

EXTENSIONES ESPECIALES EN LA COHOMOLOGIA DE GRUPOS

P. Jara Martínez

Dpto. de Algebra y Fundamentos
 Universidad de Granada

ABSTRACT. In this work we define n -fold special extensions and (G, n) -fold special extensions, and we prove that the quotient set are groups for a determined equivalence relations. Also we build an exact sequence which contains to these groups and which is an extension of the 5-term exact sequence of cohomology of groups.

(A M S Subject Classification. 18G99, 20J05).

Dada una sucesión exacta corta de grupos $N \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\pi} Q$ y un Q -módulo A existe una sucesión exacta natural en A y en sucesiones exactas cortas $N \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\pi} Q$

$$H^1(Q, A) \xrightarrow{\alpha} H^1(G, A) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_G(N_{ab}, A) \xrightarrow{\delta} H^2(Q, A) \xrightarrow{\alpha} H^2(G, A)$$

Definición: Una (G, n) -extensión especial de N por A es una sucesión exacta corta de G -grupos

$$H: A \xrightarrow{\tau} H_1 \longrightarrow H_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow H \xrightarrow{\phi} N$$

que verifica:

- N es un subgrupo normal de G ($N \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\pi} Q$ es exacta corta)
- $A, H_1, \dots, H_{n-1}$ son Q -módulos.
- La acción de N sobre H , cumple $\phi(h).H' = h h' h^{-1}$

Dos (G, n) -extensiones especiales de N por A H y H' están relacionadas si existen $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ morfismos de Q -módulos y ψ morfismo de G -grupos haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 H: & A & \twoheadrightarrow & H_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_{n-1} & \longrightarrow & H & \twoheadrightarrow & N \\
 & \parallel & & \downarrow \psi_1 & & & & \downarrow \psi_{n-1} & & \parallel & & \parallel \\
 H': & A & \twoheadrightarrow & H'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H'_{n-1} & \longrightarrow & H' & \twoheadrightarrow & N
 \end{array}$$

Se define $\text{Sext}_G^n(N, A)$ igual al conjunto de clases de equivalencia de (G, n) extensiones especiales, para la relación de equivalencia engendrada por la anterior relación.

Definición: Una n -extensión especial de G por A , siendo A un G -módulo, es una sucesión exacta de E -grupos

$$E: A \twoheadrightarrow H_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_{n-2} \longrightarrow H \xrightarrow{\phi} E \twoheadrightarrow G$$

que verifica:

- i) $A, H_1, \dots, H_{n-2}$ son G -módulos.
- ii) La acción de E sobre $A, H_1, \dots, H_{n-2}$ es la inducida por π .
- iii) La acción de E sobre H cumple: $\phi(h) \cdot h' = h h' h^{-1}$.

Dos n -extensiones especiales de G por A E y E' están relacionadas si existen $\psi_1, \dots, \psi_{n-2}$ morfismos de G -módulos, ψ' morfismo de E -grupos y ψ morfismo de grupos haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 E: & A & \twoheadrightarrow & H_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H & \longrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G \\
 & \parallel & & \downarrow \psi_1 & & & & \downarrow \psi_{n-2} & & \downarrow \psi' & & \downarrow \psi & & \parallel \\
 E': & A & \twoheadrightarrow & H'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H'_{n-2} & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & G
 \end{array}$$

Se define $\text{Sext}^n(G, A)$ igual al conjunto de clases de equivalencia de n -extensiones, para la relación de equivalencia generada por la relación anterior.

Teorema. 1. Si $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_n \xrightarrow{D} I_{n+1} \longrightarrow \dots$

es una resolución inyectiva de G -módulos de A y $R \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow G$ es una presentación libre del grupo G , entonces en cada clase de n -extensiones especiales de G por A existe un único representante con $H_i = I_i$ para i igual a $1, 2, \dots, n-2$, y con $E = F$.

Esquema de la demostración. Dado un representante de la clase (E)

$$E: A \twoheadrightarrow H_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow H_{n-2} \longrightarrow H \longrightarrow E \twoheadrightarrow G$$

se considera la construcción siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\#} & H_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_{n-2} \xrightarrow{H \times_E F} F \rightarrow G \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ A & \xrightarrow{\#} & H_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_{n-2} \longrightarrow H \longrightarrow E \rightarrow G \end{array}$$

Hemos realizado el cuadrado cartesiano de los morfismos $F \longrightarrow E$ y $H \longrightarrow E$, la sucesión superior es una sucesión exacta.

