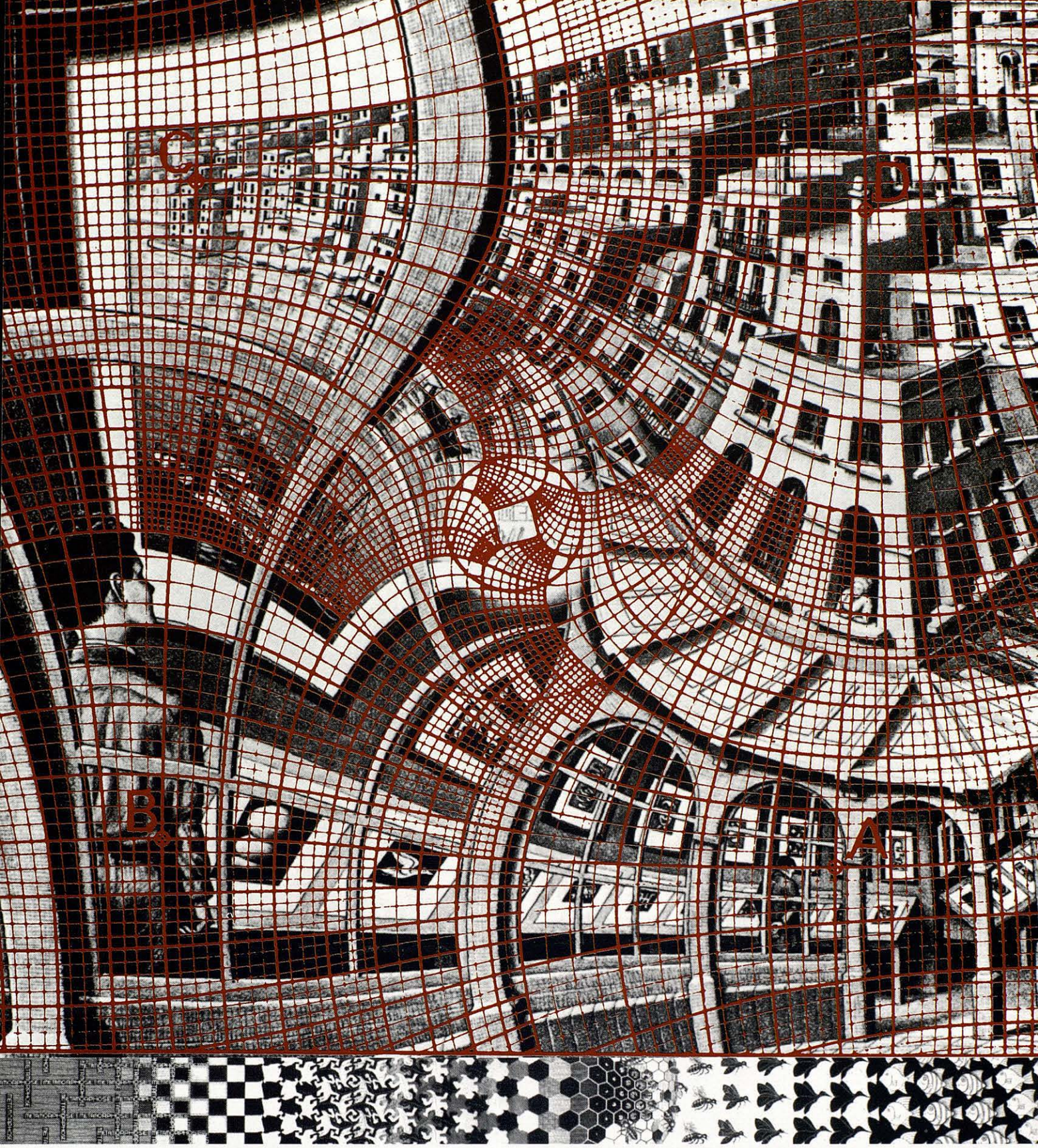
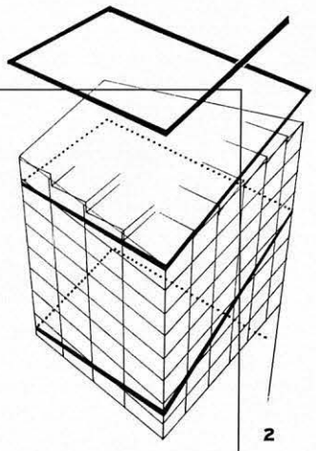


