Pub. Mat. UAB
Vol. 30 nº 2-3 Des. 1986

ANÀLISI FORMALMENT RECURSIVA

Francesc Tomàs

1. Introducció

Aquest article és una continuació de [1], treball en el qual es descriu el formalisme anomenat "aritmètica formalment recursiva" (secció 4 de [1]), i on es fan diverses consideracions sobre la possibilitat de desenrotllar una "anàlisi formalment recursiva" basada en ell. Aquesta aritmètica formalment recursiva és un formalisme (no un sistema formal) que és finitàriament consistent. En el present article es desenvolupa un tros reduït, però fonamental, d'anàlisi formalment recursiva. Cal no confondre l'anàlisi que desenvoluparem aquí, que és una anàlisi formalitzada, amb l'anàlisi que es presenta esquemàticament a [1], secció 3, que és la versió que podriem dir "informal" (o basada en la teoria de conjunts) de la mateixa. Una part del present treball ha estat feta en col.laboració amb Edgar Becerra.

Recordarem breument la descripció del formalisme de [1], sense, però, repetir les demostracions (finitàries) de la consistència i del "metateorema de minimització". Algunes vaguetats que potser es presentaran podran ser aclarides automàticament, o bé consultant [1].

Així, doncs, recordem que la aritmètica formalment recursiva és una categoria que té com a objectes certes sistemes formals, que anomenarem "segments". Tots els segments tindran el mateix llenguatge i la mateixa lògica, que no serà altra que el càlcul proposicional o lògica sense quantificadors (que en [1] es presenta sense usar els connectius $\wedge$ i $\Rightarrow$, però que aqui presentarem de la manera habitual). Els signes del llenguatge són 0, S, E, M, =, els parentesis, la coma, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, les "variables" i els "operadors". Usarem com a variable els membres de qualsevol llista infinita de símbols; però no usarem les variables d'altra manera que representades per signes auxiliars; i aquests signes auxiliars seran, preferiblement, si bé no exclusivament, les darreres lletres de l'abecedari, possiblement indexades: u, v, x, y, z, x_1, x', etc. Per cada enter positiu n tindrem una llista infinita de símbols, que seran els operadors de grau n. Convenium en que S és un operador de grau 1 (el successor). Cap del símbols 0, E, M, ni cap connectiu lògic, ni cap variable, no serà un operador. Els operadors es representaran per minúscules testades: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{f}_1$, $\bar{f}'$, etc. Els termes, que ara definirem, seran representats per minuscules subratllades: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a}_1$, $\underline{a}'$, etc. Definim: 1) 0 és un terme; 2) cada variable és un terme; 3) si $\bar{f}$ és un operador de grau n, i si $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$ són termes, aleshores $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$, $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$ i $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$ són termes (si n és 1, s'entèn que hem d'escriure $E\bar{f}$ i $M\bar{f}$ en lloc de les dues darreres expressions); 4) les raons anteriors són les soles que fan que una expressió sigui un terme. Entre els termes tenium, doncs, les expressions

$$0, \quad S(0), \; S(S(0)), \ldots$$

Aquestes expressions s'anomenaran numerals. Seran fòrmules atòmiques les expressions $\underline{a}=\underline{b}$, on $\underline{a}$ i $\underline{b}$ són termes. A partir de les atòmiques es formen totes les fòrmules de la manera habitual, mitjançant els connectius $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$. Les fòrmules es representaran per $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{A}_1$, $\underline{A}'$, etc.

El llenguatge que s'acaba de descriure serà el de tots els segments. Un segment diferirà d'un altre només en els postulats. Les regles d'inferència seran: 1) cada fòrmula tautològica constant (això és, en la que no apareix cap variable) i cada postulat del segment (que serà sempre una fòrmula constant) són teoremes del segment; 2) si $\underline{A}$ i $\underline{A} \Rightarrow \underline{B}$ són teorems d'un segment, aleshores $\underline{B}$ també és teorema del segment.

Representarem els segments (encara no definits) per $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{U}$, $\bar{V}$, etc. Escriurem $\bar{U} \vdash \underline{A}$ per a indicar que la formula $\underline{A}$ és un teorema del segment $\bar{U}$.

