma_o^{*2}}-\frac{1}{\sigma_o^{**2}}}x_i+\frac{\frac{\mu_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}}-\frac{\mu_o^{**2}}{\sigma_o^{**2}}}{\frac{1}{\sigma_o^{*2}}-\frac{1}{\sigma_o^{**2}}}\right]\geq$$

$$\geq 2\left(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^{*}}\right)\} \qquad (44)$$

o lo que es igual

$$R_o=\{x\in X/\frac{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}\ \sigma_o^{**2}}\sum_{i=1}^{n}\ \dots$$

$$\left(x_i-2\frac{\mu_o^*\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}x_i+\frac{\mu_o^{*2}\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**2}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right)\geq$$

$$\geq 2\left(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^{*}}\right)\} \qquad (45)$$

y agrupando convenientemente

$$R_o=\{x\in X/\frac{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{\mu_o^*\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right)^2+$$

$$+n\frac{\mu^{*2}\sigma^{**2}-\mu^{**2}\sigma^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}-n\frac{\sigma^{**2}-\sigma^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}$$

$$\left(\frac{\mu^*\sigma^{**2}-\mu^{**}\sigma^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right)^2\geq 2\left(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma^{**}}{\sigma_o^{*}}\right)\} \qquad (46)$$

Finalmente, operando, se tiene que:

$$n\frac{\mu_o^{*2}\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**2}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}-n\frac{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}.$$

$$\left(\frac{\mu_o^*\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right)=\frac{-n(\mu_o^*-\mu_o^{**})^2}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}} \qquad (47)$$

y en consecuencia se puede escribir:

$$R_o=\{x\in X/\frac{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{\mu_o^*\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**}\sigma_o^{*2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right)^2\geq$$

$$\geq 2\left(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^{*}}\right)+n\frac{(\mu_o^{**}-\mu_o^{*})^2}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\} \qquad (48)$$

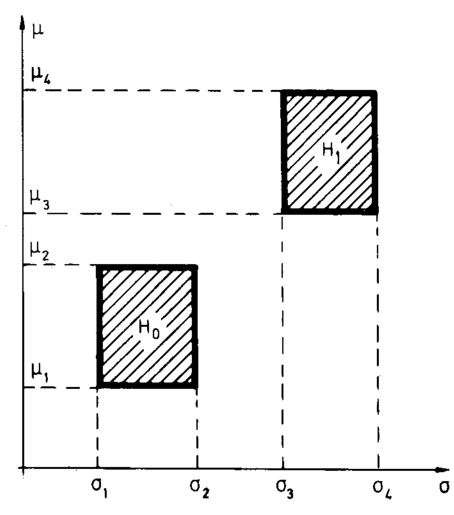

Fig. 1

que, para el caso en que $\sigma_o^{**}<\sigma_o^*$ se puede expresar como

$$R_o=\{x\in X/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o\} \tag{49}$$

donde:

$$\eta_o = \frac{\mu_o^*\sigma_o^{**2}-\mu_o^{**}\sigma_o^{*2}}{\sigma^{**2}-\sigma^{*2}} \tag{50}$$

y

$$\gamma_o = \frac{\sigma_o^{*2}\sigma_o^{**2}}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\left[2(\mathrm{Log}\lambda_o+n\mathrm{Log}\frac{\sigma_o^{**}}{\sigma_o^*})+ +n\frac{(\mu_o^{**}-\mu_o^*)^2}{\sigma_o^{**2}-\sigma_o^{*2}}\right] \tag{51}$$

Los valores de los parámetros μ_o^*, μ_o^{**}, σ_o^*, σ_o^{**} y λ_o se obtienen de las condiciones

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_3,\mu_4]\\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4]}}{\mathrm{Inf}} \mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/(\mu,\sigma)\right]= =\mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/ /(\mu_o^{**},\ \sigma_o^{**})\right] \tag{52}$$

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_1,\ \mu_2]\\ \sigma\in[\sigma_1,\ \sigma_2]}}{\mathrm{Sup}} \mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/(\mu,\sigma)\right] = =\mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/ /(\mu_o^*,\ \sigma_o^*)\right] \tag{53}$$

y

$$\mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/(\mu_o^*,\ \sigma_o^*)\right]=\alpha \tag{54}$$

Estas expresiones son equivalentes, respectivamente, a:

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_3,\mu_4]\\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4]}}{\mathrm{Inf}} \mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\eta_o)^2}{\sigma^2}<\frac{\gamma_o}{\sigma^2}/(\mu,\sigma)\right]= = \mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\eta_o)^2}{\sigma_o^{**2}}<\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{**2}}/(\mu_o^{**},\sigma_o^{**})\right] \tag{55}$$

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_1,\mu_2]\\ \sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]}}{\mathrm{Sup}} \mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\eta_o)^2}{\sigma^2}<\frac{\gamma_o}{\sigma^2}/(\mu,\sigma)\right]= =\mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}<\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}/(\mu_o^*,\sigma_o^*)\right] \tag{56}$$

$$\mathrm{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}<\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}/(\mu_o^*,\sigma_o^*)\right]=\alpha \tag{57}$$

Por otra parte, si las variables aleatorias x_i son $N(\mu,\sigma)$ e independientes para i=1, 2, ..., n, las $\frac{x_i-\eta_o}{\sigma}$ son variables $N(\frac{\mu-\eta_o}{\sigma},1)$ y también independientes, para i=1, 2, ..., n, por tanto la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\eta_o}{\sigma})^2$ es una $\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\mu_o)^2}{\sigma^2}\right]$ descentrada con n grados de libertad.

