

PANORAMA ACTUAL DE LOS
METODOS ENUMERATIVOS (y II)

J. BARCELO

En este trabajo sobre el "estado del arte" actual de los métodos enumerativos se aborda el problema bajo tres puntos de vista: metodología, desarrollo experimental y fundamentos teóricos. En la primera parte se trata el primer aspecto y se utilizan los resultados obtenidos para exponer de forma comprensible la mayoría de algoritmos clásicos de branch & bound y enumeración implícita, incluyendo alguna de las aportaciones recientes sobre penalizaciones, criterios de mejor proyección, restricciones de sustitución y otras.

En la segunda parte se exponen los resultados de las principales líneas de investigación experimentales existentes sobre branch & bound basadas en programas como UMPIRE, MPSX-MIP, OPHELIE-MIXED, FMPS, etc... y se resumen los resultados presentados por diversos autores. El trabajo se termina exponiendo algunas consideraciones acerca de la teoría de la relajación lagrangiana aplicada a los problemas de programación lineal entera mixta, considerándola como marco teórico de los métodos enumerativos.

1. TENDENCIAS ACTUALES

El análisis de las publicaciones sobre métodos enumerativos nos lleva a la conclusión de que en estos últimos años los estudios se han centrado en dos aspectos fundamentales: la investigación experimental sobre cómo la selección de estrategias en el "branch and bound" puede mejorar significativamente la resolución del problema con variables enteras y los intentos de obtención de unos procedimientos teóricos que permitan generar algoritmos más eficientes. La primera tendencia ha venido facilitada por la disponibilidad de códigos tales como el OPHELIE-MIX, UMPIRE, FMPS, MPSX-MIP, etc... que por su diseño han permitido analizar la eficacia de las penalizaciones, pseudocostes, proyecciones, etc., discutidas teóricamente en el apartado anterior. Del segundo aspecto cabe decir que los estudios se han centrado en dos áreas principales, la que deriva de la generalización del concepto de plano secante, los llamados cortes enumerativos, y la que procede de una teoría más general, dentro del cuerpo de doctrina que hoy en día es la programación matemática, denominada la relajación lagrangiana. Todavía no se dispone de resultados prácticos en ninguno de los dos casos, pero todo hace suponer --

que la relajación lagrangiana puede proporcionar nuevos y prometedores resultados dentro de poco.

Vamos a dedicar este apartado a glosar la situación en este momento.

1.1 Líneas Experimentales

a) El OPHELIE MIXED (Roy, Benayoun y Tergny /22/). Está implementado sobre la base de un algoritmo próximo al de Davis, Kendrick y Weitzman descrito en el apartado 4 de la primera parte¹, del que se diferencia en la heurística utilizada en los pasos 3 y 11.

El paso 3 hace uso principalmente de la regla de prioridad consistente en seleccionar el problema candidato que posea la cota más prometedora, pero utiliza también criterios secundarios para tener en cuenta la posible facilidad de reoptimización de un problema candidato dado y la plausibilidad de las cotas asociadas.

El paso 11 se efectúa como en el algoritmo indicado, con la excepción de que la elección de la variable de ramificación --

- J. Barceló del Departament d'Estadística de la Facultat d'Informàtica de la Universitat Politècnica. Dolcet, s/n. Barcelona 34.

- Article rebut el Gener del 1978.

puede limitarse a un conjunto determinado por un "grafo jerárquico" que refleja las opiniones del analista sobre la importancia relativa de las diferentes variables.

La referencia /22/ proporciona una amplia información sobre los resultados obtenidos en la aplicación del OPHELIE-MIXED, - aunque en estos momentos resulta imprescindible la consulta del trabajo experimental de Mitra, /23/, sobre el uso de diferentes estrategias aplicando el OPHELIE MIXED.

La investigación de Mitra analiza los siguientes puntos:

1. Selección de la variable de ramificación. En este punto estudia las políticas 1, 2, 3 y 5 descritas en el apartado 3.1 de la primera parte, incluyendo las penalizaciones derivadas de los cortes de Gomory, y el caso 4 cuando el analista define previamente una ordenación por prioridades.

2. Selección de los subproblemas. Las estrategias analizadas por Mitra corresponden a las descritas en el apartado 3.1 de la primera parte, definidas como 2, función de las penalizaciones, 3, dependiente de las estimaciones E_q , 4, aplicando el criterio de la mejor proyección de Hirst y las estrategias adicionales consistentes en:

- Elegir un subproblema, por ejemplo el P_R , por medio de alguna de las reglas anteriores, y tomar su alternativa P_L y de entre estos dos elegir aquél para el que la variable de ramificación sigue una dirección de acotación preferida.

- O bien, en la misma situación estudiar P_R y P_L antes de buscar otros subproblemas.

Mitra considera que estas investigaciones estaban motivadas por dos cuestiones fundamentales:

1. Dados problemas de un tipo específico ¿es posible encontrar una estrategia de exploración del árbol de soluciones

adecuada a los mismos?

2. ¿Qué eficacia tienen las penalizaciones como criterio para la elección de las variables de ramificación?

La experiencia en la resolución de una serie de problemas le condujo a la conclusión de que el criterio de las penalizaciones para elegir las variables de ramificación, no es tan útil como parecía. En muchos de los casos el criterio estándar de penalizaciones para la elección de la variable de ramificación (regla 5) y las reglas asociadas para la selección del subproblema (reglas 1 ó 2) conducían a un enorme crecimiento del árbol de soluciones sin realizar progresos evidentes hacia la obtención de una solución entera. Sin embargo, en esos mismos casos -- una inspección del problema permitía establecer direcciones de exploración y prioridades entre las variables que producían un árbol más compacto que conducía rápidamente a soluciones enteras. -- Las conclusiones a que llega Mitra son:

1. Las variables elegidas por métodos de penalización no conducen siempre a árboles minimales.

2. Las variables con las máximas penalizaciones no son siempre las variables con la máxima degradación.

3. En problemas duales degenerados las penalizaciones pueden no ser significativas.

No obstante encuentra que las penalizaciones se pueden calcular fácilmente sin gran esfuerzo y que son útiles para romper círculos viciosos y también valores de corte.

b) MPSX-MIP (Benichou et al. /11/)

Emplea un algoritmo análogo al de Dakin - excepto en que para los pasos 3 y 11 implementa la variante descrita en 4.1 de la primera parte, para el caso de pseudocostes y estimaciones.

Las referencias de Benichou consignan las ventajas del uso de los pseudocostes so-

bre las penalizaciones. Diversos autores han continuado la línea experimental de los pseudocostes y entre otros resultados cabe resaltar los obtenidos por Gauthier y Ribiere, /24/, partiendo de los resultados para los programas 0-1 de Breu y Burdet, /25/, utilizando los pseudocostes y los conjuntos especialmente ordenados, -- /2/.

c) UMPIRE (Tomlin, /8/ y /9/).

Es un algoritmo basado en el de Beale y Small, /26/, al que se le añaden las modificaciones descritas en el apartado 4.1 de la primera parte, en el parágrafo referente a las penalizaciones propuestas por Tomlin.

Posteriormente, Forrest, Hirst y el propio Tomlin, /12/, han llevado a cabo una exhaustiva investigación experimental sobre la utilización del UMPIRE.

En su trabajo revisan la evolución de los algoritmos de "branch and bound", considerando que la introducción de los conjuntos especialmente ordenados /2/ y /8/, y la mejora de las técnicas de programación lineal, especialmente en lo que hace referencia a los métodos generalizados de acotación superior (CUB) y la posibilidad de cambiar las cotas de las variables mediante la programación paramétrica, han sido cruciales en el desarrollo de los métodos enumerativos. Según ellos el punto clave, en estos momentos, para el desarrollo del "branch and bound", reside en las estrategias de búsqueda del árbol de soluciones, especialmente en la variedad de técnicas heurísticas que permiten al analista utilizar sus conocimientos sobre el problema que se trata de resolver.

