

TRIPLES ASOCIADOS

J.M. Barja Pérez, J.I. Freire Nistal

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract Two triple structures on a functor T , $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ are to be called associated, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, if $\mu \cdot \mu^* T = \mu^* \cdot T \mu$. $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ it is characterized by: existence of the superior degree triple structures, lifts to the respective algebras and Kleisli categories and, in this latter case, the existence of a pair of adjoint functors between them.

Comunicación:

Dos triples $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ sobre un mismo functor T en una categoría K , se llaman asociados $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, si se verifica la ley del "triple producto": $\mu \cdot \mu^* T = \mu^* \cdot T \mu$.

Si $f:T \rightarrow T$, $g:T \rightarrow T$ son transformaciones naturales, tales que $f \cdot \eta = \eta^*$, $g \cdot \eta^* = \eta$, y verifican la "ley de naturalidad": $\mu \cdot T \mu \cdot g T^2 = \mu^* \cdot T \mu^* \cdot T^2 f$, entonces $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ y, reciprocamente, $f = \mu \cdot \eta^* T$ y $g = \mu^* \cdot T \eta$ son los únicos morfismos de triples que cumplen la ley de naturalidad.

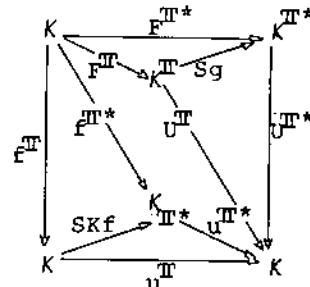
Los triples \mathbb{T} y \mathbb{T}^* se llaman trivialmente asociados si f y g son isomorfismos. Si $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, entonces f isomorfismo $\Leftrightarrow E(\mathbb{T}^*,\mathbb{T}) \Leftrightarrow g$ isomorfismo.

También, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*) \Leftrightarrow (T,T,\eta\eta^*,\mu^*\cdot\mu T)$ es un triple de grado superior $\Leftrightarrow (T,T,\eta\eta^*,\mu\cdot T\mu^*)$ es un triple de grado superior. (Triple de grado superior, de grado 3, en sentido de Maranda [7]).

$E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ es equivalente a que la elevación a las categorías de álgebras $Sg:K \xrightarrow{T} K^*$, verifique: $F^* = Sg \cdot F$, y asimis-

mo que $SKf: K_T \longrightarrow K_{T^*}$, elevación a las categorías de álgebras de Kleisli, verifique: $u = u^{T^*} \cdot SKf$.

Se obtiene así el diagrama conmutativo:



Si T y T^* son asociados para los monomorfismos de triples $f:T \rightarrow T^*$, $g:T^* \rightarrow T$ se cumple que $SKg: K_{T^*} \longrightarrow K_T$, $SKf: K_T \longrightarrow K_{T^*}$ son funtores adjuntos, $SKg \dashv SKf$. Recíprocamente, si T y T' son triples en K , $f:T \rightarrow T'$, $g:T' \rightarrow T$ morfismos de triples tales que $SKg \dashv SKf$, entonces existe un triple T^* isomorfo a T' , asociado con T .

Si $E(A, B)$ es un álgebra de Kleisli (^[1]) sobre el conjunto E , entonces $T = (Ex-, ax-, *x-)$, $T^* = (Ex-, bx-, *x-)$ son triples asociados en la categoría de conjuntos; y así, existen triples no trivialmente asociados. Recíprocamente, si $E(T, T')$, en el conjunto de operaciones unarias de T queda definida una estructura de álgebra de Kleisli.

Para A anillo comunitativo con 1 y $(E, \cdot, a, *, b)$ álgebra de Kleisli no trivial en Conjuntos, las álgebras de polinomios $A[E]$ correspondientes a los monoides del álgebra de Kleisli, determinan triples asociados no triviales en al categoría de A -módulos.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxébra 26. Depto. Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografía

- [1] Barja Pérez, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas. Alxébra 20 (1979). Dpto. Algebra y Fund. Santiago.
- [2] Barja Pérez, J.M.; G-Rodeja F.E. Algebras de Kleisli. (En esta publicación)
- [3] Caruncho Castro, J.R. Teoría de Triples. Alxébra 5 (1971) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

- |4| Freire Nistal,J.L. Propiedades Universales en triples de grado superior. Algebra 11 (1972) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.
- |5| Manes,E.G. Algebraic Theories. Springer (1976).
- |6| Maranda, J.M. On fundamental construction and adjoint functors. Bull.Can.Math.V9(1966)581-591.
- |7| Maranda,J.M. Constructions fondamentales de degré supérieur.J.Reine Angew Math.243(1970) 1-16.