Usarem el signe $\equiv$ en una expressió $X \equiv Y$ per a indicar que X representa Y, o que Y representa X, o bé que X i Y representen la mateixa expressió. Si $\underline{b}$, $\underline{c}$ i $\underline{d}$ són termes i $\underline{A}$ és una fòrmula, les expressions

$$\underline{b}\,|\,(\underline{c},\underline{d}) \quad \text{i} \quad \underline{A}\,|\,(\underline{c},\underline{d})$$

representaran els resultats de substituir totes les presències de $\underline{c}$ per $\underline{d}$, en $\underline{b}$ i en $\underline{A}$, respectivament. Així, per exemple, si $\bar{f}$ és un operador de grau 2,

$$[\,\bar{f}(\bar{f}(0,0),E\bar{f}(\bar{f}(0,0)))=M\bar{f}(0)]\,|\,(\bar{f}(0,0),0) \equiv \bar{f}(0,E\bar{f}(0))=M\bar{f}(0)$$

Els postulats inicials, donats com esquemes, i que segons veurem, seran postulats de tots els segments, són els següents:

E.P.I.1 $\underline{b}=\underline{b}$, per cada numeral $\underline{b}$.

E.P.I.2 $\neg\underline{b}=\underline{c}$, per cada dos numerals, $\underline{b}$ i $\underline{c}$, que no siguin el mateix.

E.P.I.3 $\underline{b}=\underline{c} \wedge \underline{d}=\underline{f} \Rightarrow \underline{d}'=\underline{f}'$, sempre que $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{f}$, siguin termes i que la fòrmula $\underline{d}'=\underline{f}'$ s'obtingui de $\underline{d}=\underline{f}$ en substituir una presència de $\underline{c}$ per $\underline{b}$.

Aquests postulats contenen les propietats de la igualtat. Podem notar, però, que com que $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no està present en $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$, l'esquema E.P.I.3 no ens permet deduir $\bar{U} \vdash E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})=E\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$ del fet que $\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ per cada $\underline{b}_n$. Això és, E no és un operador en un sentit que ens agradaria que ho fós. Tal com es fa notar a [1, secció 4.3], el demanar que ho fós ens impediria, probablement, el poder demostrar finitàriamente la consistència del formalisme.

Abans d'exposar els "principis" que ens diran quins sistemes formals seran els segments del formalisme hem d'ampliar un xic la nostra terminologia.

Per un segment $\bar{U}$ i un terme $\underline{b}$, direm que $\underline{b}$ és un $\bar{U}$-<u>nombre</u>, i escriurem $\underline{b} \in N_{\bar{U}}$, si per algun natural r podem trobar r numerals, $\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_r$, per als quals poguem demostrar que

$$\bar{U} \vdash \underline{b}=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee \underline{b}=\underline{c}_r$$

Direm també que un terme $\underline{f}$ és $\bar{U}$-funció de les variables $x_1,\ldots,x_n$, i escriurem aleshores $\underline{f} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$, si per cada col.lecció de numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$ tenim que

$$\underline{f}|(x_i,\underline{b}_i) \in N_{\bar{U}}$$

(on, naturalment, $\underline{f}|(x_i,\underline{b}_i) \equiv \underline{f}|(x_1,\underline{b}_1)|\ldots|(x_n,\underline{b}_n)$).

Si $\underline{b}$ és un numeral i $\underline{c}$ un terme, $S^{\underline{b}}(\underline{c})$ representarà un terme, d'acord amb la convenció

$$S^0(\underline{c}) \equiv \underline{c},\ S^{S(0)}(\underline{c}) \equiv S(\underline{c}),\ S^{S(S(0))}(\underline{c}) \equiv S(S(\underline{c})),\ \text{etc}$$

Donat un segment $\bar{U}$, direm que l'operador $\bar{f}$ és <u>nou</u> per $\bar{U}$ si $\bar{f}$ no apareix en cap postulat de $\bar{U}$ que no sigui un cas de E.P.I.3.

Recordem ara els principis PR.1, 2, 3 i 4 que defineixen recursivament els segments.

PR.1. El sistema formal que té el llenguatge i la lògica que s'acaben de descriure i que té, com a únics postulats, els postulats inicials (els casos de E.P.I. 1, 2 i 3) és un <u>segment</u>, el <u>segment</u> <u>inicial</u>, representant per $\bar{I}$.