En su opinión la mayor parte de los problemas enteros mixtos no triviales tienden a ser clasificados en dos categorías. La primera corresponde a problemas que se caracterizan por un número relativamente pequeño (alrededor de 100) variables 0-1, incorporadas a un programa lineal difícil y de grandes dimensiones, con algunos miles de restricciones y una compleja estructura matricial; mientras que la segunda tiende a tener un número mayor de va-

riables enteras (alrededor de varios centenares), organizadas con frecuencia en conjuntos especialmente ordenados que expresan relaciones lógicas complejas, pero incorporados a un programa lineal mucho más sencillo con menos de un millar de restricciones.

Los puntos estudiados por el trabajo de Tomlin et al. son:

1. PENALIZACIONES

Al igual que Mitra en el estudio antes reseñado, encuentran inadecuados los procedimientos de penalización, especialmente cuando se trata de problemas de grandes dimensiones pertenecientes a la primera clase indicada. A partir de esta constatación empírica se dedican a buscar una razón para que esto ocurra con problemas de estructura compleja, encontrando una explicación a partir de consideraciones geométricas, ya que en problemas con una compleja estructura matricial el número de iteraciones a realizar para resolver cada uno de los subproblemas puede ser lo suficientemente grande como para que las penalizaciones pierdan todo sentido como estimación de la degradación de la función objetiva, de manera que cuantas más iteraciones haya que realizar mayor será la discrepancia entre las penalizaciones y la degradación real. Ahora bien, el esfuerzo de cálculo necesario para desarrollar un árbol depende mucho de qué variables se han elegido en los primeros modos y como consecuencia si una variable corresponde a un subprograma que requiere muchas iteraciones, por lo que acabamos de exponer será una variable que cada vez será menos probable que sea escogida si dependemos de las penalizaciones, mientras que la situación puede ser exactamente la contraria si la variable se elige en una etapa temprana del análisis. Cuanto menor sea el número de variables que han sido fijadas, mayor es la flexibilidad del modelo y menor el coste de perturbar una variable dada, obligándole a adoptar un valor entero; es decir, menor es la penalización. Por lo tanto es precisamente en

la parte de la exploración del árbol - en que la elección de la variable es - más importante cuando las penalizaciones son menos fiables.

La consecuencia extraída es que es necesario un nuevo enfoque de los problemas de selección de nodos y variables (aunque encuentran útil el "intercambio de nodos" en el análisis de los problemas con penalización superior e inferior.

2. PRIORIDADES

Como resultado de las experiencias llegan a la conclusión de que es muy importante una asignación de prioridades, especialmente si se puede basar en los conocimientos sobre el sistema físico, de manera que se pueda signar una alta prioridad a las variables más importantes.

3. CRITERIO DE HIRST SOBRE LA MEJOR PROYECCION

Si bien la lista de prioridades proporciona un buen criterio para la selección de una variable de ramificación - no da ninguna indicación sobre el subproblema a elegir. Una posible solución la constituye el uso del criterio sobre la mejor proyección. La experiencia sobre el uso del criterio nos lleva al establecimiento de dos ventajas principales:

- Muy eficaz para establecer rápidamente una solución casi óptima después de explorar un pequeño número de ramas.
- Proporciona un criterio para juzgar la calidad de la solución encontrada.

4. PSEUDOCOSTES

Señalan unos resultados similares a los de Benichou et al., /11/, y llegan a la conclusión de que una jerarquización conveniente de los métodos de selección de variables es la siguiente:

- Prioridades
- Pseudocostes
- Penalizaciones

El uso de los pseudocostes para la estimación de nodos junto con dicha jerarquía de reglas de selección de variables, unido a ser posible a unos criterios restrictivos sobre la selección - de nodos proporcionan, según su experiencia, una heurística excelente para obtener rápidamente una solución entera casi óptima; el problema consiste - en saber qué alternativas seguir después de encontrar esta solución.

5. CONJUNTOS ESPECIALMENTE ORDENADOS

Los conjuntos especialmente ordenados, /2/, constituyen un mecanismo particularmente interesante cuando hay que -- operar con problemas de elección múltiple y con problemas convexos no separables. Conjuntos de tipo 1 (S1) se utilizan únicamente cuando una variable - de un conjunto de variables puede tomar un valor no nulo. El caso clásico es cuando se tiene una restricción.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i = 0,1 \quad i = 1, \dots, n$$

aunque no es necesario que la cota superior sea igual a la unidad. El principio básico consiste en que para cualquier par de variables adyacentes x_r y x_{r+1} se tiene que cumplir que o

$$x_1, x_2, \dots, x_r \text{ son todas nulas,}$$

$$\text{o lo son } x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$$

De aquí que elegido un "intervalo en curso" (x_r, x_{r+1}) podemos ramificar a partir del conjunto de variables de -- una manera similar a cómo ramificamos a partir de las cotas de una variable entera forzando a que todas las variables x_1, \dots, x_r ó las x_{r+1}, \dots, x_n sean nulas. El intervalo se suele elegir -- por medio de una media ponderada de -- los valores de las variables x_j , donde los pesos w_j correspondientes a las variables x_j pueden ser simplemente núme

ros secuenciales o elementos de una fila del problema denominado "fila de referencia", que nos permite calcular

$$\bar{w} = \frac{\sum_j w_j x_j}{\sum_j w_j}$$

y elegir x_r, x_{r+1} tales que

$$w_r \leq \bar{w} \leq w_{r+1}$$

los conjuntos de tipo 2 (S2) son conjuntos de variables en los que como máximo se permite que dos variables no nulas adyacentes sean distintas de cero, como en la programación separable, /27/. En este caso si elegimos un intervalo (x_r, x_{r+1}) como en el caso anterior, se debe verificar que:

o bien x_1, x_2, \dots, x_{r-1} son todas nulas

o lo son x_{r+1}, \dots, x_n

y similarmente para x_1, \dots, x_r ó x_{r+2}, \dots, x_n .

Los algoritmos de "branch and bound" - que usan penalizaciones y reglas LIFO - para este tipo de problemas suelen dar buenos resultados debido a la naturaleza altamente estructurada de este tipo de problemas, aunque en el UMPIRE se incluyen modificaciones de los métodos de la mejor proyección y de cálculo de pseudocostes adaptados a este tipo de problemas, que proporcionan una mejora significativa en los resultados.

d) Experiencias de Branch and Bound para la Programación CERO-UNO (Breu y Burdet, -- /25/)

Dentro de la línea experimental de estrategias para el "branch and bound", Breu y Burdet se plantean su investigación a partir de las siguientes consideraciones:

- Se ha prestado mucha atención a los métodos "branch and bound" aplicados a problemas con muchas variables continuas y pocas enteras y se han conseguido buenos resultados, pero se ha prestado muy poca atención a los problemas enteros puros.

- Los mejores códigos de enumeración implícita, /18/, /15/, /19/, parecen limitados a un máximo de 50 a 100 variables 0-1, dependiendo de la dificultad del problema.

- Se han sugerido nuevos enfoques teóricos y en particular el de los planos - secantes, /28/, /29/, /30/, /31/, pero el valor práctico de estas nuevas técnicas todavía no ha sido comprobado mediante una implementación real.

