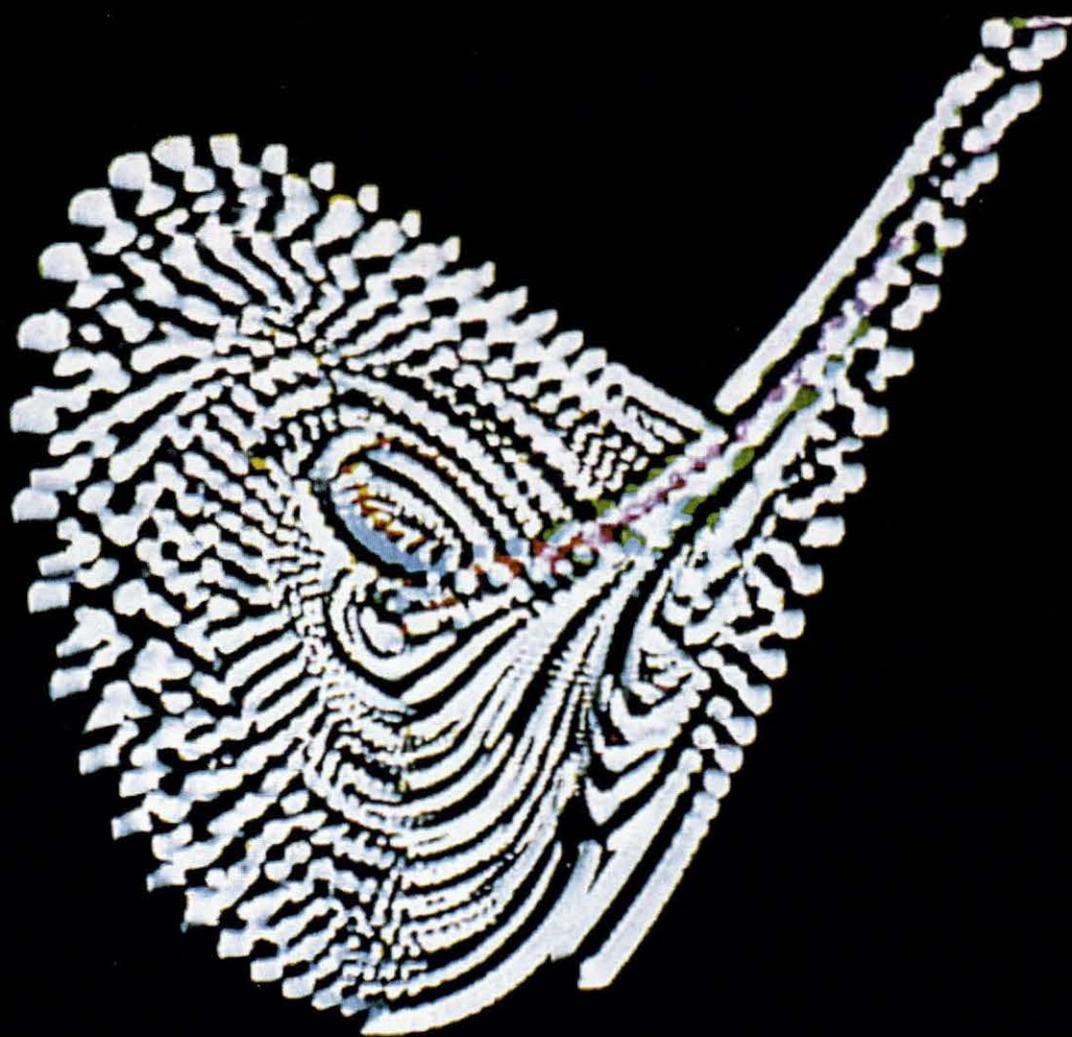


EL CAOS EXISTEIX, EL PODEM DESCOBRRIR

LE CHAOS EXISTE, NOUS POUVONS LE DÉCOUVRIR

IVAR EKELAND



1. PROTOCOLS Observem les voltes que fa un saltimbanqui boig al voltant d'una barra fixa. Un autòmat desenfrenat que gira i fa cabrioles sense repetir-se mai.

