Pub. Mat. UAB
Vol. 30 nº 2-3 Des. 1986

PRESENTACIONES LIBRES Y $H_{2n}(G)$

Antonio G. Rodicio

ABSTRACT

In this paper we get, for a group G, a group theoretic expression for $H_{2n}(G)$, $n\geqslant 2$.

1.-INTRODUCCION

Sea G un grupo y $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G. Es bien conocido que existe un isomorfismo (fórmula de Hopf) $H_2(G)$ $(R\cap[F,F])/[F,R]$. En |3| se han obtenido fórmulas análogas para los grupos $H_3(G)$ y $H_5(G)$ a partir de una sucesión exacta que relaciona la homología de G con la homología de ciertos productos semidirectos en los que intervienen los grupos R y F.

El objeto del presente trabajo es dar una interpretación de $H_{2n}(G)$, $n\geqslant 2$, a partir de una presentación libre de G.

En la primera parte se calcula una expresión para $H_4(G)$ similar a las dadas en |3| para $H_3(G)$ y $H_5(G)$. El método de obtención es diferente ya que la sucesión exacta mencionada anteriormente no permite expresar $H_4(G)$ como nucleo de un homomorfismo entre grupos de homología.

En la segunda parte usamos resultados no publicados de K.W. Gruenberg |2| para interpretar $H_{2n}(G)$, $n\geqslant 2$.

2.-INTERPRETACION DE $H_4(G)$

Sea G un grupo y $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G.

Sea $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow R \rtimes F$ una presentación libre del producto semidirecto de R y F, F actuando sobre R por conjugación. Consideremos el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "\omega"] & R \rtimes R \arrow[d, tail] \\
K \arrow[r, tail] & L \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads, "\sigma"'] & R \rtimes F \arrow[d, two heads] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

Teorema 1: Existe un isomorfismo natural

$$H_4(G) \simeq \frac{[S,S] \cap [L,K]}{[L, K \cap [S,S]]\,[S,K]}$$

Demostración

Consideremos la sucesión exacta (obtenida en |3|)

$$H_4(G) \longrightarrow H_2(R \rtimes R) \otimes_G Z \longrightarrow H_2(R \rtimes F) \twoheadrightarrow H_3(G)$$

donde Z es el grupo de los enteros racionales con G-acción trivial y G actúa sobre $H_2(R \rtimes R)$ a través de la extensión

$$R \rtimes R \rightarrowtail R \rtimes F \twoheadrightarrow G$$

(ver |4, p. 307|). Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[d, tail] & & \\
0 \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & H_2(R \rtimes R) \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & & \\
H_4(G) \arrow[r, tail] & H_2(R \rtimes R) \otimes_G Z \arrow[r, "\gamma"] & H_2(R \rtimes F) \arrow[r, two heads] & H_3(G)
\end{tikzcd}$$

donde π es el homomorfismo canónico y $\chi = \gamma\pi$. Usando la fórmula de Hopf obtenemos

$$H_2(R \rtimes R) \simeq \frac{K \cap [S,S]}{[S,K]}, \qquad H_2(R \rtimes F) \simeq \frac{K \cap [L,L]}{[L,K]} .$$

Por tanto

$$\operatorname{Ker} \chi \simeq \frac{[S,S] \cap [L,K]}{[L,K]} .$$

Por otra parte, no es difícil comprobar que la acción de G sobre $H_2(R \rtimes R)$ está dada por $(a[S,K])\cdot g = xax^{-1}[S,K]$, donde $a \in K \cap [S,S]$, $g \in G$, $x \in L$, $g = \sigma(x)$. El nucleo de π es isomorfo $H_2(R \rtimes R)\cdot IG$ (siendo IG el ideal aumentación de G) el cual es isomorfo al sugrupo de $(K \cap [S,S])/[S,K]$ generado por los elementos $xax^{-1}a^{-1}[S,K]$, $x \in L$, $a \in K \cap [S,S]$. Como este subgrupo es isomorfo a

$$\frac{[L, K \cap [S,S]]\,[S,K]}{[S,K]}$$

el resultado se sigue del isomorfismo $H_4(G) \simeq \operatorname{Ker} \chi / \operatorname{Ker} \pi$.