BUCLES | BOUCLES

JERARQUIES ENREDADES
HIÉRARCHIES BROUILLONNE

DOUGLAS R. HOFSTADTER



En el concepte de "bucles" hi ha implícit el d'"infinit". En molts dels dibuixos de M.C. Escher s'hi poden veure còpies múltiples d'un tema determinat que s'acoblen les unes a les altres, i conformen, així, els anàlegs visuals dels cànons de Bach. Diversos d'aquests esquemes apareixen en els seus gravats més famosos. Igual que el *Cànon eternament remuntant* de Johann Sebastian Bach, progressen i progressen a partir d'un punt inicial i de sobte es troben al punt de partida. Alguns dels dibuixos mostren un tema concret en diversos nivells de realitat. L'observador no pot sinó quedar atrapat per una cadena implícita de nivells, en què per a cada nivell sempre n'existeix un altre més amunt, de més "realitat", i, així mateix, un altre més avall, un nivell més "imaginari". Tot això per si mateix ja ens pot produir vertigen. Però, i si la cadena de nivells, en lloc de ser lineal, forma un bucle? Què és aleshores el real i què el fantàstic? El geni d'Escher consisteix a haver pogut no solament concebre, sinó representar, negre sobre blanc, figura i fons, dotzenes de móns meitat reals i meitat mítics, móns plens de *bucles estranys* que ell posa davant del ulls del contemplador com convidant-lo a penetrar-hi. [...]

1

2

En els exemples de *bucles estranys* de Bach i d'Escher hi ha un conflicte entre el finit i l'infinit i, conseqüentment, una forta sensació de paradoxa. La intuïció ens diu que hi ha alguna cosa matemàtica en joc. Doncs bé, en aquest segle s'ha descobert, en efecte, una contrapartida matemàtica que ha tingut unes més repercussions tremendes. Així com els bucles de Bach i Escher corresponen a intuïcions molt simples i antigues —una escala musical, una escala arquitectònica enroscada—, així també el descobriment de K. Gödel d'un *bucle estrany* en els sistemes matemàtics té el seu origen en intuïcions simples i antigues. En la seva forma més nua o descarnada, el descobriment de Gödel suposa la traducció d'una vella paradoxa filosòfica a termes matemàtics. Em refereixo a l'anomenada *paradoxa d'Epimènides*, o *paradoxa del mentider*. Epimènides, cretenc, va fer immortal aquesta asseveració: "Tots els cretencs són mentiders". Una versió més esmolada de la paradoxa és senzillament: "Aquesta veritat és falsa". És una asseveració que de manera brutal contradiu la dicotomia tan generalment acceptada entre asseveracions vertaderes i asseveracions falses, ja que si per un moment la prenem com a vertadera, immediatament se'ns dispara per la culata i comencem a pensar que és falsa. Però un cop hem decidit que és falsa, un tret per la culata semblant ens fa tornar a la idea que és vertadera.

La paradoxa d'Epimènides és un *bucle estrany* d'un sol pas, com el *Cànon eternament remuntant* de Bach i les *Galeries de gravats* d'Escher. I quina relació té amb la matemàtica? Aquí és on entra el descobriment de Gödel. A Gödel se li va ocórrer la idea d'utilitzar el raonament matemàtic per explorar el raonament matemàtic. Aquesta idea de fer de la matemàtica una disciplina "introspectiva" va resultar ser enormement dinàmica. (...)

Gödel va intuir que una proposició de la teoria dels nombres podia parlar *sobre* una proposició de la

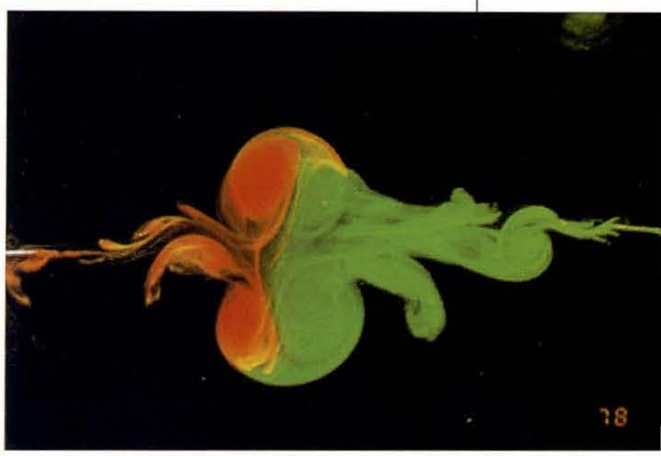
Le concept de « boucles » s'insère dans celui de l'*infini*. Dans de nombreux dessins de M.C. Escher, il est possible de voir multiples des copies d'un thème déterminé qui s'accouplent les unes aux autres, constituant ainsi les analogues visuels des canons de Bach. Plusieurs de ces schémas apparaissent dans ses gravures les plus connues. Comme dans le *Canon Perpétuel* de Johann Sebastian Bach, elle progressent et progressent à partir d'un point central pour bientôt se retrouver au point de départ. Certains des dessins montrent un thème donné en divers niveaux de réalité. L'observateur à s'observer lui-même comme une partie propre d'un autre niveau. Et une fois ce pas franchit, l'observateur ne peut que se sentir attrapé par une chaîne implicite de niveaux dans laquelle au sein de chaque niveau existe un autre encore plus élevé, de plus grande « réalité », et pareillement un autre plus bas, un niveau plus « imaginaire ». Ce phénomène, à lui seul, peut causer le vertige.