Según esto, las expresiones (55), (56) y (57), que sirven para calcular μ_o^*, μ_o^{**}, σ_o^*, σ_o^{**} y λ_o se pueden escribir, respectivamente de la siguiente forma:

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_3,\mu_4]\\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4]}}{\mathrm{Inf}} F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}(\frac{\gamma_o}{\sigma^2})= =F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^{**}-\eta_o)^2}{\sigma_o^{**2}}\right]}(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{**2}}) \tag{58}$$

$$\underset{\substack{\mu\in[\mu_1\ \mu_2]\\ \sigma\in[\sigma_1\ \sigma_2]}}{\mathrm{Sup}} F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}(\frac{\gamma_o}{\sigma^2})= = F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^*-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}\right]}(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}) \tag{59}$$

y

$$F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^*-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}\right]}(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}) = \alpha \tag{60}$$

Análogamente, si $\sigma_o^{**}>\sigma_o^*$ la región de rechazo resulta ser:

$$R_o=\{x\in X/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2 > \gamma_o\} \tag{61}$$

donde η_o y γ_o son las dadas en (50) y (51), teniéndose ahora como expresiones para calcular μ_o^*, μ_o^{**}, σ_o^*, σ_o^{**} y λ_o las siguientes:

$$\sup_{\substack{\mu\in[\mu_3,\mu_4] \\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4]}} F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma^2}\right) =$$

$$= F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^{**}-\eta_o)^2}{\sigma_o^{**2}}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{**2}}\right) \qquad (62)$$

$$\inf_{\substack{\mu\in[\mu_1,\mu_2] \\ \sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]}} F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma^2}\right) =$$

$$= F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^{*}-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}\right) \qquad (63)$$

$$F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu_o^{*}-\eta_o)^2}{\sigma_o^{*2}}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma_o^{*2}}\right) = 1-\alpha \qquad (64)$$

Para un caso concreto, es decir, para unos - μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 dados, la obtención del test de potencia garantizada se puede realizar mediante cálculos aproximados con ordenador, utilizando las expresiones - (49), (50), (51), (58), (59) y (60) o las - (61), (50), (51), (62), (63) y (64) según - los valores de σ_o^{**} y σ_o^* que se tanteen sean tales que $\sigma_o^{**}<\sigma_o^*$ ó $\sigma_o^{**}>\sigma_o^*$, respectivamente.

Cuando los tests sean unilaterales en ambos parámetros (ver figura 2), se obtienen las - soluciones que a continuación se indican para las distintas posiciones relativas de las regiones paramétricas ω de la hipótesis nula H_o y $\Omega-\omega$ de la hipótesis alternativa H_1.

Los parámetros que determinan la región crítica, una vez fijado el tamaño del test, son:

Para el caso A, los parámetros corresponden a los puntos A_0 y A_1 de la figura 2; análogamente, para el caso B vienen dados por los - puntos B_0 y B_1, para el caso C por los C_0 y C_1 y para el caso D por los D_0 y D_1.

La función de potencia, aplicando la definición (probabilidad de rechazar la hipótesis, siendo falsa), cuando $\sigma_4>\sigma_1$ resulta:

$$\text{Potencia}=\text{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2<\gamma_o/(\mu,\sigma)\right]$$

$$\mu\in[\mu_3,\mu_4],\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4] \qquad (65)$$

que, como se ha visto, es:

$$\text{Potencia}=F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma^2}\right);$$

$$\mu\in[\mu_3,\mu_4],\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4] \qquad (66)$$

Cuando $\sigma_3>\sigma_2$ la potencia es:

$$\text{Potencia}=\text{Prob}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta_o)^2>\gamma_o/(\mu,\sigma)\right]$$

$$\mu\in[\mu_3,\mu_4],\sigma\in[\sigma_3,\sigma_4] \qquad (67)$$

que equivale a

$$\text{Potencia}=1-F_{\chi_n^2\left[\frac{n(\mu-\eta_o)^2}{\sigma^2}\right]}\left(\frac{\gamma_o}{\sigma^2}\right)$$

$$\mu\in[\mu_3,\mu_4],\ \sigma\in[\sigma_3,\sigma_4] \qquad (68)$$

Conviene observar que, en principio, los parámetros de la hipótesis alternativa, que se precisan para definir el test y, por tanto, la función de potencia, son los que corresponden a uno de los vértices de la región paramétrica de H_1 pudiéndose definir la función de potencia en el cuadrante que ellos - determinan (ver figura 3). Este cuadrante podría estar limitado, o no estarlo; en cualquier caso para un mismo punto P, perteneciente a diferentes regiones paramétricas - que se apoyasen en dicho cuadrante, el valor de la potencia sería idéntico.