PR. 2. Si: 1) $\bar{U}$ és un segment i n un enter no negatiu; 2) $\underline{r} \in N_{\bar{U}}(x_1,\dots,x_n)$ i $\underline{s} \in N_{\bar{U}}(x_1,\dots,x_n, Y, Z)$; 3) $\bar{f}$ és un operador nou per $\bar{U}$; aleshores també és un <u>segment</u> el sistema formal que s'obté d'afegir als postulats de $\bar{U}$ els següents esquemes de postulats, (I)-(VII), per tots els numerals $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$, $\underline{c}$, $\underline{d}$:

(I) $\underline{r}|(x_i,\underline{b}_i)=\underline{d} \Rightarrow \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,0)=\underline{d}$

(II) $\underline{s}|(x_i,\underline{b}_i)|(y,\underline{c})|(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,\underline{c}))=\underline{d} \Rightarrow \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,S(c))=\underline{d}$

(III)$_0$ $\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,0)=0 \Rightarrow M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=0$

(III)' $\neg\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,0)=0 \wedge \dots \wedge \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$
$\wedge\, \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0 \Rightarrow M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$

(IV) $\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,\underline{c})=0 \Rightarrow E\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=S(0)$

(V) $E\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=S(0)$

(VI) $M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=\underline{c} \Rightarrow f(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$

(VII) $S^{S(\underline{c})}(\underline{d})=M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n) \Rightarrow \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,\underline{d})=0$

PR.3. Si: 1) les condicions 1), 2) i 3) de PR.2 es satisfan i $\bar{V}$ és el segment que s'obté d'afegir a $\bar{U}$ els esquemes (I)-(VII) com a nous postulats; 2) $\underline{h}_1,\ldots,\underline{h}_p$, $\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_p$, $\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ són $\bar{U}$-funcions de $z_1,\ldots,z_q$; 3) podem demostrar, per qualssevol numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q,\underline{c}$, que

$$\bar{V} \vdash (\underline{h}_1=\underline{k}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{h}_p=\underline{k}_p)|(z_i,\underline{d}_i) \Rightarrow \neg \bar{f}(\underline{g}_1|(z_i,\underline{d}_i),\ldots,\underline{g}_n|(z_i,\underline{d}_i),\underline{c})=0;$$

aleshores també és un <u>segment</u> el sistema formal que s'obté en afegir a $\bar{V}$ el següent esquema de postulats, per qualssevol numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q$, $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$:

$$\text{(VIII)} \quad (\underline{h}_1=\underline{k}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{h}_p=\underline{k}_p \wedge \underline{g}_1=\underline{b}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{g}_n=\underline{b}_n)|(z_i,\underline{d}_i)$$
$$\Rightarrow \neg E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$$

(es permet el cas $p \equiv 0$)

PR. 4. Res no és un segment si no és per les raons anteriors.

No necessitarem recordarquè són els morfismes.

Direm que el segment $\bar{W}$ és extensió del $\bar{V}$, i escriurem $\bar{V} \prec \bar{W}$, si tots els postulats de $\bar{V}$ són postulats de $\bar{W}$.

Es indispensable recordar també dos metateoremes.

<u>Metateorema d'inducció</u>. Si $\bar{U} \vdash \underline{A}|(x_i,\underline{b}_i)$ per qualsevol col.lecció de numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$, aleshores $\bar{U} \vdash \underline{A}|(x_i,\underline{b}_i)$ sempre que $\underline{b}_i \in N_{\bar{U}}$ per $i \equiv 1,\ldots,n$.

La demostració d'aquest metateorema és trivial.

<u>Metateorema de minimització</u>. Si tenim $\bar{U} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)=S(0)$, aleshores també tenim

$$M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m) \in N_{\bar{U}} \quad \text{i} \quad \bar{U} \vdash \bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m,M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m))=0.$$

<u>Corol.lari</u>. Si $\bar{U} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)=S(0)$ per cada col.lecció de nume-

rals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m$, aleshores $M\bar{h}(x_1,\ldots,x_m) \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_m)$.

La demostració d'aquest metateorema es fa a [1], lligada amb la demostració de la consistència. En la demostració es dóna la manera, si $\bar{U} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)=S(0)$, de trobar, efectivament, certs numerals, $\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_t$, per als quals es pot demostrar que

$$\bar{U} \vdash M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c}_t$$

Les propietats més importants del formalisme són:

