

PRESENTACIONES LIBRES Y $H_{2n}(G)$

Antonio G. Rodicio

ABSTRACT

In this paper we get, for a group G , a group theoretic expression for $H_{2n}(G)$, $n \geq 2$.

1.-INTRODUCCION

Sea G un grupo y $R \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G . Es bien conocido que existe un isomorfismo (fórmula de Hopf) $H_2(G) \cong (R \cap [F, F]) / [F, R]$. En [3] se han obtenido fórmulas análogas para los grupos $H_3(G)$ y $H_5(G)$ a partir de una sucesión exacta que relaciona la homología de G con la homología de ciertos productos semidirectos en los que intervienen los grupos R y F .

El objeto del presente trabajo es dar una interpretación de $H_{2n}(G)$, $n \geq 2$, a partir de una presentación libre de G .

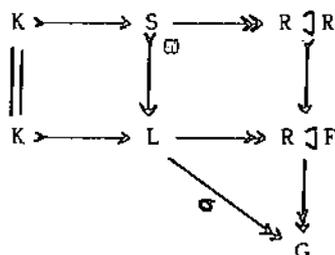
En la primera parte se calcula una expresión para $H_4(G)$ similar a las dadas en [3] para $H_3(G)$ y $H_5(G)$. El método de obtención es diferente ya que la sucesión exacta mencionada anteriormente no permite expresar $H_4(G)$ como núcleo de un homomorfismo entre grupos de homología.

En la segunda parte usamos resultados no publicados de K.W. Gruenberg [2] para interpretar $H_{2n}(G)$, $n \geq 2$.

2.-INTERPRETACION DE $H_4(G)$

Sea G un grupo y $R \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G .

Sea $K \twoheadrightarrow L \twoheadrightarrow R \wr F$ una presentación libre del producto semidirecto de R y F , F actuando sobre R por conjugación. Consideremos el diagrama cartesiano



Teorema 1: Existe un isomorfismo natural

$$H_4(G) \cong \frac{[S, S] \cap [L, K]}{[L, K \cap [S, S]] [S, K]}$$

Demostración

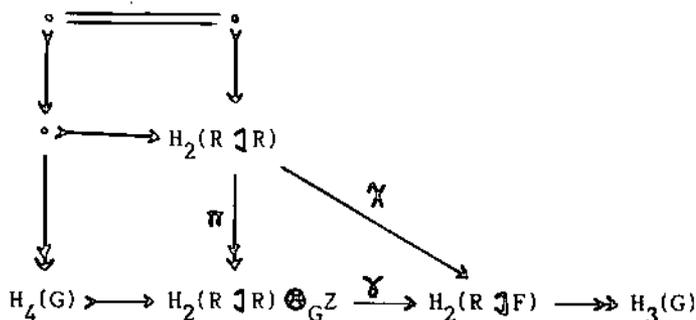
Consideremos la sucesión exacta (obtenida en [3])

$$H_4(G) \longrightarrow H_2(R \wr R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(R \wr F) \twoheadrightarrow H_3(G)$$

donde \mathbb{Z} es el grupo de los enteros racionales con G -acción trivial y G actúa sobre $H_2(R \wr R)$ a través de la extensión

$$R \wr R \twoheadrightarrow R \wr F \twoheadrightarrow G$$

(ver [4, p. 307]). Consideremos ahora el diagrama



donde π es el homomorfismo canónico y $\chi = \gamma \pi$. Usando la

fórmula de Hopf obtenemos

$$H_2(R \wr R) \cong \frac{K \cap [S, S]}{[S, K]}, \quad H_2(R \wr F) \cong \frac{K \cap [L, L]}{[L, K]} .$$

Por tanto

$$\text{Ker } \chi \cong \frac{[S, S] \cap [L, K]}{[L, K]} .$$

Por otra parte, no es difícil comprobar que la acción de G sobre $H_2(R \wr R)$ está dada por $(a[S, K]) \cdot g = xax^{-1}[S, K]$, donde $a \in K \cap [S, S]$, $g \in G$, $x \in L$, $g = \sigma(x)$. El núcleo de π es isomorfo $H_2(R \wr R) \cdot IG$ (siendo IG el ideal aumentación de G) el cual es isomorfo al subgrupo de $(K \cap [S, S]) / [S, K]$ generado por los elementos $xax^{-1}a^{-1}[S, K]$, $x \in L$, $a \in K \cap [S, S]$. Como este subgrupo es isomorfo a

$$\frac{[L, K \cap [S, S]] [S, K]}{[S, K]}$$

el resultado se sigue del isomorfismo $H_4(G) \cong \text{Ker } \chi / \text{Ker } \pi$.

