Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

NOTAS SOBRE LA CLAUSURA NORMAL DEL FRATTINI DE UN P-SUBGRUPO DE SYLOW

Ma Jesús Iranzo Aznar

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

Dado un grupo finito G y $P \in Syl_p(G)$, se designa con $\Phi(P)^G$ la clausura normal de $\Phi(P)$ en G. Es conocido que $\Phi(P)^G = \Phi(P)[\Phi(P), G]$ y que si $p \mid |\Phi(G)|$, el p-subgrupo de Sylow de $\Phi(G)$ está contenido en $\Phi(P)^G$ ([1]).

El propósito de estas notas es estudiar las propiedades tipo Frattini de dicho subgrupo y su aplicación a la obtención de condiciones suficientes para la saturación de Formaciones.

<u>Proposición 1</u>. Si G es un grupo finito y $P \in Syl_p(G)$, se tiene:

a) $\Phi(P)^G$ es la clausura normal de todo p-subgrupo de Sylow de G.

b) Si $N \trianglelefteq G$ entonces: $\Phi(P)^G N/N \leq \Phi(PN/N)^{G/N}$.

c) Si además G es resoluble se sigue $\Phi(P)^G < G$.

Dem.

a) $\Phi(P^g)^G = \Phi(P^g)[\Phi(P^g), G] = \Phi(P)^g[\Phi(P)^g, G] = (\Phi(P)[\Phi(P), G])^g =$
$= (\Phi(P)^G)^g = \Phi(P)^G$, cualquiera que sea $g \in G$.

b) $\Phi(P)^G N/N = \Phi(P)[\Phi(P), G]N/N = \Phi(P)N/N[\Phi(P)N/N, G/N] \leq \Phi(PN/N)[\Phi(PN/N, G/$
$= \Phi(PN/N)^{G/N}$.

c) Sea G finito resoluble, si $\Phi(P)^G = G$ se seguiría:

$$G = \Phi(P)\, G' \ , \ P = P \cap \Phi(P)G' = \Phi(P)(P \cap G') = P \cap G'$$

así que $P \leq G' < G$ que está en contradicción con $\Phi(P)^G = G$.

En la Proposición siguiente, obtenemos dicho grupo como residual respecto de una cierta Formación.

<u>Proposición 2</u>. Sea $\mathfrak{X} = \{G \mid P \in A_p \ , \ P \in Syl_p(G)\}$, donde A_p es la clase de los grupos p-elementales abelianos. Entonces $G^{\mathfrak{X}} = \Phi(P)^G$, para cada grupo finito G.

Dem.

Notemos que $\mathfrak{X} = S^{\#}_{A_p}$, es por tanto una Formación ([4]). Sea G un grupo finito, $^{p}G/\Phi(P)^G \in \mathfrak{X}$. En efecto, si $P \in Syl_p(G)$ $P\Phi(P)^G/\Phi(P)^G$ es p-elemental abeliano ya que:

$$P\Phi(P)^G/\Phi(P)^G = P\Phi(P)[\Phi(P),G]/\Phi(P)[\Phi(P), G] \cong P/P \cap \Phi(P)[\Phi(P), G]$$

$= P/\Phi(P)(P \cap [\Phi(P), G]) \in A_p$. Así $G^{\mathfrak{X}} \leq \Phi(P)^G$.

Por otra parte, $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ luego si $P \in Syl_p(G)$ es $PG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} \in A_p$ por tanto $\Phi(P)G^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} \leq \Phi(PG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}}) = 1$, así $\Phi(P) \leq G^{\mathfrak{X}}$ y $\Phi(P)^G \leq G^{\mathfrak{X}}$.

Corolario. Si G es finito resoluble, para cada primo p con $p \mid |G|$ existe un subgrupo normal N de G, $N < G$, tal que los p-subgrupos de Sylow de G/N son p-elementales abelianos.

Dem.

Consecuencia inmediata de la parte c) de la Proposición 1 y de la Proposición anterior.

En lo que sigue, todos los grupos considerados son finitos resolubles.

Definición Una Formación $\mathfrak{X}$ se dirá p-saturada si siempre que $G/\Phi(P)^G$ pertenece a $\mathfrak{X}$, se sigue que G pertenece a $\mathfrak{X}$, siendo $P \in Syl_p(G)$.

Esta definición no es equivalente a la de p-saturación de Idowu ([3]). En efecto, probamos:

Proposición 3. La Formación de los p'-grupos es p-saturada.

Dem.

Sea $G/\Phi(P)^G$ p'-grupo, $P \in Syl_p(G)$, entonces $P \leq \Phi(P)^G$ y como siempre se tiene $\Phi(P)^G \leq P^G$, se seguirá $P^G = \Phi(P)^G$.