1) Donades funcions $\underline{r}$ i $\underline{s}$, de $x_1,\ldots,x_n$, i de $x_1,\ldots,x_n,y,z$, respectivament, podem introduir la funció $\bar{f}(x_1,\ldots,x_n,y)$ definida per recursió primitiva a partir de $\underline{r}$ i $\underline{s}$. Aixo és, si $r \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$ i $\underline{s} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n,y,z)$, i si escollim $\bar{f}$ nou per $\bar{U}$, aleshores en el segment $\bar{V}$ obtingut de $\bar{U}$ afegint els postulats (I)-(VII) de PR.2 podem demostrar que $\bar{f}(x_1,\ldots,x_n,y) \in N_{\bar{V}}(x_1,\ldots,x_n,y)$ i que, per qualssevol numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}$,

$$\bar{V} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=\underline{r}\,|\,(x_i,\underline{b}_i)$$

$$\bar{V} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=\underline{s}\,|\,(x_i,\underline{b}_i)\,|\,(y,\underline{c})\,|\,(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}))$$

2) Donada una funció $\underline{t}$ de $x_1,\ldots,x_n$ podem, per PR.2, canviar la notació de $\underline{t}$ a una notació funcional. Això és, si $\underline{t} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$ podem prendre, en PR.2, n-1 en lloc de n, $\underline{r} \equiv \underline{t}\,|\,(x_n,0)$, $\underline{s} \equiv \underline{t}\,|\,(x_n,S(y))$ i aleshores, afegint a $\bar{U}$ els corresponents postulats (I)-(VII), amb algun operador $\bar{f}$ nou per $\bar{U}$, tindrem, en el nou segment $\bar{V}$, $\bar{V} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{t}\,|\,(x_i,\underline{b}_i)$, per qualssevol numerals $\underline{b}_i$. Al mateix temps tindrem $E\bar{f}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

3) Si $\underline{u} \in N_{\bar{V}}(x_1,\ldots,x_m)$ i $\underline{v}_i \in N_{\bar{V}}(y_1,\ldots,y_n)$ per $i \equiv 1,\ldots,n$, aleshores $\underline{u}\,|\,(x_i,\underline{v}_i) \in N_{\bar{V}}(y_1,\ldots,y_n)$. Això és, la composició de funcions

d'un segment es funció en el segment.

4) Per qualsevol numeral $\underline{c}$ i qualsevol $\bar{U}$, $\underline{c} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$. També tenim $x_i \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$, per $i \equiv 1,\ldots,n$, i $S(x) \in N_{\bar{U}}(x)$. Això, junt amb lo observat a 1), 2) i 3), i amb el metateorema de minimització, mostra que podem introduir totes les funcions recursives que es vagin necessitant.

5) El que tenim, en el nostre formalisme, a més de l'aritmètica recursiva, és la possibilitat d'introduir la funció $E\bar{h}(x_1,\ldots,x_{m-1})$ associada a $\bar{h}(x_1,\ldots,x_m)$ en la qual, pero, com ja s'ha indicat, E no funciona ben bé com un operador.

Aprofitem la ocasió per senyalar certes inexactituds o errades de [1]:

a) En la condició CL.3 (pàg. 64) hi manca: si $\underline{c}$ és un numeral present en alguna fòrmula de A que no sigui un cas de E.P.I. 3, aleshores $\underline{c}=\underline{c}$ pertany a A.

b) Des del rengle 20 de la pàgina 72, on diu "Això implica...", fins al rengle 23 de la mateixa pàgina, on diu "....Un $\bar{U}_{i+1}$-nombre", tot s'ha de suprimir, i en el seu lloc s'hi ha de posar el següent:

"Suposem, per cada j, que $\underline{c}_j$ és el primer numeral amb aquesta propietat, i sigui $\underline{c}'$ el més gran de tots el $\underline{c}_j$. Fem ara una hipòtesi addicional, que després eliminarem: suposem que, per els nostres $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$, el cas corresponent de $(III)_{0,i+1}$ i tots els casos de $(III)'_{i+1}$ per tots els $\underline{c}$ que són anteriors a $\underline{c}'$ pertanyen a A i, en conseqüència, a B i a B_{i+1}. Aleshores considerem; per cada j, el cas de $(III)'_{0,i+1}$ si $\underline{c}_j \equiv 0$, i si no el cas de $(III)'_{i+1}$ corresponent a $S(c) \equiv c_j$, i aleshores tindrem

$$G_j(M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c}_j) \equiv \underline{\bar{V}}$$

per cada j, i això implica, per cada G compatible amb B_{i+1}, que

$$G(M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c}_w) \equiv \underline{\bar{V}}$$

i això mostra que $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ és un U_{i+1}-nombre. Tornem ara a la hipòtesi addicional: si els casos que hem considerat de $(III)_{0,i+1}$ i $(III)'_{i+1}$ no pertanyen a A, aleshores li els adjuntem i tornem a començar, per alguna B' finita closa. El que necessitem comprovar és, únicament, que $\underline{c}'$ no s'incrementa; però això és una conseqüència de b_{i+1}), perquè cada valoració B_{i+1}-normal és compatible amb B_{i+1}. Això és, per cada valoració B_{i+1}-normal G' tindrem $G'(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}_j)=0) \equiv \underline{\bar{V}}$ per alguna de les j anteriors."