Llancem-lo, i comptem les voltes que fa en cada sentit abans de tornar-se a aturar.

+ 5 2 2 2 2 3 2 2 3 1 4 4 1 2 3 4 3 5 2 4 3 1

Aquesta sèrie és el que anomenem un protocol d'experiència. El signe més (+) indica que la primera volta s'ha fet en el sentit de les agulles del rellotge; el signe menys (-) indica el cas contrari. (...)

En aquest protocol no hi ha cap regularitat aparent, cap regla de successió que permeti endevinar un xifra a partir de la o les que la precedeixen. A un 2, de vegades el segueix un 2, altres un 3 o un 4; i de la mateixa manera, després d'un parell de xifres, com ara 5/2, de vegades hi va un 2, o un 4. Si em donessin les dues primeres vint-i-dues xifres i em demanessin que "completés la sèrie", és a dir, que endevinés la xifra que fa vint-i-tres, no se m'acudiria res millor que posar-hi un 2, simplement perquè és la xifra més freqüent i, per tant, també la més probable. I amb aquesta opció apel·lo a una de les creences més antigues de la humanitat: el futur ha de reproduir el passat. Allò que ja ha succeït tornarà a succeir, i allò que ahir era freqüent, demà també ho serà. (...)

De fet, el "càlcul" determinista apareix habitualment en la literatura científica: va ser enunciat per Laplace el 1812 (la llegenda diu que en Laplace va proposar una aposta de 1.828.214 contra u, que el sol sortiria l'endemà al matí, sabent que cinc mil anys fan 1.828.213 dies). (...)

Però pel que fa al saltimbanqui, només en puc calcular les freqüències d'aparició tenint en compte les observacions passades, i pregar perquè aquestes freqüències es respectin més o menys en el futur. (...)

Comencem de nou l'experiència:

- 3 3 1 3 4 1 1 1 4 3 1 3 3 5 3 5 2 2 2 5 4 2

I, altre cop:

- 1 2 3 5 4 5 2 5 1 5 5 4 4 5 4 1 3 2

Dues vegades més:

- 1 3 2 4 1 4 5 3 5 1 5 3 5 1 3 5 4 3 2 2

+ 5 2 5 3 5 3 1 3 4 4 2 2 5 5 1 5 2 1 3

1 Atractor estrany de Rösseler Attracteur étrange de Rösseler

2 L'atractor de Lorenz. Veiem la forma de sella de montar, característica de l'atractor de Lorenz, que està constituït de dues fulles, una a l'esquerra i l'altra a la dreta. L'estructura perlada de cadascuna d'elles és una temptativa de l'ordinador per traduir l'estructura laminada molt particular en "milles fulles foradada", que hem intentat descriure. Un moviment qualsevol surt de la fulla de l'esquerra i hi fa diverses voltes abans de passar a la fulla de la dreta. Aleshores torna, oscil·lant així perpètuament d'una fulla a l'altra. © J.-F.Colonna/GSV-Lactanne (CNET, École polytechnique).

L'attracteur de Lorenz. On voit la forme de selle, caractéristique de l'attracteur de Lorenz, qui est constitué de deux feuilles, l'une à gauche et l'autre à droite. La structure perlée de chacune d'elles est une tentative de l'ordinateur pour rendre la structure feuilletée très particulière, en "mille-feuilles lacunaire", que nous avons tâché de décrire. Un mouvement quelconque partira sur la feuille de gauche, et y fera plusieurs tours avant de passer sur la feuille de droite, puis de revenir, oscillant ainsi perpétuellement d'une feuille à l'autre.

© J.-F.Colonna/GSV-Lactanne (CNET, École polytechnique).

1. PROCOLES Observons les tours d'un saltimbanque fou autour d'une barre ferme. Un automate déchaîné qui virevolte sans jamais se répéter.

Lançons-le, et comptons les tours qu'il fait dans chaque sens avant de s'arrêter.

+ 5 2 2 2 2 3 2 2 3 1 4 4 1 2 3 4 3 5 2 4 3 1

Cette série est ce que nous appelons un protocole d'expérience. Le signe plus (+) indique que le premier tour a eu lieu dans le sens des aiguilles d'une montre ; le signe moins (-) indique le contraire. [...]