Supongamos que G es contraejemplo minimal del teorema y sea N normal minimal de G, entonces G/N es p'-grupo. Si N es p'-grupo, se sigue que G lo es y si N es p-elemental abeliano, $N \in Syl_p(G)$ obteniéndose la contradicción $N = N^G = \Phi(N)^G = \Phi(N)$.

Sin embargo la Formación de los p'-grupos no es p-saturada según Idowu. En efecto: $\Phi_3(\Sigma_3) = A_3$, Σ_3/A_3 es 3'-grupo pero Σ_3 no es 3'-grupo.

La p-saturación no es equivalente a la saturación. Así la Formación de los p-grupos no es p-saturada. En efecto, consideremos

$$G = \langle a \rangle \times_{\theta} \langle b \rangle \text{ , con } a^5 = b^4 = 1 \text{ y } \theta_b(a) = a^b = a^2$$

entonces $\Phi(\langle b\rangle) = \langle b^2\rangle$ y $\Phi(\langle b\rangle)^G = \Phi(\langle b\rangle)[\Phi(\langle b\rangle), G] = \Phi(\langle b\rangle)[\Phi(\langle b\rangle), \langle a\rangle] = \Phi(\langle b\rangle)\langle a\rangle$. Así $G/\Phi(\langle b\rangle)^G$, es 2-grupo , pero G no lo es.

Proposición 4. Sea $\mathfrak{X}$ una Formación p-saturada para todo primo p, entonces $\mathfrak{X}$ es saturada.

Dem.

Sea G contraejemplo minimal. Puesto que $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$, debe ser $\Phi(G) \neq 1$. Si $p \mid |\Phi(G)|$ y $P \in Syl_p(G)$, sabemos que $1 < P \cap \Phi(G) \leq \Phi(P)^G$ y se tiene:

$$G/\Phi(P)^G/\Phi(G)\Phi(P)^G/\Phi(P)^G \in \mathfrak{X} \text{ luego } G/\Phi(P)^G/\Phi(G/\Phi(P)^G) \in \mathfrak{X}$$

y puesto que $|G/\Phi(P)^G| < |G|$, se seguirá que $G/\Phi(P)^G \in \mathfrak{X}$ luego por la hipótesis es $G \in \mathfrak{X}$, contradicción.

Kramer ([5]) obtiene condiciones necesarias para que una Formación $\mathfrak{X}$ sea saturada, concretamente demuestra que si $\mathfrak{X}$ es una Formación saturada, siempre que $G^{\mathfrak{X}} \cap P \leq \Phi(P)$ debe seguirse $G^{\mathfrak{X}} \cap P = 1$, siendo $P \in Syl_p(G)$, cualquiera que sea p, $p \mid |G|$. Se plantea la posibilidad de encontrar condiciones suficientes, análogas a la anterior, para que una Formación sea saturada. En este sentido, obtenemos:

Proposición 5. Si $\mathfrak{X}$ es una Formación y para todo grupo G y todo primo p, son equivalentes:

i) $G^{\mathfrak{X}} \cap P \leq \Phi(P)^G$

ii) $G^{\mathfrak{X}} \cap P = 1$

siendo $P \in Syl_p(G)$, entonces $\mathfrak{X}$ es saturada.

Dem.

Sea G contraejemplo minimal, si N es normal minimal de G , se obtiene $G/N \in \mathfrak{X}$ así $N = G^{\mathfrak{X}}$. Si $G^{\mathfrak{X}}$ es p-elemental abeliano, $G^{\mathfrak{X}} \leq P$ siendo $P \in Syl_p(G)$ y como $G^{\mathfrak{X}} \leq \Phi(G)$, se seguirá:

$$G^{\mathfrak{X}} \leq P \cap \Phi(G) \leq \Phi(P)^G$$

luego $G^{\mathfrak{X}} = 1$, contradicción.

Bibliografía

1. BECHTELL H. "Theory of Groups" Addison-Wesley, 1.971.
2. HUPPERT B. "Endliche Gruppen" Springer Verlag, 1.967.
3. IDOWU E. "p-saturated Formations" Israel J. Math., V. 30, 307-312, 1.978.
4. IRANZO M.J. "Operaciones entre Formaciones de Grupos Finitos y caracterización de Envolturas" Publicaciones del Departamento de Algebra y Fundamentos, Zaragoza, 1.974. (Tesis Doctoral).
5. KRAMER O-U. "Halluntergruppen und Residuen gesättigter Formationen" Arch. Math. V. XXV, 344-347, 1.974.