c) En la pàgina 75, formula (5), ha de ser

$$\bar{U}_{i+1} \vdash \neg \underline{A}_1^{j(k)} \vee \ldots \vee \neg \underline{A}_p^{j(k)} \ \ldots \text{ en lloc de } \ \bar{U}_{i+1} \vdash \neg \underline{A}_1^{k} \vee \ldots \vee \underline{A}_p^{k} \ \ldots$$

2. L'argot tècnic. El segment bàsic

Desenvolupar l'anàlisi matemàtica en base al formalisme vol dir, vagament, usar el formalisme de qualsevol manera finitària o constructiva per a fer el tal desenvolupament. Per un procès d'aproximació, assajant de desenvolupar un mínim d'anàlisi amb un minim d'elegància i simplicitat, s'ha arribat a el que anomenarem un "argot tècnic", que ara descriurem. No afirmem que aquest argot ens permeti fer totes les manipulacions finitàries possibles del formalisme; però és adequat per les nostres finalitats immediates.

Per començar, necessitarem alguns símobls nous, els "pseudooperadors". Per cada enter positiu n hem de tenir una llista infinita de símbols, els pseudooperadors de grau n. Representem els pseudooperadors per els mateixos símbols que usem per a representar operadors: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{f}$, $\bar{f}_1$, etc.

Trencarem, no una convenció, però un hàbit: en lloc de representar les variables exclusivament per $x, y, \ldots,$ les representarem, com qualsevol altre terme, per $\underline{a}, \underline{b}, \underline{x}, \underline{a}', \underline{y},$ etc.

Definirem ara els "neotermes" i les "neofòrmules", que seran extensions de les classes dels termes i de les fòrmules:

1) 0 és un neoterme; 2) cada variable és un neoterme; 3) si $\bar{f}$ es un operador o un pseudooperador de grau n, i si $b_1, \ldots, b_n$ són neotermes, aleshores $\bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$, $E\bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{n-1})$ i $M\bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{n-1})$ són neotermes; 4) si $\underline{a}$ i $\underline{b}$ són neotermes, aleshores $\underline{a}=\underline{b}$ és neofòrmula; 5) si $\underline{A}$ i $\underline{B}$ són neofòrmules, aleshores $\neg(\underline{A})$, $(\underline{A}) \vee (\underline{B})$, $(\underline{A}) \wedge (\underline{B})$, $(\underline{A}) \Rightarrow (\underline{B})$, i $(\underline{A}) \Leftrightarrow (\underline{B})$ són neofòrmules. Suprimirem parèntesis, com en les fòrmules, sempre que convingui i no causi ambigüitat.

Definirem ara les "formes", que representarem per $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc. Al mateix temps direm quan un pseudooperador o una variable són "lligats" en una forma:

1) Si $\underline{A}$ és una neofórmula, aleshores $\underline{A}$ és una forma; cap pseudooperador o variable no és lligat en $\underline{A}$;

2) Si $\underline{a}$ és un neoterme, aleshores $\underline{a} \in N$ és una forma, en la que cap pseudooperador o varible no és lligat;

3) Si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són formes i no hi ha cap pseudooperador o variable que sigui lligat en una d'elles i aparegui en l'altra sense ser-hi lligat, aleshores $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$ és una forma, en la que són lligats els operadors o variables que són lligats en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$;

4) en les mateixes condicions, i si, ademés, en $\mathcal{A}$ no hi apareix el signe $\models$, aleshores $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ és una forma, en la que els pseudooperadors variables que hi són lligats són els que són lligats en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$;

5) Si $\mathcal{A}$ és una forma en la que no són lligats els pseudooperadors $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$ ni les variables $\underline{t}_1, \ldots, \underline{t}_s$, aleshores $(\exists \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r,$

$\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)$ [A] i $(\forall\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r,\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)$ [A] són <u>formes</u>; en les que els pseudooperadors o variables <u>lligats</u> són $\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r$, $\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s$ i els pseudooperadors o variables que són lligats en A.