3

Mais si la chaîne de niveau, au lieu d'être linéaire formait une boucle ? Le génie de Escher est de non seulement avoir pu concevoir, mais aussi d'avoir pu représenter, noir sur blanc, figure et fond, des dizaines de mondes mi-réels, mi-mythiques, mondes pleins de *boucles étranges* qu'il met en vue de l'observateur comme pour l'inviter à y pénétrer. [...]

Dans les exemples des boucles étranges de Bach et de Escher, il y a un conflit entre le fini et l'infini et, par conséquent, une forte sensation de paradoxe. On a l'intuition que quelque chose de mathématique est en jeu. Ainsi, durant ce siècle, une contrepartie mathématique en a été découverte, ce qui a eu des répercussions impressionnantes. Comme les boucles de Bach et les travaux de Escher correspondent à des intuitions très simples et anciennes — une échelle musicale architecturale, un escalier — la découverte, par K. Gödel, d'une *boucle étrange* dans les systèmes mathématiques trouve son origine en des intuitions simples et anciennes. Dans sa forme la plus nue et la plus crue, la découverte de Gödel suppose la traduction d'un vieux paradoxe philosophique en termes mathématiques. Ainsi en est-il du *paradoxe de Épiménide*, ou *paradoxe du menteur*. Épiménide, un crétois, fit cette affirmation immortelle : « Tous les crétois sont des menteurs ». Une version plus aiguisée du paradoxe est simplement : « Cette vérité est fausse ». C'est une affirmation qui contredit brutalement la dichotomie généralement acceptée entre des affirmations vraies et des affirmations fausses. Si durant un temps nous la prenons pour vraie, elle nous prend à revers, nous obligeant à penser qu'elle est fausse. Mais une fois

teoria dels nombres (fins i tot, potser sobre ella mateixa) a condició, simplement, de fer que els nombres complissin la funció de les proposicions. Dit d'una altra manera, en la medul·la de la seva construcció hi ha la idea de "codi". En el Codi de Gödel, anomenat generalment *numeració de Gödel*, els nombres compleixen funcions de símbols i de seqüència de símbols. D'aquesta manera, com que és una seqüència de símbols especialitzats, cada proposició de la teoria dels nombres adquireix un "nombre de Gödel", una cosa semblant a un número de telèfon o de matrícula de cotxe mitjançant el qual ens hi podem referir. Aquest recurs de codificació permet que les proposicions de la teoria dels nombres s'entenguin a dos nivells diferents: com a proposicions de la teoria dels nombres i com a *proposicions sobre proposicions de la teoria dels nombres*.
Un cop inventat aquest esquema de codificació, el trasplantament final de la paradoxa d'Epimènides a aquesta teoria diria: "Aquesta asseveració de la teoria dels nombres no té cap demostració en el sistema dels *Principia Mathematica*."
Els lectors moderns segurament no experimentaran davant d'això la mateixa perplexitat que els de 1931, ja que en aquest interval la nostra cultura ha absorbit el teorema de Gödel, juntament amb les revolucions conceptuals de la relativitat i de la mecànica quàntica i els seus missatges filosòficament desorientadors han arribat fins al gran públic, tot i que afeblits per diverses capes de traducció. L'actitud general dels matemàtics d'avui consisteix a esperar solament resultats "limitats"; però el 1931 la cosa va caure com un llamp sec. (...)
Aquells mateixos anys (entre 1930 i 1950) van veure com es desenvolupaven a *bots i empentes* les teories computacionals pioneres lligades, íntimament, a la matemàtica. El teorema de Gödel no va tri-