Como consecuencia centran su atención en los algoritmos de enumeración implícita, y en especial en la versión de Geoffrion, /15/, debido a los prometedores resultados obtenidos por la combinación de la programación lineal con los tests sobre implicaciones lógicas y se plantean la utilización de una metodología alternativa que se basa fundamentalmente en la flexibilidad del "branch and bound".

El resultado de sus experiencias les llevó a la conclusión de que tal alternativa es competitiva desde los puntos de vista de:

- Consumo de tiempo de CPU como medida del rendimiento.

- Se consiguió la resolución de todos los problemas tests referenciados por la literatura sobre el tema, incluyendo aquellos que aún no habían sido resueltos.

- Aunque construyeron un código diseñado para manejar problemas mixtos, tuvo un alto rendimiento con los problemas 0-1 altamente estructurados.

- El código permite realizar análisis sobre la sensibilidad y la detección de soluciones múltiples subóptimas dentro de unos porcentajes del óptimo.

A través de sus experiencias llegan a la conclusión de que los puntos clave para el éxito en la resolución del problema - PILP con variables 0-1 son, además de los que hacen referencia a las características del "branch and bound":

- Tener un control adecuado de los efectos de los errores numéricos y del número de operaciones aritméticas para generar subproblemas actualizados, y ser capaces de llevar a cabo un gran número de pasos pivotaes sin distorsionar la estructura exacta del problema.
- Una cuidadosa organización de las operaciones del ordenador durante el cálculo de las cotas y la elección de las variables de ramificación (aspectos tácticos del algoritmo).
- Capacidad de explotar la flexibilidad natural del método de "branch and bound": tener acceso durante la ejecución a la masa de información acumulada durante el cálculo de los nodos previos. Uso de estrategias adaptativas.

A lo largo de su estudio Brey y Burdet -- permanecen fieles a una filosofía puramente pragmática, adoptando como punto de partida toda una serie de mecanismos de cálculo derivados de los resultados clásicos y del sentido común y dedicándose a introducir mejoras a partir de la observación de los procesos de solución. Llegan a la conclusión de que el valor práctico de una propiedad dada depende críticamente de la forma de su implementación, y la fundamentan en el hecho de haber llegado a tener éxito simplemente usando propiedades elementales de los programas enteros, que en muchos casos eran conocidas pero no habían sido exploradas anteriormente.

Desde un punto de vista metodológico definen como TACTICAS aquellas consideraciones válidas para un solo nodo con la correspondiente información local (como por ejemplo las penalizaciones, el cálculo de cotas, la determinación de las variables de ramificación, etc.); por lo tanto una mejora táctica consiste en la modificación de un procedimiento que reduce la cantidad de cálculos o incrementa la eficiencia en un solo nodo. Las ESTRATEGIAS serán pues las reglas y líneas de acción que gobiernan la secuencia de acciones -- tácticas; por ejemplo, la elección del nodo siguiente, el control de la anchura del árbol, etc. En contraste con la táctica las estrategias manejan la información

procedente de varios nodos (subárbol). - Una mejora estratégica será en consecuencia una modificación que influye en el número de nodos a tener en cuenta en las operaciones tácticas siguientes, tales como cálculo de cotas, ramificaciones, etc.

Hay que tener en cuenta que una mejora táctica puede ser estratégicamente catástrofica por generar una avalancha de nodos adicionales, y similarmente una mejora estratégica puede reducir el número de nodos pero requerir una gran cantidad de cálculos en cada nodo.

El algoritmo de Brey y Burdet tiene tres procedimientos cruciales, dos de orden táctico: cálculo de cotas y selección de la variable de ramificación, y uno estratégico: selección del nodo.

La eficiencia de dichos procedimientos, medida por el rendimiento total del algoritmo depende de:

- Capacidad para detectar el camino hacia la solución óptima o, al menos hacia una buena solución subóptima, que proporcione muy rápidamente un valor de corte.
- Capacidad para discernir, tan pronto como sea posible, que una rama no es fructífera. Este objetivo es una tarea del conjunto de procedimientos de acotación y de las implicaciones lógicas.
- Eficiencia de cálculo para obtener los requerimientos de los dos puntos anteriores a bajo coste.

Entre las características a resaltar del código construido por Brey y Burdet figuran la de que la estructura del árbol se construye nodo a nodo y se almacena secuencialmente en una tabla denominada FRENTE, la estructura de la tabla en el ordenador da siempre un orden lexicográfico al árbol pero se pueden imponer fácilmente otro tipo de reglas (como por ejemplo una segunda relación de ordenada de las cotas). El mantenimiento en memoria de todo el árbol y de las múltiples técnicas de ordenación es lo que

permite una flexibilidad estratégica en la selección de nodos. Por otra parte se introduce un conjunto de más de cuarenta parámetros de control que permiten: controlar la precisión de las operaciones individuales, la propagación de errores, la reinversión, la capacidad (dimensión del árbol), las reglas de selección del pivot, los parámetros organizativos que controlan el almacenamiento del árbol, etc.

Su experiencia les conduce a resaltar el papel y la importancia de los parámetros de control, llegando a establecer que su efecto es sorprendente a veces, difícil de entender y carente de fundamentación teórica. Las ramificaciones dicotómicas debido a los errores de redondeo tienden a crear inconsistencias y no posibilidades, en los subprogramas lineales, lo cual se complica con el alto grado de degeneración de muchos de ellos.

El algoritmo de Breu y Burdet incorpora todos los métodos de cálculo de cotas citados en el apartado 4.1 de la primera parte (valor óptimo del subprograma lineal asociado al nodo, cálculo de penalizaciones, penalizaciones mejoradas, penalizaciones derivadas de los cortes de Gomory, etc.) y añade alguna nueva como la de los cortes de Dantzig, /32/:

- El corte

$$\sum_{j \in \bar{N}} x_j \geq 1$$

proporciona la penalización

$$P = \min_{j \in \bar{N}} \bar{c}_j$$

siendo \bar{N} el conjunto de las variables enteras no básicas. Y también la idea de los cortes encadenados como forma de superar algunos de los obstáculos encontrados por los algoritmos de plano secante, por ejemplo se construye un corte de Gomory:

$$\sum_{j \in \bar{N}} (-\pi_j) x_j \leq -\pi_0 \quad (\pi_0 > 0)$$

siendo:

$$\pi_0 = 1$$

y para $j \in \bar{N}$:

$$\begin{aligned} \pi_j &= f_{ij} / \bar{x}_i && \text{si } f_{ij} \leq \bar{x}_i \\ &= (1-f_{ij}) / (1-\bar{x}_i) && \text{en caso contrario} \end{aligned}$$

siendo f_{ij} la parte fraccionaria positiva del coeficiente \bar{a}_{ij} y \bar{x}_i la de la variable entera x_i . Si hay variables enteras sus coeficientes serían:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \bar{a}_{ij} / \bar{x}_i && \text{si } \bar{a}_{ij} \geq 0 \\ &= -\bar{a}_{ij} / (1-\bar{x}_i) && \text{en caso contrario} \end{aligned}$$

Una vez construido un corte de Gomory como el descrito, la selección de un pivot dual proporciona una nueva variable entera x_{j_0} para la base y la actualización de la fila correspondiente será:

$$\sum_{\substack{j \in \bar{N} \\ j \neq j_0}} (\pi_j / \pi_{j_0}) x_j - \pi_{j_0}^{-1} S + x_{j_0} = \pi_{j_0}^{-1}$$

evidentemente esta fila se puede utilizar a su vez para generar un nuevo corte de Gomory sobre la variable x_{j_0} , y así sucesivamente.