Il n'y a pas dans ce protocole de régularité apparente, pas de règle de succession qui permette de deviner un chiffre à partir du précédent ou des précédents. On voit qu'un 2 est suivi tantôt par un 2, tantôt par un 3 ou par un 4 ; de même une paire comme 5/2 est suivie tantôt par un 2, tantôt par un 4. Si l'on me donnait les vingt-deux premiers chiffres en me demandant de « compléter la série », c'est à dire de deviner le vingt-troisième. Je ne verrais rien de beaucoup mieux à faire que de proposer un 2, au motif que c'est le chiffre qui jusqu'à présent a été le plus fréquent, et que c'est donc lui le plus probable. Ce faisant, je fais appel à l'une des plus vieilles croyances de l'humanité : l'avenir doit reproduire le passé. Ce qui s'est déjà produit se reproduira, et ce qui a été fréquent hier le sera demain. [...]

Le « calcul » déterministe figure dans la littérature scientifique, il a été fait par Laplace en 1812 (la légende veut que Laplace ait proposé de parier 1.828.214 contre un que le soleil se lèverait le lendemain, sachant que cinq mille ans font 1.828.213 jours). [...]

Mais en ce qui concerne le petit gymnaste je ne peux que calculer des fréquences d'apparition sur la base des observations passées, et prier pour que ces fréquences soient à peu près respectées dans l'avenir. [...]

Recommençons l'expérience :

- 3 3 1 3 4 1 1 1 4 3 1 3 3 5 3 5 2 2 2 5 4 2

Encore une fois :

- 1 2 3 5 4 5 2 5 1 5 5 4 4 5 4 1 3 2

Puis encore deux autres :

- 1 3 2 4 1 4 5 3 5 1 5 3 5 1 3 5 4 3 2 2

+ 5 2 5 3 5 3 1 3 4 4 2 2 5 5 1 5 2 1 3

On obtient autant de protocoles que l'on veut : qui nous permet de faire certaines constatations :

La première est que l'expérience recommencée dans les mêmes conditions, ne donne pas les mêmes résultats : on observe, non pas cinq fois le même protocole, mais cinq protocoles différents.

Així, es poden obtenir tants protocols com es vulgui, que permeten fer certes constatacions:
La primera és que l'experiència, repetida en les mateixes condicions, no dona els mateixos resultats: no s'observa cinc vegades el mateix protocol, sinó cinc protocols diferents.
La segona és que aquests protocols no s'assemblen gens; la freqüència elevada de la xifra 2 en el primer, per exemple, no es confirma en els altres quatre.
La tercera, és que si bé els quatre protocols nous confirmen que les xifres estan compreses entre el 1 i el 5, no permeten evidenciar cap regla de successió. Encara millor, eliminen les que s'haurien pogut formar a la vista del primer enunciat: el 5 no va forçosament seguit del 2.
Aquestes constatacions totalment anàlogues es poden resumir totes en una de sola: cap procediment no permet deduir amb certesa una d'aquestes xifres partint de les que la precedeixen. Diguem-ho d'altres maneres, com ho faria en Cirano. Llibertària: l'única regla és que no hi ha regla. Metafísica: el passat no determina el present. Pràctica: si vostè vol introduir deu milions de xifres d'aquestes al seu ordinador, només ho podrà fer picant-les d'una en una dins la memòria; no hi ha cap programa que permeti estalviar temps o espai.
No cal anar més lluny: l'atzar existeix, l'acabem de trobar. L'atzar existeix quan no es pot predir amb tota certesa el futur; quan el passat no determina completament el present; quan una sèrie d'observacions no es deixen resumir.
I ara que ja el sabem reconèixer, a veure si som capaços de crear-lo.

2. MECANISMES D'ATZAR Donem, ara, la volta a la joguina i veiem què ens amaga. A dins hi trobem un gran rellotge de sorra que aboca el seu contingut damunt d'una roda de molí, a l'extrem de les aspes del qual hi ha uns gobelets. Aquests petits recipients estan tots foradats, i la sorra que recullen s'escapa com l'aigua per un colador. Quan comença el moviment, el rellotge comença a tirar el seu contingut dins del primer gobelet que té a sota.