Direm que una forma és <u>closa</u> si tots els pseudooperadors i variables que hi apareixen són lligats en ella.

Descriurem a continuació el significat de les formes closes. O bé, el que és el mateix, direm quan una forma closa és veritat en un segment. Escriurem

$$\bar{V}: A$$

per a indicar que A és <u>veritat</u> en $\bar{V}$. Definim, recursivament:

V.1. $\bar{V}: \underline{A}$ si $\bar{V} \vdash \underline{A}$

V.2. $\bar{V}: a \in N$ si $\underline{a} \in N_{\bar{V}}$

V.3. $\bar{V}: A \,\&\, B$ si $\bar{V}: A$ i $\bar{V}: B$

V.4. $\bar{V}: A \models B$ si, en el cas que $\bar{V}: A$, hi ha alguna extensió $\bar{W}$ de $\bar{V}$ tal que $\bar{W}: B$.

V.5. $\bar{V}: (\exists\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r,\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)$ [A] si podem trobar certs operadors $\bar{f}_i$, dels mateixos graus que els $\bar{f}_i$, i certs termes $\underline{t}_i'$, tals que, si A' és el resultat de substituir, en A, els $\bar{f}_i$ per els $\bar{f}_i'$ i les $\underline{t}_i$ per els $\underline{t}_i'$, aleshores $\bar{V}: A'$.

V.6. $\bar{V}: (\forall\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r,\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)$ [A] si $\bar{V}: A'$ per cada A' que s'obtingui de substituir els $\bar{f}_i$ i les $\underline{t}_i$ per operadors $\bar{f}_i'$ dels mateixos graus i numerals $\underline{t}_i'$.

Amb això queda dit el que s'ha de fer per a demostrar que una forma és veritat en un segment. Si, per exemple, segons V.4, volem demostrar que $\bar{V}: A \models B$, aleshores hem d'estar segurs que no es dóna el cas $\bar{V}: A$ o bé hem de donar, suposant que $\bar{V}: A$, la manera de construir un cert segment $\bar{W}$ extensió de $\bar{V}$ i la manera de demostrar que $\bar{W}: B$.

Podem dir, des d'ara, que no ens interessarà (és a dir, no ens serà de cap utilitat) demostrar que $\bar{V}: A$ per un cert segment particular. El que ens interessarà serà demostrar, per certs formes A, que $\bar{V}: A$ per cada $\bar{V}$ que sigui extensió d'un cert segment que anomenarem "bàsic", i que descriurem més endavant.

Però abans convé donar un exemple que potser mostra que, en general, no és interessant el saber que $\bar{V}: A$ per un segment particular $\bar{V}$. L'exemple és el següent:

Si $\bar{g}$ és qualsevol operador de grau 1, diferent de S, afirmem que

$$\bar{I}: (0=0 \vDash \bar{g}(0)=0) \ \& \ (0=0 \vDash \bar{g}(0)=S(0))$$

En efecte, segons V.3 hem de demostrar

(*) $\bar{I}: 0=0 \vDash \bar{g}(0)=0$

(**) $\bar{I}: 0=0 \vDash \bar{g}(0)=S(0)$

Com que $\bar{I}: 0=0$ (ja que significa $\bar{I} \vdash 0=0$), demostrar (*) vol dir exhibir un segment $\bar{V}_1$, extensió de $\bar{I}$, per al qual $\bar{V}_1: \bar{g}(0)=0$. Mitjançant PR.2, si prenem $\bar{V} \equiv \bar{I}$, $n \equiv 0$, $\underline{r} \equiv 0$, $\bar{f} \equiv \bar{g}$ (i $\underline{s}$ qualsevol), i si $\bar{V}_1$ és el segment que s'obté d'adjuntar a $\bar{I}$ els corresponents postulats (I)-(VII), aleshores tindrem, segons el postulat (I) per $\underline{d} \equiv 0$,

$$\bar{V}_1 \vdash 0=0 \Rightarrow \bar{g}(0)=0$$

i, com que $\bar{V}_1 \vdash 0=0$, tindrem $\bar{V}_1 \vdash \bar{g}(0)=0$, tal com voliem.

De manera semblant, si en lloc de $\underline{r} \equiv 0$ prenem $\underline{r} \equiv S(0)$ tindrem un segment $\bar{V}_2$, extensió de $\bar{I}$, per al qual

$$\bar{V}_2: \bar{g}(0)=S(0),$$

cosa que demostrarà (**).