En lo que a la ramificación se refiere el algoritmo de Breu y Burdet implementa las reglas de prioridad lexicográfica y las reglas 1, 2, 5 y 6 del apartado 4.1 de la primera parte, y dos reglas adicionales de combinación de posibilidades y penalizaciones.

Los pseudocostes y las penalizaciones trabajan razonablemente bien en muchos casos, pero intuitivamente se comprende que no llegan a captar la naturaleza del problema en lo que respecta a la posibilidad, tanto del problema LP como del problema entero, puesto que están basados únicamente en la función objetivo. En consecuencia proponen introducir una medida de la degradación de la posibilidad, por la elección de una variable de ramificación. La medida es una modificación de la regla de Hirst comentada anteriormente y los resultados observados en la práctica son, según su propia expresión, sorprendentemente buenos, además de la gran eficacia de la regla debido al pequeño número de operaciones aritméticas que comporta.

Se toma una variable cero-uno x_i y se impone, como tentativa, $x_i=0$; si el problema LP asociado se hace no posible, entonces se ejecuta un paso pivotal dual sobre la fila "mas no posible", calculando únicamente el término independiente \bar{x} . Entonces se define la siguiente "factibilidad inferior":

$$f_{di} = \sum_{k \in N_f} \left\{ \text{MIN } \sigma_k \{0, x_k\} + \text{MIN } \sigma_k \{0, 1-x_k\} \right\}$$

donde las σ_k son parámetros definidos por el analista (por ejemplo $\sigma_k=1, \forall k$ o $\sigma_k = |c_k|$), y $N_f = \{i | x_i \text{ libre y } 0 \leq x_i \leq 1\}$.

La "factibilidad superior" f_{ui} se obtiene de la misma manera imponiendo, temporalmente, la condición $x_i=1$ y finalmente se calcula la "factibilidad" como:

$$f_i = \text{MIN } \{f_{di}, f_{ui}\}$$

y se elige como variable la ramificación x_{i0} tal que $f_{i0} \geq f_i, \forall i$. Se puede pensar que la influencia de la función objetivo ha sido innecesariamente eliminada de las consideraciones anteriores. Esto se puede corregir combinando factibilidades y penalizaciones de la siguiente manera:

$$\lambda f_{di} + (1-\lambda) p_{di}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

El parámetro λ se puede elegir en cualquier nodo de manera que refleje las tendencias de la situación, por ejemplo si el nodo tiene una degeneración dual las penalizaciones son nulas, $\lambda=1$ y solo actúan las factibilidades; por otra parte si el paso pivotal dual restablece la integridad, las factibilidades son nulas, $\lambda=0$, y solo actúan las penalizaciones. Entre estos dos casos extremos se sitúan los demás y no es difícil imaginar medidas de la degeneración dual o de la no posibilidad primal para asignar valores a λ .

Otra de las características del algoritmo de Breu y Burdet es, como hemos indicado al principio, la de incorporar también el análisis de implicaciones lógicas, la experiencia les lleva a considerar que únicamente las implicaciones triviales incrementan la eficiencia. La obtención de implicaciones lógicas sofisticadas tiende a

requerir un número de operaciones prohibitivo. Como consecuencia proponen la utilización de las implicaciones según una organización en cascada de manera que se lleguen a generar las implicaciones de mayor complejidad únicamente cuando resulte económico hacerlo. Por lo demás encuentran que en cualquier operación de "branch and bound" la utilización de los mecanismos lógicos es fiable y aumenta consistentemente la eficacia del algoritmo.

La complejidad de una implicación lógica puede ser medida por el número de variables que contiene, que definiremos como su grado de complejidad, /33/.

GRADO CERO:

Agrupemos los coeficientes para cada relación lineal

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = y_i, \quad \forall i,$$

y definamos, de acuerdo con su signo:

$$J_i^+ = \{j \in N | a_{ij} \geq 0\}, \quad J_i^- = \{j \in N | a_{ij} < 0\}$$

con

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in N_{z_0} \text{ (} N_{z_0} \text{ conjunto de índices que define el nodo)} \\ \text{la cota superior de la variable } x_j, & \text{si } j \in N_{z_0} \\ +\infty & \text{si } x_j \text{ no está acotado superiormente.} \end{cases}$$

Las siguientes expresiones caracterizan el rango de la variable y_i :

$$\begin{aligned} b_i - \sum_{j \in J_i^+} a_{ij} u_j &= r_i^- \leq y_i \leq r_i^+ = \\ &= b_i - \sum_{j \in J_i^-} a_{ij} u_j \end{aligned} \quad (1)$$

Para toda solución entera las variables y_i han de ser nulas, por lo tanto el problema no tiene solución posible entera si $r_i^- < 0$ ó $r_i^+ > 0$, para algún i .

GRADO UNO:

Elegir una variable x_j , $j \in N_{z0}$, fijar $x_j = 0$ (ó 1) e investigar los términos de la relación (1).

El subproblema no tiene solución posible entera con:

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{i0}^+ < 0 \text{ ó } r_{i0}^- > 0 \\ 1 & \text{si } r_{i1}^+ < 0 \text{ ó } r_{i1}^- > 0 \end{cases}$$

Estas proporciones condicionales se generan cuando la variable x_j se propone como variable de ramificación.

GRADOS SUPERIORES:

En general se puede utilizar una combinación cualquiera de variables x_j , $j \in N_{z0}$. Supongamos

$$J_0 \subseteq N_{z0}, J_1 \subseteq N_{z0}, J_0 \cap J_1 = \emptyset$$

definamos:

$$r_i^+ = b_i - \sum_{J_1} a_{ij} - \sum_{J_1 - J_1 - J_0} a_{ij} u_j$$

$$r_i^- = b_i - \sum_{J_1} a_{ij} - \sum_{J_1^+ - J_1 - J_0} a_{ij} u_j$$

Si $r_i^+ < 0$ ó $r_i^- > 0$, se obtiene:

$$\sum_{J_0} x_j + \sum_{J_1} x_{-j} \geq 1$$

donde x_{-j} denota $1 - x_j$.

Las implicaciones elementales se pueden almacenar junto con la estructura del árbol de manera que se pueden identificar nodos no posibles sin necesidad de recurrir al análisis de los problemas LP asociados ya que:

- Toda implicación válida en un nodo dado es válida para todos los sucesores de este nodo.

- Toda implicación válida en un nodo dado ($N_{z0} = N_{\text{cero}} \cup N_{\text{uno}} \cup N_{\text{free}}$) da la siguiente expansión de validez general:

$$\sum_{N_{\text{cero}}} x_j + \sum_{N_{\text{uno}}} x_{-j} + \sum_{J_0} x_j + \sum_{J_1} x_{-j} \geq 1$$

Análogamente los grandes conjuntos de implicaciones lógicas pueden ser reducidos a sistemas equivalentes y más sencillos, aunque la experiencia demuestra que esto solo interesa en el siguiente caso:

Si $\sum_{J} x_j \geq 1$ y $\sum_{K} x_j \geq 1$ (donde $J = J_0 \cup \{-j | j \in J_1\}$)

y lo mismo para K, son ambas válidas en un nodo dado y existe exactamente un índice $|l|$ tal que $l \in J$ y $-l \in K$ entonces:

$$\sum_{(J - \{l\}) \cup (K - \{-l\})} x_j \geq 1$$

también es válida.

