Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

TRIPLES ASOCIADOS

J.M. Barja Pérez, J.L. Freire Nistal

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract Two triple structures on a functor T, $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ are to be called associated, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, if $\mu\cdot\mu^*T=\mu^*\cdot T\mu$. $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ it is characterized by:existence of the superior degree triple structures, lifts to the respective algebras and Kleisli categories and, in this latter case, the existence of a pair of adjoint functors between them.

Comunicación:

Dos triples $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ sobre un mismo funtor T en una categoría K, se llaman asociados $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, si se verifica la ley del"triple producto": $\mu\cdot\mu^*T = \mu^*\cdot T\mu$.

Si $f:T\longrightarrow T$, $g:T\longrightarrow T$ son transformaciones naturales, tales que $f\cdot\eta=\eta^*$, $g\cdot\eta^*=\eta$, y verifican la "ley de naturalidad": $\mu\cdot T\mu\cdot gT^2 = \mu^*\cdot T\mu^*\cdot T^2f$, entonces $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ y, recíprocamente, $f=\mu\cdot\eta^*T$ y $g=\mu^*\cdot T\eta$ son los únicos morfismos de triples que cumplen la ley de naturalidad.

Los triples $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ se llaman trivialmente asociados si f ó g son isomorfismos. Si $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, entonces f isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E(\mathbb{T}^*,\mathbb{T}) \Leftrightarrow$ g isomorfismo.

También, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*) \Leftrightarrow (T,T,\eta\eta^*,\mu^*\cdot\mu T)$ es un triple de grado superior $\Leftrightarrow$ $(T,T,\eta\eta^*,\mu\cdot T\mu^*)$ es un triple de grado superior. (Triple de grado superior, de grado 3, en sentido de Maranda |7|).

$E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ es equivalente a que la elevación a las categorías de álgebras $Sg:K^{\mathbb{T}}\longrightarrow K^{\mathbb{T}^*}$, verifique:$F^{\mathbb{T}^*}=Sg\cdot F^{\mathbb{T}}$, y asimismo que $SKf: K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}^*}$, elevación a las categorías de álgebras de Kleisli, verifique: $u^{\mathbb{T}} = u^{\mathbb{T}^*} \cdot SKf$.

Se obtiene así el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "F^{\mathbb{T}^*}"] \arrow[dr, "F^{\mathbb{T}}"] \arrow[ddr, "f^{\mathbb{T}^*}"'] \arrow[ddd, "f^{\mathbb{T}}"'] & & K^{\mathbb{T}^*} \arrow[ddd, "U^{\mathbb{T}^*}"] \\
& K^{\mathbb{T}} \arrow[ur, "Sg"'] \arrow[ddr, "U^{\mathbb{T}}"] & \\
& K_{\mathbb{T}^*} \arrow[dr, "u^{\mathbb{T}^*}"] & \\
K \arrow[ur, "SKf"] \arrow[rr, "u^{\mathbb{T}}"'] & & K
\end{tikzcd}$$

Si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ son asociados, para los monomorfismos de triples $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^*$, $g: \mathbb{T}^* \longrightarrow \mathbb{T}$ se cumple que $SKg: K_{\mathbb{T}^*} \longrightarrow K_{\mathbb{T}}$, $SKf: K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}^*}$ son funtores adjuntos, $SKg \dashv SKf$. Reciprocamente, si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ son triples en K, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, $g: \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}$ morfismos de triples tales que $SKg \dashv SKf$, entonces existe un triple $\mathbb{T}^*$ isomorfo a $\mathbb{T}'$, asociado con $\mathbb{T}$.

Si $E(A,B)$ es un álgebra de Kleisli (|2|) sobre el conjunto E, entonces $\mathbb{T} = (E\times-, a\times-, \cdot\times-)$, $\mathbb{T}^* = (E\times-, b\times-, *\times-)$ son triples asociados en la categoría de conjuntos; y así, existen triples no trivialmente asociados. Reciprocamente, si $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, en el conjunto de operaciones unarias de T queda definida una estructura de álgebra de Kleisli.

Para A anillo conmutativo con 1 y $(E,\cdot,a,*,b)$ álgebra de Kleisli no trivial en Conjuntos, las álgebras de polinomios $A[E]$ correspondientes a los monoides del álgebra de Kleisli, determinan triples asociados no triviales en al categoría de A-módulos.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Depto. Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografía

|1| Barja Pérez, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas. Alxebra 20 (1979) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

|2| Barja Pérez, J.M.; G-Rodeja F.E. Algebras de Kleisli. (En esta publicación)

|3| Caruncho Castro, J.R. Teoría de Triples. Alxebra 5 (1971) Dpto.Algebra y Fund. Santiago.

|4| Freire Nistal, J.L. Propiedades Universales en triples de grado superior. Alxebra 11 (1972) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

|5| Manes, E.G. Algebraic Theories. Springer (1976).

|6| Maranda, J.M. On fundamental construction and adjoint functors. Bull. Can. Math. V9 (1966) 581-591.

|7| Maranda, J.M. Constructions fondamentales de dégré supérieur. J. Reine Angew Math. 243 (1970) 1-16.