Es clar, però, que la forma $(0=0 \vDash \bar{g}(0)=0) \ \& \ (0=0 \vDash \bar{g}(0)=S(0))$

no és veritat per cap segment per al qual $\breve{g}$ no sigui un operador nou.

Abans de definir l'anunciat segment bàsic recordem encara un artifici ben conegut que usarem sovint. Suposem que hem demostrat que $\bar{V}$: $(\exists \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r,\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)[A]$. Això vol dir que hem exhibit certs operadors $\bar{f}'_i$ i certs termes $\underline{t}'_i$ per als que hem demostrat $\bar{V}$: A', on A' és el resultat de substituir els $\bar{f}_i$ i les $\underline{t}_j$ per els $\bar{f}'_i$ i els $\underline{t}'_j$. L'artifici és el següent: canviem el significat del signes auxiliars $\bar{f}_i$ i $\underline{t}_i$, i fem que ara representin el que havíem representat per $\bar{f}'_i$ i $\underline{t}'_i$; i aleshores tindrem que $\bar{V}$: A. Això és, de

$$\bar{V}:\ (\exists \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r,\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_s)[A]$$

obtenim que $\bar{V}$: A, però això únicament després d'haver canviat el significat del signes $\bar{f}_i$, $\underline{t}_j$, que ara passen a representar certs operadors i certs termes.

Definim ara el <u>segment bàsic</u>, que denotarem per $\bar{B}$, i que no és altre que el que s'obté de $\bar{I}$ en afegir, successivament, mitjançant PR.2, els postulats indispensables per a tenir com a $\bar{B}$-funcions les funcions $+(x,y)$ (suma), $\cdot(x,y)$ (producte), $\bar{p}(x)$ (predecessor), $\dot{-}(x,y)$ (diferència no negativa), $\bar{a}(x)$ i $\bar{b}(x)$, aquestes darreres amb les propietats següents, que expressarem en l'argot:

$$\bar{B}:\ \bar{p}(0)=0\ \&\ (\forall \underline{b})[\bar{p}(S(\underline{b}))=\underline{b}]$$

$$\bar{B}:\ (\forall \underline{a})[\dot{-}(\underline{a},0)=\underline{a}]\ \&(\forall \underline{a},\underline{b})[\dot{-}(\underline{a},S(\underline{b}))=\bar{p}(\dot{-}(\underline{a},\underline{b}))]$$

$$\bar{B}:\ \bar{a}(0)=0\ \&\ (\forall \underline{b})[\bar{a}(S(\underline{b}))=S(0)]$$

$$\bar{B}:\ \bar{b}(0)=S(0)\ \&\ (\forall \underline{b})[\bar{b}(S(\underline{b}))=0]$$

Suposem demostrades les propietats d'aquest funcions. Les demostracions són fàcilment adaptables de qualsevol exposició d'aritmètica recursiva, com, per exemple, [2].

Usarem expressions auxiliars $b+c$, $b \cdot c$, etc, per representar neotermes o neofòrmules, d'acord amb les convencions següents, en les quals podem suprimir parèntesis de la manera usual:

$$(b)+(c) \equiv +(b,c)$$

$$(b)(c) \equiv (b)\cdot(c) \equiv \cdot(b,c)$$

$$(b)\dot{-}(c) \equiv \dot{-}(b,c)$$

$$|b-c| \equiv ((b)\dot{-}(c))+((c)\dot{-}(b))$$

$$b \leqslant c \equiv (b)\dot{-}(c)=0$$

$$b < c \equiv S(b) \leqslant c$$

Introduïm encara altres convencions o definicions, per a representar formes o altres expressions. Primer:

$$a \in N(t_1,\ldots,t_n) \equiv (\forall t_1,\ldots,t_n)[a \in N]$$

Usarem les expressions auxiliars $b-c/d$, on b,c i d són neotermes. Definim:

$$b-c/d \in Q'(t_1,\ldots,t_n) \equiv (\forall t_1,\ldots,t_n)[b \in N \;\&\; c \in N \;\&\; d \in N]$$

$$b-c/d \in Q(t_1,\ldots,t_n) \equiv b-c/d \in Q'(t_1,\ldots,t_n) \;\&\; (\forall t_1,\ldots,t_n)[\neg d=0]$$