El pes del gobelet ple arrossega la roda, que es posa en marxa i comença una rotació. D'aquesta manera, el gobelet de sota el rellotge es mou i es comença a buidar, a la vegada que la roda accelera el moviment i trasllada, fins a sota el rellotge, el segon gobelet, i després el tercer, i el quart... i tots van rebent una dosi de sorra. Aquesta dosi depèn, evidentment, de la velocitat de rotació; com més de pressa giri la roda, menys temps tindrà el gobelet per omplir-se, i més petita serà la dosi de sorra. Al mateix temps, cada gobelet es va buidant, la sorra disminueix a un ritme que només depèn del diàmetre dels forats pels quals flueix.

La combinació de tots dos efectes (un que omple a un ritme que depèn de la velocitat de rotació i un que buida a un ritme constant) porta a una repartició irregular dels gobelets buits i plens. Com més ple està un gobelet, més pesa i més arrossega la roda en un sentit; després, però, quan ha passat a l'altre costat, l'arrossega cap a l'altre. La repartició de la massa entre un costat i l'altre de la roda està

La deuxième est que ces protocoles ne se ressemblent guère ; la fréquence élevée du chiffre 2 dans le premier, par exemple, n'est pas confirmée par les autres.

La troisième est que si les quatre nouveaux protocoles confirment que les chiffres restent compris entre 1 et 5, ils ne permettent toujours pas de mettre en évidence de règle de succession. Mieux encore, ils détruisent celles que l'on avait pu former au vu du premier : le 5 n'est pas nécessairement suivi par un 2.

Ces constatations tout à fait analogues, peuvent se résumer en une seule : aucun procédé ne permet à coup sûr de déduire un de ces chiffres de ceux qui le précèdent. Disons-le d'autres manières, à la Cyrano. Libertaire : la seule règle, c'est qu'il n'y a pas de règle. Métaphysique : le passé ne détermine pas le présent. Pratique : si vous vouliez ranger dix millions de ces chiffres dans votre ordinateur, vous ne pourriez que les mettre un à un en mémoire : il n'y a pas de programme qui permette d'économiser du temps ou de la place.

N'allons pas plus loin : le hasard existe, nous l'avons rencontré : Il y a hasard quand on ne peut plus prédire de manière certaine, quand le passé ne détermine pas complètement le présent, quand une série d'observations ne se laisse pas résumer.

Maintenant que nous savons le reconnaître, voyons si nous saurions le fabriquer.

2. MACHINES À HASARD Il est temps maintenant de retourner le jouet, et de voir ce qui se cache derrière la paroi où évolue le gymnaste. On y trouve un grand sablier, qui déverse son contenu sur une roue de moulin, dont les bras portent à leur extrémité un godet. Ces petits récipients sont tous troués, et le sable qu'ils recueillent s'écoule comme l'eau d'une passoire. Lorsque le mouvement est déclenché, le réservoir commence à déverser son contenu dans le premier godet au-dessous de lui.

Le poids de ce dernier entraîne la roue qui se met en branle et amorce une rotation. Ce faisant, elle transporte hors de portée du réservoir le premier godet, qui entreprend aussitôt de se vider, alors que la roue accélère son mouvement et amène sous le réservoir un deuxième godet, puis un troisième, un quatrième, chacun recevant au passage sa dose de sable. Cette dose dépend bien entendu de la vitesse de rotation ; plus la roue tourne vite, moins le godet aura le temps de se remplir, et plus la dose recueillie sera faible. Simultanément, chacun des godets se vide, donc s'allège, à un rythme qui ne dépend que du diamètre des trous par lesquels le sable s'écoule.