3.-<u>INTERPRETACION DE</u> $H_{2n}(G)$

Sea G un grupo, $R \rightarrowtail F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} G$ una presentación libre de G, X un conjunto de generadores libres de F y n un número entero $\geqslant 2$. Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, consideremos una copia isomorfa ${}_iR$ de R:

$$R \xrightarrow{\sim} {}_iR, \qquad r \longmapsto {}_ir.$$

Sea $E = F * {}_1R * \ldots * {}_{n-1}R$ el producto libre de F y los ${}_iR$. El homomorfismo $\pi : E \longrightarrow G$ determinado por ε y los homomorfismos triviales ${}_iR \longrightarrow G$ es sobre. Denotaremos por E_G el nucleo de π :

$$E_G \rightarrowtail E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G.$$

Sea ahora E^* el nucleo del homomorfismo natural

$$E \longrightarrow F \times {}_1R \times \ldots \times {}_{n-1}R.$$

Definimos dos subgrupos de E entre $[E^*,E^*]$ y E^*:

$$E_* = [F,{}_1R,\dots,{}_{n-1}R][E^*,E^*]$$

$$E_1 = [E_*,E_G][E^*,E^*].$$

Se tiene asi una torre de grupos:

$$[E^*,E^*] \subset E_1 \subset E_* \subset E^* \subset E_G \subset E.$$

E_* y E_1 son subgrupos normales de E. Además E_*/E_1 es un G-módulo a través de la conjugación en E.

Necesitamos un subgrupo más E_0 de E, el cual verificará

$$E_1 \subset E_0 \subset E_*.$$

Para definir E_0 introducimos la siguiente notación: si r es un elemento de R y

$$r = x_{s_1}^{e_1}\dots x_{s_k}^{e_k},\ e_i = \pm 1,\ x_{s_i} \in X$$

es su expresión como una palabra en X se define:

$$r(i) = x_{s_{i+1}}^{e_{i+1}}\dots x_{s_k}^{e_k} \quad \text{si } e_i = +1$$

$$= x_{s_i}^{e_i}\dots x_{s_k}^{e_k} \quad \text{si } e_i = -1.$$

Para cada n-upla $(r, r_1,\dots, r_{n-1})$ de elementos de R sea

$$(r;\ (r_1,\dots,r_{n-1})) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} [x_{s_i},{}_1(r_1^{r(i)^{-1}}),\dots,{}_{n-1}(r_{n-1}^{r(i)^{-1}})]^{e_i r(i)} \in E$$

(utilizamos notación exponencial para representar la conjugación).

E_0 es la clausura normal en E de E_1 y todos los elementos

$$(r;(r_1,\dots,r_{n-1})).$$

A continuación veremos la relación entre los grupos E_*/E_1, E_0/E_1 y ciertos ideales del anillo de grupo ZF.

Sea Y un conjunto de generadores libres de R y T una transversal de R en F tal que $1 \in T$.

Teorema 2: E_*/E_1 es el grupo abeliano libre sobre las clases de todos los conmutadores

$$[x,{}_1y_1,\dots,{}_{n-1}y_{n-1}]^t$$

donde $x \in X$, $y_i \in Y$, $t \in T$.

Teorema 3: Sea IF el ideal aumentación de F y denotemos por $\bar{I}_R$ el nucleo del homomorfismo de anillos $ZF \longrightarrow ZG$ inducido por $\mathcal{E}$. El homomorfismo $\varphi : IF\cdot\bar{I}_R^{n-1}/IF\cdot\bar{I}_R^n \longrightarrow E_*/E_1$ definido por $((1-x)(1-y_1)\dots(1-y_{n-1}))+IF\cdot\bar{I}_R^{n-1} \longmapsto [x,{}_1y_1,\dots,{}_{n-1}y_{n-1}]E_1$ es un isomorfismo de G-módulos. Además $\varphi(\bar{I}_R^n/IF\cdot\bar{I}_R^n) = E_0/E_1$.

Estos dos teoremas están demostrados en |2|. Nosotros los utilizaremos para demostrar:

Teorema 4: Existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$H_{2n}(G) \simeq \frac{E_0 \cap [E,E_*]E_1}{[E,E_0]E_1}.$$

Demostración

De los teoremas 2 y 3 y de |1,parrafo 3.7| se deduce que $H_{2n}(G)$ es el nucleo del homomorfismo de grupos abelianos

$$E_0/E_1 \otimes_G Z \longrightarrow E_*/E_1 \otimes_G Z.$$

Un cálculo fácil muestra que existen isomorfismos

$$E_0/E_1 \otimes_G Z \simeq E_0/([E\ ,E_1]),\quad E_*/E_1 \otimes_G Z \simeq E_*/([E,E_*]E_1).$$

Hacemos constar nuestro agradecimiento al Prof. Gruenberg por habernos proporcionado su manuscrito |2| aún no publicado.

REFERENCIAS

1. K.W. GRUENBERG. Cohomological Topics in Group Theory. Lecture Notes in Math. 143. Springer (1970).

2. K.W. GRUENBERG. A permutation theoretic description of group cohomology (1982) (No publicado).

3. A.G. RODICIO. Una interpretación de los grupos $H_3(G)$ y $H_5(G)$. Publ. Mat. Univ. Aut. Barcelona 29 (1985) 163-169.

4. J.J. ROTMAN. Introduction to Homological Algebra. Academic Press (1979).

Rebut el dia 9 de Maig de 1986

Departamento de Algebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela
ESPAÑA