Por otra parte los intervalos que figuran en la hipótesis nula y alternativa pueden ser - abiertos o semiabiertos sin que se alteren - los resultados obtenidos, ya que el supremo y el ínfimo quedan inalterados.

4. CONCLUSIONES

- El teorema 2 proporciona una metodología - muy sencilla, que permite determinar los - tests de potencia garantizada.

- Esta nueva metodología resuelve el caso de tests de potencia garantizada, con alternativa compuesta y por tanto, da la solución al problema de tests uniformemente más potentes

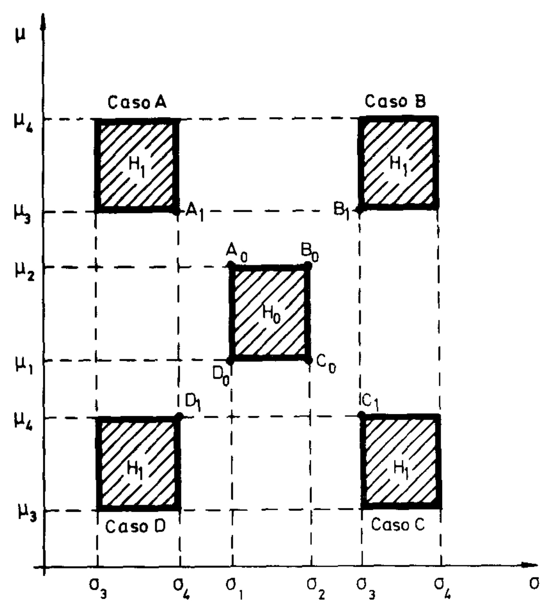

Fig. 2

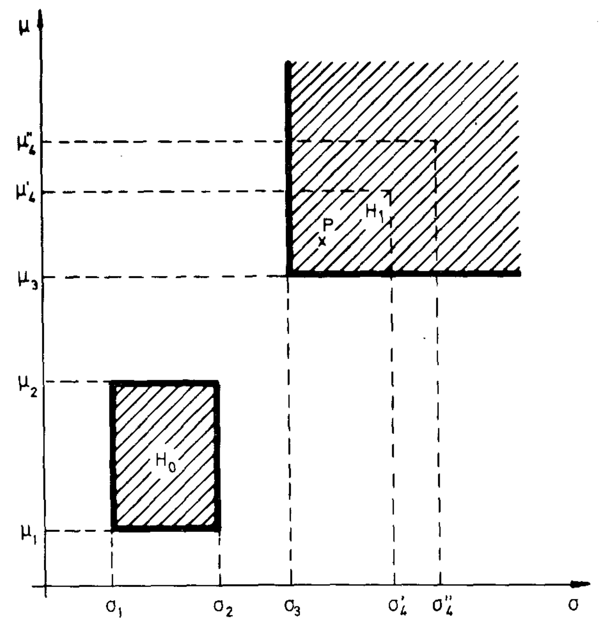

Fig. 3

cuando ésta exista (recuérdese que para el caso de alternativa compuesta no se conoce un método general de obtención de estos tests).

- La técnica del Cálculo de variaciones junto con la de los multiplicadores de Lagrange permite no sólo demostrar el Lema de Neyman-Pearson sino también resolver muchos problemas de interés en Estadística. En especial el teorema 2 es un ejemplo de esta afirmación.

- El método desarrollado permite plantear contrastes de hipótesis para más de un parámetro, obteniendo los tests de potencia garantizada correspondientes.

5. AGRADECIMIENTO

Los autores desean expresar su más sincero agradecimiento a los Profesores José Manuel Bayod Bayod y Juan Ramón Ruiz Tolosa por sus muy valiosos comentarios de este trabajo.

6. REFERENCIAS

/1/ NEYMAN, J. y PEARSON, E.S.: "On the Problems of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses". Phil. Trans. Roy. Sac., Ser. A, Vol. 231, 1933, pp.289-337.

/2/ DANTZIG, G.B. y WALD, A.: "On the Fundamental Lemma of Neyman and Pearson". Ann. Math. Stat., Vol. 22, 1951, pp. 87-93.

/3/ NEYMAN, J.: "Sur la vérification des hypothèses statistiques composées". Bull. Soc. Math. France, Vol. 63, 1933, pp. 246-266.

/4/ NEYMAN, J. y PEARSON, E.S.: "Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses". Stat. Res. Men, Vol. I, 1936, pp. 1-37, Vol. II, 1938, pp. 25-57.

/5/ LEHMAN, E.L.: "Testing Statistical Hypotheses". John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.

/6/ LEHMAN, E.L.: "On the Existence of Least Favorable Distributions". Ann. Math. Stat., Vol. 23, 1952, pp. 409-416.

/7/ MORA, E.: "Nueva metodología para la obtención de tests de hipótesis de potencia garantizada". Tesis doctoral. Universidad de Santander.