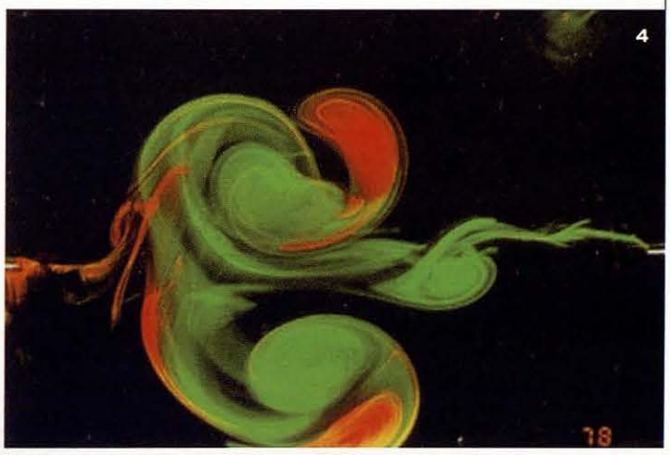


que l'on a décidé qu'elle était fausse, une prise à revers analogue nous fait revenir à l'idée qu'elle est vraie.
Le paradoxe de Épiménide est une *boucle étrange* à lui seul, au même titre que le *Canon Perpétuel* de Bach ou *La Galerie de Gravures* de Escher. Quel est le point commun avec la mathématique ? C'est là qu'intervient la découverte de Gödel. Il eut l'idée d'utiliser le raisonnement mathématique pour explorer le raisonnement mathématique. Cette idée de faire de la mathématique une discipline « introspective » résultat être fort dynamique. [...]
Pour ne pas laisser le lecteur sur sa faim, je brosserai en quelques coups de pinceau le nucleus de cette idée. Il faut, en premier lieu, définir où se situe exactement la difficulté. Les propositions mathématiques – limitons nous à celles de la théorie des nombres – se réfèrent aux propriétés des nombres entiers. Les nombres entiers ne sont pas des propositions, comme ne le sont pas non plus leurs propriétés. Une proposition de théorie des nombres ne mentionne rien *à propos* d'une proposition de théorie des nombres ; ce n'*est* qu'une proposition des nombres. Voila le coeur du problème. Gödel se rendit compte que quelque chose y bouillait. Il eut l'intuition qu'une proposition de théorie des nombres pourrait discourir *à propos* d'une proposition de théorie des nombres (voire à propos d'elle-même) à condition, simplement, de faire en sorte que les nombres remplissent la fonction des propositions. Dit autrement, dans la moelle de sa construction se trouve l'idée de « code ». Dans le Code de Gödel, communément appelé « numération de Gödel », les nombres remplissent des fonctions de symboles et de séquences de symboles. Etant une séquence de symboles spécialisés, chaque proposition de théorie des nombres acquière un « nombre de Gödel », quelque chose ressemblant à un numéro de téléphone ou une plaque minéralogique permettant de s'y référer. Ce recours à la codification permet que les propositions de théories des nombres se comprennent à deux niveaux distincts : comme propositions de théorie des nombres et comme *propositions à propos de propositions de théorie des nombres*.
Le schéma de codification inventé, la transposition finale du paradoxe d'Épiménides dans cette théorie dirait : « Cette affirmation de théorie des nombres n'a pas de démonstration dans le système des *Principia Mathemetica* ».
Les lecteurs modernes ne pourront y ressentir la même perplexité que ceux de 1931, puisqu'entre temps, notre culture a absorbé le Théorème de Gödel, au même titre que les révolutions conceptuelles de la relativité et de la mécanique quantique et leurs messages philosophiquement déroutants ont été divulgués jusqu'au grand public, bien qu'émoussés par différentes couches de traduction. L'attitude générale des mathématiciens actuels est de ne pas en attendre autre chose que des résultats « limitatés », mais en 1931 son théorème fit l'effet d'une bombe. [...]
Entre les années 30 et les années 50, les théories sur la computation pionières étaient intimement liées à la mathématique. Le Théorème de Gödel ne tarda pas à gagner une place dans un principe parallèle à la Théorie