Entre las implicaciones lógicas que incorporan Breu y Burdet figura la siguiente utilización de las restricciones de sustitución de Geoffrion, /15/, la idea consiste en emplear la expresión lineal de Geoffrion:

$$Cx + y(b - Ax) + S = \gamma \quad (\gamma = \text{valor de corte})$$

cuando los coeficientes y_i son las variables duales óptimas y entonces:

$$y = C_B B^{-1} \quad (B = \text{base de la tabla LP óptima})$$

y sustituyendo:

$$Cx = C_B B^{-1}(b - Ax) + S = \gamma \quad S \geq 0$$

que se puede escribir como:

$$C_B x_B - C_B B^{-1} B x_B + C_N x_N - C_B B^{-1} N x_N + C_B B^{-1} b + S = \gamma$$

ó, lo que es equivalente:

$$\bar{C} x + S = \gamma - C_B B^{-1} b = \gamma - \bar{x}_0$$

Pero $S \geq 0$ implica

$$\sum_{j \in N} \bar{C}_j x_j \leq \gamma - \bar{x}_0$$

ó

$$x_0 = \sum_{j \in N} \bar{C}_j x_j + \bar{x}_0 \leq \gamma$$

de donde se deducen inmediatamente las siguientes implicaciones lógicas:

GRADO 0: Si $\gamma < \bar{x}_0$ EL NODO NO PUEDE GENERAR SOLUCIONES POSIBLES DESEABLES.

GRADO 1: Si $\bar{c}_j > \gamma - \bar{x}_0$, ENTONCES $x_j = 0$ PARA TODOS LOS SUCESESORES.

GRADO 2: Si $\bar{c}_j + \bar{c}_k > \gamma - \bar{x}_0$, ENTONCES $(1-x_j) + (1-x_k) \geq 1$ PARA TODOS LOS SUCESESORES.

Estos tests para las implicaciones lógicas se pueden aplicar en cada paso de una optimización dual LP puesto que la función objetiva es siempre posible dual.

Finalmente el algoritmo de Breu y Burdet considera toda una serie de estrategias para la elección de subproblemas. En cada paso el algoritmo elige un nodo de entre un conjunto de nodos pendientes de análisis, denominado frente, según las siguientes reglas:

PROFUNDIDAD

Se da prioridad a los nodos inmediatamente sucesores. El objetivo es identificar rápidamente una solución entera posible. El resultado depende de la eficacia de los tests de corte. La estrategia es altamente compatible con las operaciones de la programación lineal.

ANCHURA

Se elige el nodo del frente que tenga la mejor cota. Si el procedimiento de acotación es bueno esta estrategia consigue buenas soluciones rápidamente.

ALTERNANCIA ANCHURA - PROFUNDIDAD

Combinación de las estrategias anteriores según pautas preestablecidas.

COMBINACION ANCHURA - PROFUNDIDAD

Si β^h es la mejor cota de dos sucesores inmediatos del nodo h y β_b la mejor cota de los nodos del frente y q un número dado real positivo. Entonces:

Si $\beta^h > \beta_b + q$ se elige el nodo β_b

Si $\beta^h \leq \beta_b + q$ se elige el nodo β^h

CONTROL DE FRENTE

Controla la dimensión del frente en función de un parámetro $\alpha \in [0, 1]$. Sea β_w la peor cota del frente, por debajo del valor de corte. Entonces:

Si $\beta^h > \alpha\beta_w + (1-\alpha)\beta_b$ se elige el nodo β_b

Si $\beta^h \leq \alpha\beta_w + (1-\alpha)\beta_b$ se elige el nodo β^h

RAMIFICACION SIMULTANEA

Fijar varias variables sucesivas, a unos valores dados, en el mismo nodo.

ESTRATEGIAS ADAPTATIVAS

El comportamiento y la eficacia de una estrategia pueden ser analizadas a posteriori observando la estructura del árbol. La arborescencia exhibe la habilidad de una combinación determinada de reglas tácticas y estratégicas, para extraer la información relevante sobre el problema. Supongamos que los nodos de un árbol tienen unas características comunes. En este caso la experiencia recogida por el algoritmo a medida que analiza las primeras ramas puede indicar cómo una estrategia inicial ha de ser modificada. Para definir estrategias adaptativas se ha de realizar un cierto número de estimaciones estadísticas del flujo de operaciones, definir parámetros de control que recojan la historia del proceso y comparar continuamente las estimaciones con los valores de los parámetros de control.

En su publicación Breu y Burdet añaden únicamente un conjunto de tablas que describen los resultados de las diferentes combinaciones de tácticas y estrategias sobre una colección de problemas test, presentadas como un conjunto de observaciones sobre los resultados subrayando las indicaciones que hemos ido exponiendo sobre las tácticas y estrategias.

1.2 La relajación lagrangiana para la programación entera /34/

Para terminar esta visión panorámica sobre la actual situación de los métodos enumerativos, vamos a glosar la que, posiblemente

sea, una de las aportaciones teóricas más importantes, la del uso de la relajación lagrangiana en el "branch and bound".

El problema MILP puede formularse como:

$$[\text{MIN}] \quad c \cdot x$$

$$\text{Sometida a: } Ax \geq b, \quad Bx \geq d$$

(P)

$$x \geq 0, \quad x \text{ entero, } j \in I$$

donde I denota el conjunto de variables que han de ser enteras. La razón para distinguir entre dos tipos de restricciones estriba en que las segundas: $Bx \geq d$, se supone que tienen una estructura especial.

Definimos la RELAJACION LAGRANGIANA de (P) respecto a $Ax \geq b$ y un vector no negativo λ - como:

$$[\text{MIN}] \quad c \cdot x + \lambda(b - Ax)$$

(PR_λ)

$$\text{Sometido a: } Bx \geq d$$

$$x \geq 0, \quad x_j \text{ entero, } j \in I$$

Una aplicación fructífera de la relajación lagrangiana en casos específicos requiere -- una estudiada partición de las restricciones del problema en los tipos $Ax \geq b$ y $Bx \geq d$ y una apropiada elección de λ .

La relajación lagrangiana (PR_λ) debe de ser mucho más sencilla de resolver que (P) para que sea ventajosa. O bien debe admitir una forma específica de solución o debe poder -- ser resuelta mediante algún algoritmo especialmente eficaz. En cualquier caso ello exige que el conjunto de restricciones $Bx \geq d$ posea una estructura muy especial como, por -- ejemplo, la de los casos siguientes:

- Las restricciones $Bx \geq d$ especifican solamente las cotas superiores de todas, o algunas de las variables.

- Las restricciones $Bx \geq d$ son como las del caso anterior pero incluyen también algunas restricciones de acotación superior tales como:

$$\sum_{j \in J_k} x_j = 1, \quad k=1,2,\dots,K$$

QUESTIÓ - v.2, n°2 (juny 1978)

donde J_1, J_2, \dots, J_K son subconjuntos disjuntos de I . Tales restricciones conforman una función de selección múltiple.

- Las restricciones $Bx \geq d$ son como las del -- primer caso pero incluyen algunas restricciones de la forma

$$\sum_{j \in J_k} \beta_{kj} x_j \leq \beta_{kk} x_k, \quad k=1,2,\dots,K$$

donde los K subconjuntos $\{J_k\}$ son disjuntos, las variables x_1, x_2, \dots, x_k son variables 0-1, las variables de J_k son continuas y los coeficientes β son estrictamente positivos.

Se utiliza el término RELAJACION en el sentido siguiente: un problema de minimización -- (Q) se dice que es una relajación de un problema de minimización (P) si $F(Q) \geq F(P)$ y el valor de la función objetiva de (Q) es menor que la de (P) en $F(P)$ (Ver apartado 2 de la primera parte).

