Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE EL COMPORTAMIENTO "ANOMALO" DE LA PRIMERA POLAR.

Juan Goñi Mateo

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

ABSTRACT: We offer some examples of plane algebraic curves of minimal order which have some points such that the multiplicity of the first polar is greater than the multiplicity of the curve, and they have multiple points across which the first polar do not pass.

° INTRODUCCION. En el trabajo de B.Segre (2), se da un ejemplo de curva algebraica plana de orden 113 que tiene un punto multiple impropio por el que no pasa la primera polar genérica, en contradicción con lo que había sido admitido por Noether, de que la primera polar genérica pasa con multiplicidad al menos s-1 por cada punto s-múltiple de la curva tanto si se trata de un punto múltiple propio como impropio. Error que no advierten los posteriores tratados de Enrique-Chisini (1), Severi (4).

El ejemplo de Segre se ha hecho fácilmente accesible al ser reproducido en una de las notas que figuran al final del Cap. XI del libro de J.G. Semple y G.T. Kneebone (3). Por ello nos ha parecido interesante dar ejemplos de orden mínimo de curvas planas presentando tal comportamiento "anómalo" de la primera polar, lo que constituye el objeto de esta comunicación.

Los ejemplos en cuestión figuran en el apartado (B), que viene precedido por otro apartado (A) en el que se da un ejemplo de orden mínimo, en cierto modo contrario, de una curva algebraica plana por uno de cuyos puntos la primera polar genérica pasa con mayor multiplicidad que la curva.

(A) La curva de ecuación $y^3 + x^7 = 0$ tiene en $(0,0)$ un punto triple origen de una rama de orden tres de estructura correspondiente al símbolo $(0^3 0_1^3 0_2^1 0_3^1 0_4^1)$.

Su primera polar tiene por ecuación $ay^2 + by^3 + cx^6 = 0$, y los distintos casos que se pueden dar son los que siguen, en los que se incluyen los símbolos que indican la multiplicidad con que pasa por los 0_i:

$$a \neq 0: \quad (0^2 0_1^2 0_2^2 0_3^0 0_4^0)$$

$$a = 0, \quad bc \neq 0: \quad (0^3 0_1^3 0_2^0 0_3^0 0_4^0)$$

$$a = b = 0, \quad c \neq 0: \quad (0^6 0_1^0 0_2^0 0_3^0 0_4^0)$$

$$a = c = 0, \quad b \neq 0: \quad (0^3 0_1^3 0_2^3 0_3^0 0_4^0)$$

La primera polar genérica pasa con multiplicidad dos por el punto 0_2 que es simple para la curva.

(B) Para presentarse el caso de punto múltiple por el que no pasa la primera polar genérica, tal punto múltiple no puede ser propio. El origen de la singularidad deberá ser al menos cuádruple y en este caso del tipo correspondiente al símbolo $(0^4 0_1^4 \ldots 0_i^4 0_{i+1}^2 0_{i+2}^2 \ldots)$ donde a 0_{i+2} pueden seguir o no otros puntos dobles, y pudiéndose dar con una rama de orden cuatro o dos ramas de orden dos. En ambos casos se ve que la primera polar genérica pasa por todos los puntos múltiples.

Por ello hay que acudir a singularidades con origen en un punto quíntuple con puntos múltiples no propios. Ejemplos de orden mínimo son los siguientes:

(I) La curva de ecuación $y^5 + x^{13} = 0$.

(II) La curva de ecuación $y^5 + x^{17} = 0$.

(I) El símbolo de la singularidad con origen en el punto $(0,0)$ es $(0^5 0_1^5 0_2^3 0_3^2 0_4^1 0_5^1)$.

Su primera polar tiene por ecuación $ay^4 + by^5 + cy^{12} = 0$;

y se dan los siguientes casos:

$$a \neq 0: \quad (O^4 O_1^4 O_2^4 O_3^0 O_4^0 O_5^0)$$

$$a = 0, \quad bc \neq 0: \quad (O^5 O_1^5 O_2^2 O_3^2 O_4^0 O_5^0)$$

$$a = b = 0 \quad c \neq 0: \quad (O^{12} O_1^0 O_2^0 O_3^0 O_4^0 O_5^0)$$

$$a = c = 0, \quad b \neq 0: \quad (O^5 O_1^5 O_2^5 O_3^0 O_4^0 O_5^0)$$

La primera polar genérica pasa por el punto triple O_2 con multiplicidad cuatro y no pasa por el punto doble O_3.

(II) El símbolo correspondiente a la singularidad en (0,0) es ahora $(O^5 O_1^5 O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1)$.

Su primera polar tiene por ecuación $ay^4 + by^5 + cx^{16} = 0$; y se dan los siguientes casos:

$$a \neq 0: \quad (O^4 O_1^4 O_2^4 O_3^4 O_4^0 O_5^0 O_6^0)$$

$$a = 0, \quad bc \neq 0: \quad (O^5 O_1^5 O_2^5 O_3^1 O_4^1 O_5^1 O_6^0)$$

$$a = b = 0, \quad c \neq 0: \quad (O^{16} O_1^0 O_2^0 O_3^0 O_4^0 O_5^0 O_6^0)$$

$$a = c = 0, \quad b \neq 0: \quad (O^5 O_1^5 O_2^5 O_3^5 O_4^0 O_5^0 O_6^0)$$

Y la primera polar genérica pasa por el punto doble O_3 con multiplicidad cuatro y no pasa por el también doble O_4.

BIBLIOGRAFIA

(1) ENRIQUES-CHISINI, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Vol.II (Bologna, 1918) pags. 409 y 441.

(2) B. SEGRE, Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche, Ann. Mat. pura appl. IV 33 (1952), 5-48, pags. 7 y 29-30.

(3) J.G. SEMPLE- G.T. KNEEBONE, Algebraic curves, (Oxford, 1959), pags. 323-324.
(4) F. SEVERI, Trattato di geometria algebrica, Vol. I parte I (Bologna, 1926), pag.314.