3.-INTERPRETACION DE $H_{2n}(G)$

Sea G un grupo, $R \twoheadrightarrow F \xrightarrow{\xi} G$ una presentación libre de G , X un conjunto de generadores libres de F y n un número entero ≥ 2 . Para cada i , $1 \leq i \leq n-1$, consideremos una copia isomorfa ${}_i R$ de R :

$$R \xrightarrow{\sim} {}_i R, \quad r \longmapsto {}_i r.$$

Sea $E = F * {}_1 R * \dots * {}_{n-1} R$ el producto libre de F y los ${}_i R$. El homomorfismo $\pi : E \longrightarrow G$ determinado por ξ y los homomorfismos triviales ${}_i R \longrightarrow G$ es sobre. Denotaremos por E_G el núcleo de π :

$$E_G \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} G.$$

Sea ahora E^* el núcleo del homomorfismo natural

$$E \longrightarrow F \times {}_1 R \times \dots \times {}_{n-1} R.$$

Definimos dos subgrupos de E entre $[E^*, E^*]$ y E^* :

$$E_* = [F, {}_1R, \dots, {}_{n-1}R][E^*, E^*]$$

$$E_1 = [E_*, E_G][E^*, E^*].$$

Se tiene así una torre de grupos:

$$[E^*, E^*] \subset E_1 \subset E_* \subset E^* \subset E_G \subset E.$$

E_* y E_1 son subgrupos normales de E. Además E_*/E_1 es un G-módulo a través de la conjugación en E.

Necesitamos un subgrupo más E_0 de E, el cual verificará

$$E_1 \subset E_0 \subset E_*.$$

Para definir E_0 introducimos la siguiente notación: si r es un elemento de R y

$$r = x_{s_1}^{e_1} \dots x_{s_k}^{e_k}, \quad e_i = \pm 1, \quad x_{s_i} \in X$$

es su expresión como una palabra en X se define:

$$\begin{aligned} r(i) &= x_{s_{i+1}}^{e_{i+1}} \dots x_{s_k}^{e_k} && \text{si } e_i = +1 \\ &= x_{s_i}^{e_i} \dots x_{s_k}^{e_k} && \text{si } e_i = -1. \end{aligned}$$

Para cada n-upla (r, r_1, \dots, r_{n-1}) de elementos de R sea

$$\begin{aligned} (r; (r_1, \dots, r_{n-1})) &= \\ &= \prod_{i=1}^k [x_{s_i}^{e_i} (r_1^{r(i)-1}, \dots, r_{n-1}^{r(i)-1})]^{e_i r(i)} \in E \end{aligned}$$

(utilizamos notación exponencial para representar la conjugación).

E_0 es la clausura normal en E de E_1 y todos los elementos

$$(r; (r_1, \dots, r_{n-1})).$$

A continuación veremos la relación entre los grupos E_*/E_1 , E_0/E_1 y ciertos ideales del anillo de grupo ZF.

Sea Y un conjunto de generadores libres de R y T una transversal de R en F tal que $1 \in T$.

Teorema 2: E_*/E_1 es el grupo abeliano libre sobre las clases de todos los conmutadores

$$[x, {}_1y_1, \dots, {}_{n-1}y_{n-1}]^t$$

donde $x \in X$, $y_i \in Y$, $t \in T$.

Teorema 3: Sea IF el ideal aumentación de F y denotemos por \bar{T}_R el núcleo del homomorfismo de anillos $ZF \longrightarrow ZG$ inducido por \mathcal{E} .

El homomorfismo $\mathcal{P} : IF \cdot \bar{T}_R^{n-1} / IF \cdot \bar{T}_R^n \longrightarrow E_*/E_1$ definido por $((1-x)(1-y_1)\dots(1-y_{n-1})) + IF \cdot \bar{T}_R^{n-1} \longmapsto [x, {}_1y_1, \dots, {}_{n-1}y_{n-1}]_{E_1}$ es un isomorfismo de G -módulos. Además $\mathcal{P}(\bar{T}_R^n / IF \cdot \bar{T}_R^n) = E_0/E_1$.

Estos dos teoremas están demostrados en [2]. Nosotros los utilizaremos para demostrar:

Teorema 4: Existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$H_{2n}(G) \cong \frac{E_0 \cap [E, E_*]_{E_1}}{[E, E_0]_{E_1}}$$

Demostración

De los teoremas 2 y 3 y de [1, párrafo 3.7] se deduce que $H_{2n}(G)$ es el núcleo del homomorfismo de grupos abelianos

$$E_0/E_1 \otimes_{GZ} \longrightarrow E_*/E_1 \otimes_{GZ}.$$

Un cálculo fácil muestra que existen isomorfismos

$$E_0/E_1 \otimes_{GZ} \cong E_0/([E, E_1]), \quad E_*/E_1 \otimes_{GZ} \cong E_*/([E, E_*]_{E_1}).$$

Hacemos constar nuestro agradecimiento al Prof. Gruenberg por habernos proporcionado su manuscrito [2] aún no publicado.

REFERENCIAS

1. K.W. GRUENBERG. Cohomological Topics in Group Theory. Lecture Notes in Math. 143. Springer (1970).
2. K.W. GRUENBERG. A permutation theoretic description of group cohomology (1982) (No publicado).
3. A.G. RODICIO. Una interpretación de los grupos $H_3(G)$ y $H_5(G)$. Publ. Mat. Univ. Aut. Barcelona 29 (1985) 163-169.
4. J.J. ROTMAN. Introduction to Homological Algebra. Academic Press (1979).

Rebut el día 9 de Maig de 1986

Departamento de Algebra

Facultad de Matemáticas

Universidad de Santiago de Compostela

ESPAÑA