Evidentemente (PR_λ) es una relajación en este sentido ya que $\forall \lambda, \lambda \geq 0$ el término lagrangiano de la función objetiva, $\lambda(b - Ax)$ debe -- ser no positivo cuando se satisface $Ax \geq b$. Ob -- servemos que cualquier tipo de relajación basada simplemente en la eliminación de algunas de las restricciones (§ 2) es equivalente a la relajación lagrangiana con $\lambda=0$. Haciendo $\lambda \neq 0$ (pero siempre ≥ 0) se obtienen relajaciones más débiles.

La utilidad potencial de cualquier relajación de (P) y de la relajación lagrangiana en particular, está determinada fundamentalmente -- por cuán próxima está su solución óptima al valor óptimo de (P), lo cual proporciona un criterio para medir la "calidad" de una determinada elección de λ . La elección ideal -- consistiría en tomar como λ la solución óptima del programa cóncavo:

$$[\text{MAX}] \quad v(PR_\lambda)$$

$$\lambda \geq 0$$

(D)

que se designa por D porque coincide con el problema Lagrangiano dual de (P) con respecto a las restricciones $Ax \geq b$, /35/, problema que a su vez está estrechamente vinculado con la siguiente relajación de (P):

$$[\overline{\text{MIN}}] \quad c \cdot x$$

(P*) Sometido a: $Ax \geq b$

$$x \in C_0 \{x \geq 0: Bx \geq d, y x_j \text{ entero}, j \in I\}$$

donde C_0 denota el cierre convexo de un conjunto, que en el caso de (P*) puede ser difícil de expresar como un conjunto de restricciones lineales, pero que en principio es -- siempre posible y por lo tanto (P*) puede -- ser considerado como un programa lineal. De hecho (D) y (P*) son esencialmente programas lineales duales. Un vector multiplicador óptimo correspondiente a $Ax \geq b$ será denotado -- por λ^* cuando (P*) tenga una solución óptima. Entre (P), (PR_λ) , (D) y (\overline{P}) (relajación LP - ordinaria que elimina las condiciones de integridad), se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$a) \quad F(\overline{P}) \supseteq F(P^*) \supseteq F(P),$$

$$F(PR_\lambda) \supseteq F(P)$$

$$V(\overline{P}) \leq V(P^*) \leq V(P) \quad y$$

$$V(PR_\lambda) \leq V(P), \quad \forall \lambda \geq 0$$

b) Si (\overline{P}) es posible, $V(\overline{P}) \leq V(PR_\lambda)$

c) Si para un λ dado un vector x satisface -- las condiciones:

1) x es óptimo para (PR_λ)

2) $Ax \geq b$

3) $\lambda(b - Ax) = 0$

entonces x es una solución óptima de (P). Si x satisface las condiciones 1 y 2 pero no la 3, entonces x es una solución ϵ -óptima de (P), con $\epsilon = \lambda(Ax - b)$

d) Si (P*) es posible, entonces:

$$V(D) \equiv \max_{\lambda \geq 0} V(PR_\lambda) = V(PR_{\lambda^*}) = V(P^*)$$

e) Si (\overline{P}) es posible y (PR_λ) satisface la -- Propiedad de Integridad (Propiedad de Integridad: El valor óptimo de (PR_λ) no se altera si se suprimen las condiciones de integridad de sus variables: $v(PR_\lambda) = v(\overline{PR}_\lambda)$, $\forall \lambda$).

Entonces (P*) es posible y:

$$v(\overline{P}) = v(PR_{\lambda^*}) = v(D) = v(PR_{\lambda^*}) = v(P^*)$$

f) Suponiendo que (P) es posible (y que por lo tanto tiene una solución óptima puesto que todas las variables están acotadas), son equivalentes:

1) $v(P) = v(D)$

2) Existe un subgradiente global ϕ_b en $y=0$, $\phi_b(0) = v(P)$

3) Existe un par (λ, x) , $\lambda \geq 0$, que satisfacen las condiciones de c .

Si $v(P) = v(D)$, entonces cada solución óptima de (D) es la negativa de un subgradiente global de ϕ_b en $y=0$ y recíprocamente, y cualquiera de tales soluciones λ^* proporciona un conjunto de soluciones todas óptimas de (P) como vectores x que satisfacen las condiciones de c para $\lambda = \lambda^*$.

Donde ϕ_b es la función de perturbación - b , asociada a (P) y definida como:

$$\phi_b(y) = \left[\begin{array}{l} \text{INF} \\ c \cdot x \\ x \geq 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} Ax \geq b - y; Bx \geq d \\ x_j \text{ entero}, j \in I \end{array} \right. \right]$$

y suponiendo que $\phi_b(0) = v(P)$ es finito, definimos como subgradiente global de ϕ_b en $y=0$ a todo vector γ conformable si:

$$\phi_b(y) \geq v(P) + \gamma \cdot y \quad \forall y$$

El uso de la relajación lagrangiana en un -- branch and bound basado en la programación -- lineal

En la resolución del problema (P) por medio del "branch and bound" incluyendo la relajación lagrangiana cada uno de los subproblemas de la lista de problemas candidatos (§2), será simplemente el problema (P) al que se -- hayan añadido algunas restricciones de "separación" adicionales. El proceso iterativo -- consiste, como sabemos en elegir uno de los problemas de la lista, el problema (CP) y -- examinar sus soluciones; la práctica habitual consiste en la resolución del problema lineal (\overline{CP}) que ignora todas las condiciones de integridad de las variables de (CP). Teniendo en cuenta las condiciones (a) a (f) que acabamos de establecer es evidente que una relajación lagrangiana de (CP), (CPR_λ) es tan --

adecuada como la usual relajación (\overline{CP}) como mecanismo para examinar los problemas candidatos: la no posibilidad de (CPR_λ) implica la de (CP) ; $v(CPR_\lambda) \geq Z^*$ implica $v(CP) \geq Z^*$; y una solución óptima de (CPR_λ) , x^R , es óptima para (CP) si es una solución posible de (CP) y satisface la holgura complementaria de la condición (c). En caso de que x^R sea posible para (CP) pero no satisfaga la condición (c), puede, todavía, mejorar la solución incumbente en cuyo caso puede emplearse para actualizar la solución incumbente y Z^* aunque (CP) no se elimine. En los casos en que x^R no es solución posible de (CP) puede valer la pena intentar ajustarla de alguna manera específica dependiente del problema, de forma que se aumente la posibilidad y, posiblemente se mejore la incumbente. Esta es exactamente la misma táctica que se usa comunmente con (\overline{CP}) cuando la solución LP fraccionaria se redondea para conseguir satisfacer la integridad con la esperanza de obtener una solución posible mejorada.

La relajación habitual (\overline{CP}) se utiliza también para obtener cotas condicionales que se utilizan como guías para la separación, para marcar los subproblemas candidatos recién creados con cotas inferiores de su valor óptimo, y para reducir el rango de las restricciones sobre las variables enteras sin sacrificar la optimalidad. Las relajaciones lagrangianas de (CP) se pueden emplear con los mismos propósitos.