La combinaison de ces deux effets (un remplissage à un rythme dépendant de la vitesse de rotation et un écoulement à un rythme constant) conduit à une répartition irrégulière des godets pleins ou vides. Or, plus le godet est plein, plus il est lourd, et plus il entraîne la roue dans un sens, puis dès qu'il sera passé de l'autre côté, dans l'autre. La répartition des masses de part et d'autre de la roue est donc en perpétuel changement, d'où des ac-

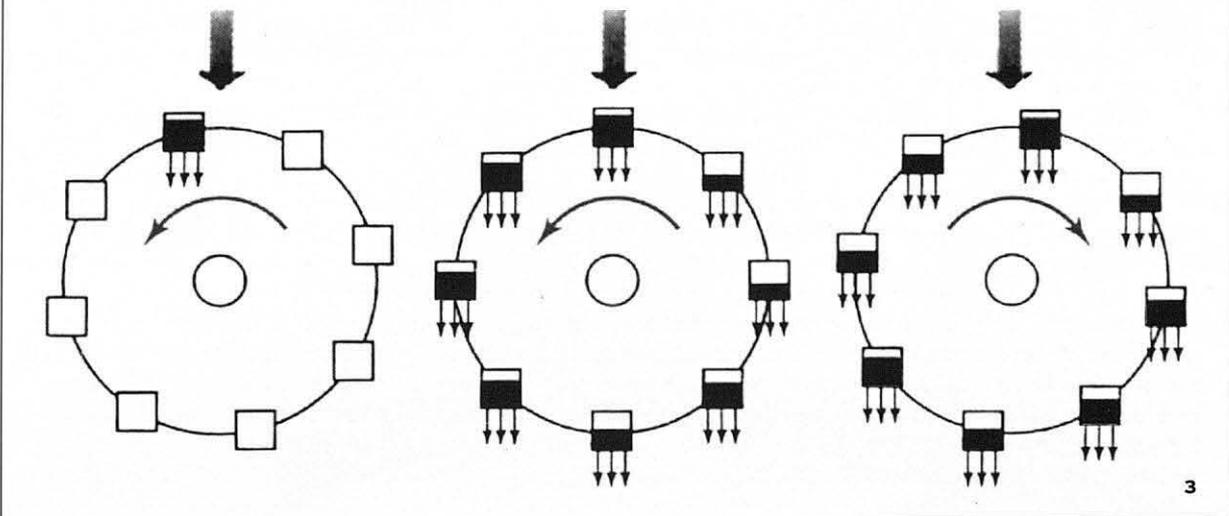
en canvi perpetu, d'aquí venen les acceleracions i les reduccions, les fases de moviment ràpid intercalades pels moments d'equilibri.

Si fixem els braços d'un ninot a l'eix de la roda, el veurem, doncs, girar, doncs, seguint aquests moviments. Per què hem analitzat tan detalladament una joguina?

Perquè res no podria il·lustrar millor la gran lliçó de la teoria del caos: la incertesa no està lligada a la complexitat. La multiplicitat de factors i de causes no és l'única font d'atzar; l'atzar també es pot crear amb mecanismes molt senzills, que poden ser físics, com el saltimbanqui, o intel·lectuals, com alguns models matemàtics. Són simples cada un a la seva manera, és a dir, només fan intervenir un petit nombre de factors, i tots dos produeixen atzar per ells mateixos, sense recórrer a fonts exteriors. Tenen un denominador comú: són sistemes dinàmics i caòtics. (...)

La Teoria del caos estudia com uns mecanismes poden adquirir en el curs del seu moviment una llibertat que no tenien forçosament al principi. (...)

Si tinguéssim un mapa general de l'Univers, que, per tant, estaria a una escala inimaginable (com ara a u per un milió de mil milions de mil milions), no veuríem res més que un eixam de galàxies surrant en el buit com granets de pols en l'aire. Imaginem-nos que aquest mapa es pogués consultar en un ordinador interactiu. Si en volguéssim distingir els detalls, només ens caldria fer un "clic" a la pantalla per augmentar-lo deu vegades; la tercera vegada que féssim un clic d'aquests, la imatge es



3 Aquí hi ha una representació esquemàtica del ninot del carrer Berthaud. Els seus braços són solidaris amb l'eix de rotació, al voltant del qual el ninot gira gràcies a un mecanisme dissimulat al seu darrere. Aquest mecanisme és una roda de molí sobre la qual flueix la sorra continguda en un rellotge de sorra. Els gotets es reomplen i es buiden a mercè de la seva posició sota el rellotge de sorra, i la roda gira d'un costat o de l'altre segons la repartició del pes i la seva inèrcia. L'eix de la roda acciona el ninot, que evoluciona davant els ulls de l'espectador. Quan tota la sorra ha passat, es torna a començar.