gar a tenir, en la teoria de la computació, un principi paral·lel (descobert per Alan Turing) que revelava l'existència de "forats" inevitables fins en la computadora més potent que es pugui imaginar... (de fet, la noció de *bucle estrany* o paradoxa autoreferencial esta íntimament unida a la de "jerarquia enredada", freqüent en programacions codificades). (...)
Una "jerarquia enredada" apareix quan el que se suposava que era una sèrie de nivells nítidament jeràrquics ens sorprèn tancant-se sobre ella mateixa, de manera que viola el principi jeràrquic. L'element sorpresa és important i per això aquests bucles s'anomenen "estranys".
El llenguatge –tota programació codificada i tot sistema formal– origina *bucles estranys* quan parla d'ell mateix, directament o indirectament. En aquests casos, alguna cosa "interior" al sistema salta cap enfora i actua sobre aquest mateix sistema com si en fos "exterior". El que ens pertorba aquí potser és un assortiment, mal definit, de la inexactitud topològica: la distinció entre interior-exterior és esborrada, com en la cèlebre configuració anomenada *"ampolla de Klein"*: encara que el sistema sigui una abstracció, la nostra ment apel·la a la imaginació espacial amb l'ajut d'un tipus de topologia mental. [...]
La informació flueix, en efecte, a través d'un complex remolí, entre els diversos nivells; mentre gira el remolí, algunes de les seves parts es veuen magnificades, reduïdes, negades o, sigui com sigui, distorsionades; després, es van emmotllant de nou a la mateixa espècie de "remolí", i així una vegada i una altra...; tot això procura reconciliar el que és amb el que pensem que és o desitjaríem que fos.

[Extractes de Douglas R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach un eterno y grácil bucle*, Tusquets, col. Metatemas, Barcelona 1995]

Douglas R. Hofstadter. Matemàtic i físic. Premi Pulitzer i American Book Award, 1998.



1 **Esquema geomètric "Print Gallery" superposat a la seva litografia**
Lithographie "Print Gallery", superposée avec un schéma géométrique., M.C. Escher, 1956.
2 **Desenvolupament de l'escala impossible de Penrose** Développement de l'escalier impossible de Penrose. M.C.Escher
3 **"Metamorphosis II"** "Métamorphose II", M.C. Escher. 1939-40.
4 **Els científics de l'Institut de Meteorologia i Oceanografia de la Universitat d'Utrecht van llançar a raig líquids acolorits en un tanc d'aigua salada i van observar com es generaven turbulències i esclats i els líquids col·lidien i s'organitzaven en un vòrtex de dos caps.**
Les scientifiques de L'Institut Météorologique et Océanographic de l'Université d'Utrecht versnat avec puissance un liquide coloré dans un réservoir d'eau salée et observant la réactiion et s'organisant en un tourbillon de deux

de la Computation (découvert par Alan Turing), principe qui révélait l'existence de « trous » indétectables, même pour l'ordinateur le plus puissant qui soit... (de fait, la notion de *boucles étranges*, ou paradoxe auto-référentiel est intimement liée à celle de « *hiérarchie brouillonne* », fréquemment utilisée lors de programmations codifiées). [...]
Une « hiérarchie brouillonne » apparaît quand une série de niveaux hiérarchiquement ordonnés nous donne la surprise de se refermer sur elle-même, de sorte qu'elle viole le principe même de hiérarchie. L'élément surprise est d'importance, d'où le fait de nommer ces boucles « étranges ».
Le langage – toute programmation codifiée ou tout système formel – forme des « boucles étranges » quand il parle de lui-même, que ce soit de forme directe ou indirecte.
Dans ces cas, quelque chose d'« intérieur » au système bondit vers l'« extérieur » et agit sur lui-même, comme s'il en était extérieur. Ce qui nous perturbe ici a affaire à un assortiment, mal défini, de l'inexactitude topologique : la distribution entre intérieur et extérieur s'efface, comme la célèbre configuration nommée « bouteille de Klein » : même quand le système est une abstraction, notre esprit appelle à l'imagination spatiale, avec l'aide d'une forte topologie mentale. [...]
L'information s'écoule, à travers un tourbillon complexe, entre les différents niveaux ; le tourbillon s'agite. Certaines de ses parties sont vues de forme magnifique, réduites, niées, souffrant de distorsion. Puis elles retournent se faire moudre au même type de « moulin », ainsi encore et encore... ; ceci permet de réconcilier ce qui est avec ce que nous aimerions qui soit.

[Extraits de Douglas R. Hofstadter : *Gödel, Escher, Bach un eterno y grácil bucle*, ed. Tusquets, col. Metatemas, Barcelone 1995]

Douglas R. Hofstadter. Mathématicien et physicien. Prix Pulitzer et American Book Award, 1998.