Supongamos que alguna variable $j \in I$ tiene un valor fraccionario en la solución \overline{x} , LP, de (\overline{CP}) . Nos interesan las cotas inferiores de $v(CP | x_j \leq \lfloor \overline{x}_j \rfloor)$ y $v(CP | x_j \geq \lceil \overline{x}_j \rceil)$ que vienen dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} V_D(j) &= v(CPR_\lambda | x_j \leq \lfloor \overline{x}_j \rfloor) \\ V_U(j) &= v(CPR_\lambda | x_j \geq \lceil \overline{x}_j \rceil) \end{aligned} \quad (2)$$

Si se cumple que $V_D(j) \geq Z^*$, entonces se puede poner el límite inferior de x_j a $\lfloor \overline{x}_j \rfloor$. Análogamente si $V_U(j) \geq Z^*$ la restricción sobre el rango superior se puede rebajar a $\lceil \overline{x}_j \rceil$. Incluso es posible que simultáneamente sean $V_D(j) \geq Z^*$ y $V_U(j) \geq Z^*$, en cuyo caso se puede eliminar el subproblema (CP) . Las cotas (2) se pueden tomar como guía para la ramificación en el caso en que (CP) no se elimina. Calculemos $V_D(j)$ y $V_U(j)$, $\forall j \in I$, tal que x_j

sea fraccionaria. Una posible regla de elección de la variable de ramificación sería aquella que maximiza los mayores $V_D(j)$ y $V_U(j)$ sobre todos los j elegibles. Una vez que se ha elegido una variable de separación j_0 , $V_D(j_0)$ y $V_U(j_0)$ proporcionan las cotas inferiores para las futuras referencias a los subproblemas candidatos recién creados.

El cálculo de las cotas condicionales tiene la misma estructura que (CPR_λ) , puesto que hemos supuesto que las restricciones de acotación sobre las variables, se incorporan a las restricciones especiales $Bx \geq d$, así como (CPR_λ) tiene la misma estructura que (PR_λ) - si, como es usualmente el caso, las restricciones de separación empleadas son, simplemente, restricciones de acotación de las variables.

La relajación lagrangiana se puede utilizar no solo para las tareas estándar de la metodología del "branch and bound", de eliminación de subproblemas, generación de soluciones posibles mejoradas, reducción de cotas, ramificación etc., sino también, para generar restricciones de sustitución y planos secantes.

Dos cuestiones estratégicas fundamentales se plantean en conexión con la elección de λ y si (CPR_λ) se debe utilizar antes, después, o en vez de (\overline{CP}) . Estas cuestiones no pueden ser respondidas de una manera general y definitiva, pero una consideración muy importante es la de si la Propiedad de Integridad se satisface para la partición de restricciones que estamos considerando.

Supongamos que se cumple la Propiedad de Integridad. Entonces (CPR_λ) puede ser no posible si y solo si (\overline{CP}) es no posible, pero si (\overline{CP}) es posible, por las condiciones establecidas debe proporcionarnos la mejor elección posible de λ para (CPR_λ) y $v(CPR_\lambda) = v(\overline{CP})$. Por lo tanto (CPR_λ) no puede eliminar (CP) por no posibilidad o por valor a menos que (\overline{CP}) también lo hiciera. También se puede demostrar que al menos uno de los límites condicionales $V_D(j)$ y $V_U(j)$ debe coincidir con $v(\overline{CP})$ para cada variable que sea fraccionaria en una solución óptima de (\overline{CP}) cuando la elección natural λ a partir de (\overline{CP}) se emplea en (1). Estos hechos argumentan en contra del uso de la relajación lagrangiana cuando se cumple la Propiedad de Integridad.

Tiene poco que ofrecer que no haya sido ya - cumplimentado por (CP), aunque puede probar posiblemente que es más fructífera que (CP) como fuente de soluciones posibles mejoradas. Es importante reconocer, sin embargo, que esta conclusión negativa descansa sobre la suposición implícita de que (CP) es de dimensiones manejables como programa lineal, en caso contrario (CPR_λ) puede ser una alternativa atractiva desde el punto de vista del cálculo, como en la práctica ha demostrado - el trabajo de Held y Karp, /36/, sobre el -- problema del viajante de comercio. E incluso aunque (CP) sea de dimensiones manejables -- puede ser ventajoso desde el punto de vista del cálculo analizar previamente (CPR_λ) , con la única condición de que, al omitir (CP) hemos de definir un método de estimación de λ , la esperanza de este análisis es que la relación lagrangiana permita (CP) sin tener -- que recurrir a un programa lineal mucho más costoso, como es (\overline{CP}) . La mejor elección para λ es la del vector correspondiente al programa lineal del candidato previo, más estrechamente relacionado con el que estamos estudiando. Esta táctica coincide en algunos casos con el uso de las restricciones de sustitución.

Supongamos ahora que la Propiedad de Integridad no se cumple. Entonces (\overline{CP}) no tiene por qué proporcionarnos necesariamente el mejor valor de λ , y (CPR_λ) puede tener éxito en la consecución de los objetivos de eliminación allí donde (\overline{CP}) falla. Tiene sentido estratégico, en este caso, llamar a (CPR_λ) , antes, después, o incluso en vez de (\overline{CP}) , dependiendo de la relativa debilidad y coste de cálculo de las dos relajaciones. La estrategia -- más eficaz depende también del papel jugado por (\overline{CP}) en la generación del valor de λ a -- usar en (CPR_λ) , puesto que (\overline{CP}) puede ser empleado para generar un valor inicial de λ -- que puede ser mejorado por cualquier método independiente.

Para indicar los posibles métodos para encontrar un valor de λ adecuado vamos a considerar con objeto de simplificar la notación, - la situación antes de que se haya efectuado ninguna ramificación. Entonces (CP) es (P) y (CPR_λ) es precisamente (PR_λ) . La situación - general es completamente análoga.

Hay dos tipos de aproximación al cálculo de

un valor adecuado de λ para (PR_λ) : la (sub) optimización del programa lagrangiano dual cóncavo (D) y la (sub)optimización del programa lineal (P^*) . La primera aproximación proporciona λ directamente, mientras que la segunda proporciona λ indirectamente como - el vector multiplicador asociado a las restricciones $Ax \geq b$ de (P^*) .

Consideremos el primer enfoque. Uno de los métodos más prometedores para la búsqueda - de una solución óptima de (D) es vía el método de Agmon - Motzkin - Schoenberg tal como lo han reelaborado Held y Karp, /37/, o como lo expone el estudio de Held, Crowder y Wolfe, /38/. La idea es muy sencilla. Sea $\lambda^v \geq 0$ la estimación en curso de una solución óptima de (D) y sea x^v una solución óptima de (PR_{λ^v}) . Entonces la nueva estimación es:

$$\lambda^{v+1} = \text{MAX} \{ \lambda^v + \theta^v (b - Ax^v), 0 \}$$

donde el operador MAX es aplicado componente a componente y θ^v es un parámetro que ha de satisfacer ciertos requerimientos, /38/. El vector $(b - Ax^v)$ es un subgradiente de -- $v(PR_{\lambda^v})$ para $\lambda = \lambda^v$ pero la secuencia $\langle v(PR_{\lambda^v}) \rangle$ no es necesariamente monótona. En muchas -- aplicaciones, /37/, /38/, /39/, se han obtenido resultados favorables. Otra alternativa consiste en aplicar a (D) un método ascendente, /39/, /40/, /36/.

Consideremos ahora la aproximación indirecta vía (P^*) . Quizás el método más evidente consiste en la aplicación de la programación generalizada (descomposición de Dantzig - Wolfe) a la porción del cierre convexo de las restricciones de (P^*) expresadas en función de sus puntos extremos. Los problemas generados son, precisamente de la forma (PR_λ) . -- Otra posibilidad sería aplicar a (P^*) el método simplex primal-dual acomodado para operar con el cierre convexo. Este método desarrollado por Fisher y Shapiro, /40/, puede - ser interpretado también como un método ascendente para (D). En algunas aplicaciones - la forma de las restricciones que describen el cierre convexo de (P^*) permiten aplicar a (P^*) , directamente, el método simplex dual, que es posiblemente uno de los mejores para obtener rápidamente un valor de λ , cuando se puede aplicar.