Ceci n'est qu'une représentation schématique du pantin de la rue Berthaud. Ses bras sont solidaires de l'axe de rotation, autour duquel le pantin tourne grâce à un mécanisme dissimulé à l'arrière. Ce mécanisme est une roue de moulin sur laquelle coule du sable contenu dans un sablier. Les godets se remplissent et se vident au gré de leur position sous le sablier, et la roue tourne d'un côté ou de l'autre suivant la répartition des poids et son inertie. L'axe de la roue entraîne le pantin qui évolue sous l'oeil du spectateur. Quand tout le sable s'est écoulé, on recommence.

célébrations et des décélébrations, des phases de mouvement rapide intercalées de moments d'équilibre. Si maintenant nous fixons à l'axe de la roue les bras d'un petit pantin, nous le verrons virevolter au gré du mouvement. Pourquoi avoir si longtemps analysé un jouet ?

C'est que l'on ne pourrait mieux illustrer la grande leçon de la théorie du chaos : l'incertitude n'est pas liée à la complexité. La multiplicité des facteurs et des causes n'est pas l'unique source de hasard ; on peut aussi le fabriquer avec des mécanismes très simples. Ces mécanismes peuvent être physiques, tel le saltimbanque de la rue Berthaud, ou intellectuels, comme certains modèles mathématiques. Chacun à leur manière ils sont simples, c'est à dire qu'ils ne font intervenir qu'un petit nombre de facteurs, et tous, ils produisent du hasard par eux-mêmes, sans avoir recours à des sources extérieures. Ils ont un nom en commun : ce sont des systèmes dynamiques et chaotiques. [...]

La Théorie du chaos étudie comment des mécanismes peuvent acquérir au cours de leur mouvement une liberté dont ils ne jouissaient pas au début. [...]

Si l'on avait une carte générale de l'Univers, qui serait donc à une échelle inimaginable (de l'ordre de un pour un million de milliards de milliards), on n'y verrait pas grand-chose, si ce n'est des amas de galaxies flottant dans le vide comme des grains de poussière dans l'air. Imaginons que cette carte soit disponible sur ordinateur en mode interactif. Si l'on veut discerner quelques détails, il nous faut un simple « click » sur l'écran. Le zoom agrandit dix fois. La troisième fois l'image est donc agrandie cent fois par rapport à l'image initiale. Au bout de trois zooms apparaît déjà notre galaxie, la Voie Lactée, un point lumineux parmi d'autres ; et en agrandissant deux fois encore, nous en obtenons une image détaillée. En continuant, nous pénétrons à l'intérieur ; cinq zooms plus loin et l'on voit le Soleil, cinq zooms plus loin et l'on voit la Terre, cinq zooms plus loin et l'on a une carte terrestre au millionième, six zooms plus loin et nous avons atteint l'échelle unité : les objets sont représentés à leur taille réelle. Entre l'échelle humaine et l'échelle de l'Univers, il n'y a finalement que vingt-cinq zooms, vingt-cinq puissances de dix, vingt-cinq décimales.

ques de la geometria en l'espai: el pla, el cub o l'esfera, objectes plans i llisos; sembla fet de cavitats i angles, com si fos desconegut en el nostre espai de tres dimensions i tingués dificultats per ocupar aquest espai.

L'evolució del sistema està completament determinada per les equacions de Lorenz. Veiem com s'enrosca alternativament al voltant d'una ansa, després l'altra, després altre cop de la primera, després de la segona, i així indefinidament i de manera aleatòria, sense que puguem preveure mai en quin moment la trajectòria es decantarà cap a un costat o cap a l'altre.

La figura que apareix al final porta el nom d'"atractor", perquè atrau les trajectòries, totes les trajectòries, sigui quin sigui el seu punt de partida. Surtin d'on surtin, es dirigeixen infal·liblement cap a una regió de l'espai, representada per l'"atractor" de Lorenz.

En el curs del seu moviment incert, cada una talla l'espai a la seva manera, dins l'entorn d'aquest insòlit objecte de dos anses. (...)