Se construye el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\#} & H_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_{n-2} \xrightarrow{H \times_E F} F \rightarrow G \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ A & \xrightarrow{\#} & I_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & I_{n-2} \xrightarrow{B} D_{n-2} \xrightarrow{H \times_E F} F \rightarrow G \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & D_{n-2} \end{array}$$

Se obtiene así una n -extensión especial de G por A , habiéndose realizado el cuadrado casi cocartesiano de los morfismos $B \longrightarrow H \times_E F$ y $B \longrightarrow D_{n-2}$. Se demuestra que este elemento es independiente de la elección de los morfismos $F \longrightarrow E$ y $H_i \longrightarrow I_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Teorema. 2. Existe una biyección natural entre los conjuntos $\text{Sext}^n(G, A)$ y $N^{n+1}(G, A)$.

Por esta biyección la imagen de la clase de la n -extensión especial

$$A \xrightarrow{\#} H_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-2} \longrightarrow H \longrightarrow F \rightarrow G$$

es la clase de

$$A \xrightarrow{\#} H_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-2} \xrightarrow{H_{ab}} ZG \otimes_F IG \rightarrow IG$$

Por tanto en $\text{Sext}^n(G, A)$ existe una operación que le da estructura de grupo abeliano.

Teorema. 3. Si $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{C_n} I_{n+1} \longrightarrow \cdots$

es una resolución inyectiva de Q -módulos de A , entonces en cada clase de (G, n) -extensiones especiales de N por A existe un representante con $H_i = I_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Corolario. 4. Existe una biyección natural entre los conjuntos $\text{Sext}_G^n(N, A)$ y $\text{Sext}_G^1(N, C_{n-1})$. Y como $\text{Sext}_G^1(N, C_{n-1})$ es un grupo abeliano, también lo es $\text{Sext}_G^n(N, A)$.

Vamos a construir una sucesión exacta que contiene a estos grupos y que es una extensión de la sucesión exacta de cinco términos, vamos a definir los morfismos que la forman, omitiendo las comprobaciones necesarias.

La sucesión exacta es:

$$\begin{aligned} H^1(Q, A) &\xrightarrow{\alpha_1} H^1(G, A) \xrightarrow{\beta_1} \text{Hom}_G(N_{ab}, A) \xrightarrow{\delta_1} H^2(Q, A) \xrightarrow{\alpha_2} H^2(G, A) \\ &\xrightarrow{\beta_2} \text{Sext}_G^1(N, A) \xrightarrow{\delta_2} H^3(Q, A) \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_n} H^n(G, A) \xrightarrow{\beta_n} \\ &\xrightarrow{\beta_n} \text{Sext}_G^{n-1}(N, A) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(Q, A) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} H^{n+1}(G, A) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Se considera $\underline{I}$ una resolución inyectiva de Q -módulos de A

$$\underline{I}: I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_n \xrightarrow{\quad} I_{n+1} \longrightarrow \dots$$

$\searrow \scriptstyle D_n$

y una resolución inyectiva de G -módulos de A , de forma que cada I_i sea un Q -módulo y la estructura de G -módulo sea la inducida por π .

$$\underline{J}: J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow J_n \xrightarrow{\quad} J_{n+1} \longrightarrow \dots$$

$\searrow \scriptstyle C_n$

Se consideran dos morfismos de complejos $\psi: \underline{I} \longrightarrow \underline{J}$ y $\psi': \underline{I} \longrightarrow \underline{I}$ que levantan la identidad de A . Entonces las dos composiciones son homotópicas a la identidad.

La definición de α es conocida.

Para definir β_i , $i \geq 2$, basta con definir β_2 y utilizar los isomorfismos $H^n(G, A) \cong H^2(G, C_{n-2})$ y $\text{Sext}_G^{n-1}(N, A) \cong \text{Sext}_G^1(N, D_{n-2})$. La imagen de la clase de la sucesión $C_{n-2} \xrightarrow{\quad} E \xrightarrow{\quad} G$ por β_2 es $(A \xrightarrow{\quad} \text{Ex}_G N \xrightarrow{\quad} N)$.

Para definir δ_i , $i \geq 2$, basta con definir δ_2 y utilizar isomorfismos análogos a los anteriores. La imagen de la clase de la sucesión

$$A \xrightarrow{\quad} H \xrightarrow{\quad} N \text{ es la clase de la sucesión } A \xrightarrow{\quad} H \xrightarrow{\quad} G \xrightarrow{\quad} Q.$$

$\searrow \scriptstyle N$

BIBLIOGRAFIA

1. GARFINKEL, G. S., WU, Y.-C.. Cohomology and special extensions of groups.
2. JARA, P.. Una nota sobre cuadrados universales de grupos.
3. LODAY, J. L.. Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. J. Algebra, 54, 178-202, (1978).
4. WU, Y.-C.. Some applications of group obstructions.