2. BIBLIOGRAFIA

- /1/ GEOFFRION, A.M. & MARSTERN, R.E. "Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-the Art Survey", M.G. SC. 18, 7, 1972, pp. 137-163.
- /2/ BEALE, E.M. & TOMLIN, J.A. "Special Facilities in a General Mathematical Programming System for non-convex Problems using ordered sets of variables". J. LAWRENCE (ed.). Proceedings of the Fifth - International Conference of Operational Research, Venice, Tavistock Publications, London, 1969.
- /3/ BALAS, E. "An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables". Opns. Res. 13, 4, 1965, pp. 517-546.
- /4/ LAND, A.H. & DOIG, A.G. "An automatic - method for solving discrete programming problems". Econometrica, 28, 1969, pp. 497-520.
- /5/ DAKIN, R.J. "A tree-search algorithm for mixed integer programming problems". Computer Journal, 8, 3, 1965, pp. 250-255.
- /6/ DRIEBEEK, N.J. "An algorithm for the solution of mixed integer programming problems". Man. SCI. 12, 1966, pp. 576-587.
- /7/ DAVIS, R.E., KENDRIKK, D.A. & WEITZMAN, M. "A Branch and Bound Algorithm for zero-one mixed integer programming problems". Opns. Res. 19, 1971, pp. 1036-1044.
- /8/ TOMLIN, J.A. "Branch and Bound Methods - for Integer and non-convex Programming". J. ABADIE (ed.) "Integer and Nonlinear Programming". North-Holland, Amsterdam, -- 1970.
- /9/ TOMLIN, J.A. "An Improved Branch and -- Bound Method for Integer Programming". - Opns. Res. 19, 4, 1971, pp. 1070-1071.
- /10/ ARMSTRONG, R.D. & SINHA, P. "Improved - Penalty Calculations for a mixed integer Branch and Bound Algorithm". Math. Prog. 6, 1974, pp. 212-223.
- /11/ BENICHO, M., GAUTHIER, J.M., GIRODET, P., HENTGES, G., RIBRERE, G. & VINCENT, O. "Experiments in Mixed Integer Linear Programming". Math. Prog. 1, 1971, pp. 76-94.
- /12/ FORREST, J.J.H., HIRST J.P.H. & TOMLIN, J.A. "Practical Solution of large mixed integer Programming Problems with Umpire". Man. SCI. 20, 1974, pp. 736-773.
- /13/ PROTTER, L.E. & SHETTY, C.M. "An Algorithm for the Bounded Variable Integer Programming Problem". J. ACM. 21, 1974, pp. 505-513.
- /14/ GLOVER, F. & ZIONTS, S. "A note on the Additive Algorithm of Balas". Opns. -- RES. 13, 1965, pp. 546-549.
- /15/ GEOFFRION, A.M. "An improved implicit enumeration approach for Integer Pro--gramming". Opns. RES. 17, 1969, pp. - 437-454.
- /16/ GEOFFRION, A.M. "Integer Programming - by Implicit Enumeration and Balas Method". Siam. REV., 7, 1967, pp.178-190.
- /17/ GLOVER, F. "A Multiphase-Dual Algorithms for the Zero-One Integer Programming - Problem". Opns. RES., 13, 1965, pp. -- 879-919.
- /18/ BALAS, E. "Discrete Programming by the Filter Method". Opns. RES., 15, 1967, pp. 915-957.
- /19/ GLOVER, F. "Surrogate Constraints". -- Opns. RES. 16, 1968, pp. 741-749.
- /20/ ZOUTENDIJK, G. "Enumeration Algorithms for the pure and mixed Integer Program--ming Problem". Proceedings of the Princeton Symposium of Mathematical Program--ming. Princeton University Press, 1970.
- /21/ LEMKE, C.E. & SPIELBERG, K. "Direct - Search Zero-One and mixed Integer Programming". Opns. RES., 15, 1967, pp. 892-914.
- /22/ ROY, B., BENAYOUN, R. & TERCNY, J. -- "From S.E.P. Procedure to the Mixed - Ophelie Program". J. ABADIE (ed). "In-

- teger and non linear Programming", - North Holland, Amsterdam, 1970.
- /23/ MITRA, G. "Investigation of some Branch and Bound Strategies for the solution - of mixed Integer Linear Programs". Math. Prog., 4, 1973, pp. 155-170.
- /24/ GAUTHIER, J.M. & RIBIERE, G. "Experi-- ments in Mixed-Integer Linear Program-- ming using Pseudocosts". Math. Prog. 12, 1, 1977.
- /25/ BREU, R. & BURDET, C. "Branch and Bound Experiments in Zero-One Programming". - Math. Prog. Study, 2, 1974, pp. 1-50.
- /26/ BEALE, E.M.L. & SMALL, R.E. "Mixed Inte-- ger Programming by a Branch and Bound - Technique". W.A. KALENICH (ed.), Pro-- ceedings of the IFIP Congress 1965, -- vol. 2, Spartan Press, 1965.
- /27/ BEALE, E.M.L. "Advanced Algorithmic Fea-- tures for General Mathematical Program-- ming Systems". J. ABADIE (ed.), "Inte-- ger and Non Linear Programming", North Holland, Amsterdam, 1970.
- /28/ BALAS, E. "Intersection Cuts: A new ty-- pe of cutting planes for Integer Pro-- gramming". Opns. RES., 19, 1, 1971, pp. 19-39.
- /29/ BALAS, E. "Integer Programming and Con-- vex Analysis. Intersection Cuts from -- Outer Polars". Math. Prog., 2, 1972, -- pp. 330-382.
- /30/ BURDET, C.A. "Enumerative Cuts: I" Opns. Res., 21, 1, 1973, pp. 61-89.
- /31/ GLOVER, F. "Convexity Cuts and Cut -- Search". Opns. RES., 21, 1, 1973, pp. 123-134.
- /32/ DANTZIG, G.B. "Linear Programming and - Extensions". Princeton University Press, 1963.
- /33/ SPIELBERG, K. "Minimal Preferred Reduc-- tion for Zero-One Programming". Tech. - REP. N° 320 3013 IBM, Philadelphia Sci-- entific Center, 1972.
- /34/ GEOFFRION, A.M. "Lagrangean Relaxation for Integer Programming". Math. Prog. - Study, 2, 1974, pp. 82-114.
- /35/ GEOFFRION, A.M. "Duality in Non Linear Programming" Siam Review, 13, 1971, pp. 1-37.
- /36/ HELD, M. & KARP, R.M. "The Travelling - Salesman Problem and Minimum Spanning - Trees". Opns. RES., 18, 1970, pp. 1138-1162.
- /37/ HELD, M. & KARP, R.M. "The Travelling - Salesman Problem and Minimum Spanning - Trees: Part II". Math. Prog., 1, 1971, pp. 6-25.
- /38/ HELD, M., WOLFE, P. & CROWDER, H.P. -- "Validation of Subgradient Optimization" Mathematical Sciences lepartment, IBM - Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y., 1973.
- /39/ FISHER, M.L., NORTHUP, W.D. & SHAPIRO, J.F. "Using Duality to solve Discrete - Optimization Problems: Theory and Compu-- tational Experience". Working Paper or 030-74. Operations Research Center, -- M.I.T., 1974.
- /40/ FISCHER, M.L. & SHAPIRO, J.F. "Construc-- tive Duality in Integer Programming". - Siam Journal and Applied Mahtematics, - 27, 1974, pp. 31-52.

3. NOTAS

- ¹Este trabajo fué presentado en el Seminario de Programación Matemática PM'77, Madrid. - La primera parte del mismo se publicó en -- QÜESTIÓ, v.2, n°1, 1978, pp. 51-68.