L'"atractor" és com la "cristal·lització" d'una necessitat, una representació geomètrica d'una indeterminació "determinada". Una vegada hi ha arribat, el sistema "recorda" que és caòtic i que l'atzar guanya. Les trajectòries queden confirmades en l'estranya "trajectòria de referència", però el mecanisme d'ampliació de les petites diferències entra en acció, i el moviment es torna aleatori, infinit, per les vies que ja hem descrit. La geometria de l'"atractor" crida l'atenció perquè presenta una estructura laminada fractal, idèntica a si mateixa en totes les escales. (...)

L'"atractor" és doncs un "objecte límit": aquell que seguiria cada una de les trajectòries, les que si guin, si la deixéssim continuar indefinidament. Allò que mirem a la pantalla no és més que un esbós, una simulació gràfica de l'infinit, d'un moviment infinit. I serà més precís com més deixem que el sistema evolucioni.

Aquesta és l'aportació de la teoria del caos: proposar un model determinista és també deixar un espai a l'atzar, una dimensió a allò que és imprevisible. El sistema es pot confinar a l'ordre que proporciona l'"atractor" estrany, certament, però el seu moviment en el temps és, de fet, lliure; perquè, efectivament, el temps, T , "característic" (el temps necessari perquè un canvi de posició o una pertorbació es multipliquin per deu) limita les possibilitats de previsió. Per a períodes inferiors a T , es podrà seguir el sistema mitjançant un càlcul... Per a períodes superiors a $10 T$, es perdrà completament la seva traça!

[Extrait de Ivar Ekeland: *Le chaos*, Ed. Dominos, França, 1995]

Ivar Ekeland, professor de matemàtiques a la Universitat de Paris-Dauphine.

4 Flux periòdic d'un fluid. Atractor reconstruït Flux périodique d'un fluide. Attracteur reconstruit

$V(t+nT)$

4

aléatoire, sans que l'on puisse jamais prévoir à quel moment la trajectoire basculera d'un côté ou de l'autre. La figure qui apparaîtrait si on les laissait achever leur travail, porte le nom d'attracteur: il attire les trajectoires, toutes les trajectoires, quel que soit leur point de départ. D'où qu'elles partent, elles se dirigent inmanquablement vers une étroite région de l'espace.

Ces « états naturels » occupent une partie restreinte de l'espace, représentée par l'attracteur de Lorenz. Mais, au fil de leur mouvement incertain, chacune à sa manière, taille dans l'espace ambiant cet étrange objet à deux anses. (...)

L'« attracteur » est comme une « cristallisation » de la nécessité, une représentation géométrique d'une indétermination « déterminée ». Mais une fois arrivé sur celui-ci, le système « se rappelle » qu'il est chaotique, et c'est le hasard qui prend le dessus. Les trajectoires restent confinées, dans cette étrange « trajectoire de référence », mais le mécanisme d'amplification des petits écarts rentre en action, et le mouvement devient aléatoire, par les voies que nous avons déjà décrites. La géométrie de l'« attracteur » présente une structure feuilletée fractale identique à elle-même à toutes les échelles. (...)

L'« attracteur » est donc un « objet limite » : celui que tracerait chacune des trajectoires, peu importe laquelle, si on la laissait continuer indéfiniment. Ce que nous regardons sur notre écran n'est donc qu'une ébauche, une simulation graphique de l'infini, d'un mouvement infini, d'autant plus fine que l'on aura laissé la machine poursuivre son travail. [...]

C'est là, l'apport théorique du chaos : proposer un modèle déterministe, c'est aussi laisser un espace au hasard, une dimension à l'imprévisible. Le système peut être confiné sur son « attracteur » étrange certes ; mais son mouvement sur l'attracteur est libre. Le temps « caractéristique » T (le temps nécessaire pour un changement de position ou une perturbation du mouvement soit multipliée par dix) pose une borne aux possibilités de prévision. Pour des durées inférieures à T , on suit le système par le calcul. Pour des durées supérieures à $10 T$, on perd complètement sa trace !

[Extrait de Ivar Ekeland : *Le chaos*, Ed. Dominos, France, 1995]

Ivar Ekeland, il est professeur de mathématiques à l'université Paris-Dauphine.