(es permet el cas $n \equiv 0$, en les definicions anteriors)

$$(b-c/d)+(f-g/h) \equiv (bh+fd)-(ch+gd)/(dh)$$

$$(b-c/d)(f-g/h) \equiv (b-c/d)\cdot(f-g/h) \equiv (bf+gc)-(bg+cf)/(dh)$$

$$-(b-c/d) \equiv c-b/d$$

$$(b-c/d)^{-1} \equiv (d\cdot(\bar{a}(b\dot{-}c)))-(d\cdot(\bar{a}(c\dot{-}b)))/|b-c|$$

$$(b-c/d)-(f-g/h) \equiv (b-c/d)+(-(f-g/h))$$

$$|b-c/d| \equiv |b-c|-0/d.$$

Posem també

$$\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}=\underline{f}-\underline{g}/\underline{h} \equiv \underline{bh}+\underline{gd}=\underline{ch}+\underline{df}$$

$$\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\leqslant\underline{f}-\underline{g}/\underline{h} \equiv \underline{bh}+\underline{gd}\leqslant\underline{ch}+\underline{fd}$$

$$\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}<\underline{f}-\underline{g}/\underline{h} \equiv \underline{bh}+\underline{gd}<\underline{ch}+\underline{fd}$$

Les convencions anteriors valen, en particular, per qualssevol termes $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$, fins i tot si $\underline{d} \equiv \underline{0}$, $\underline{h} \equiv \underline{0}$ o casos semblants. Però és clar que $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}$ tendirà a adquirir el significat de nombre racional, i els signes $\leqslant$ i $<$ el significats usuals, i aleshores valdran les propietats de les igualtats i les desigualtats, que aquí suposarem demostrades. Per exemple, donem per demostrat que

$$\bar{B}:\ (\forall \underline{b},\underline{c},\underline{d})[\neg \underline{d}=0 \Rightarrow (\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})\cdot(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})^{-1}=S(0)-0/S(0)]$$

Però també és útil notar que, en general,

$$\bar{B}:\ (\forall \underline{a},\underline{b},\underline{c})[\neg \underline{c}=0 \Leftrightarrow \underline{a}-\underline{b}/\underline{c} < S(0)-0/0]$$

$$\bar{B}:\ (\forall \underline{a},\underline{n})[\neg \underline{n}=0 \wedge \underline{a}-0/c < S(0)-0/\underline{N} \Rightarrow \neg \underline{c}=0] .$$

Així, doncs, tenim definit el segment bàsic $\bar{B}$. D'ara endavant tots els segments que considerarem seran extensions de $\bar{B}$.

Tornem ara a les formes. Ja hem dit què significa $\bar{V}: A$; això és, ja sabem que vol dir que la forma closa A sigui veritat en el segment $\bar{V}$. Diguem ara: per qualsevol forma closa A, el significat de

$$: A$$

és

$$\bar{V}: A \ \text{ per cada } \bar{V} \text{ extensió de } \bar{B}$$

El desenvolupament de l'anàlisi formalment recursiva consistirà basicament en demostrar $: A$ per un seguit de formes closes A. Que el que desenvoluparem és, en efecte, un tros d'anàlisi matemàtica ha de quedar clar automàticament, amb ajuda de les definicions. Les definicions són les convencions del tipus $X \equiv Y$, que indiquen que X representa Y, o Y representa X, o bé que X i Y representen el mateix. En aquestes convencions X i Y poden ser termes, fòrmules, neotermes, neofòrmules, formes o qualsevol expressión auxiliar que ens convingui, inclús expressions del llenguatge ordinari. Així, per exemple, podem convenir en que

$$(\text{si } A, \text{ aleshores } B) \equiv (A \text{ implica } B) \equiv (A \vDash B)$$

o bé, si suprimim els parèntesis, que no són necessaris,

$$\text{si } A, \text{ aleshores } B \equiv A \text{ implica } B \equiv A \vDash B$$

3. Els nombres reals

El desenvolupament que farem de l'anàlisi està inspirat en l'exposició de l'anàlisi recursiva deguda a Goodstein [3]. Com se sap, l'anàlisi recursiva té molt serioses limitacions, tals com el fet que en ella hi ha successions creixents i afitades que no són de Cauchy (recursivament parlant) (veure, per exemple, [4]). Aquests fenòmens tan inconvenients ja no es donen en anàlisi formalment recursiva. Així, doncs, aquesta última es una anàlisi mes poderosa que l'anàlisi recursiva, que ja no és constructiva però que, en canvi, és finitàriament consistent.

Introduïrem expressions $\varphi(\underline{x})$, $\varphi(\underline{y})$, $\psi(\underline{x})$, etc, on $\underline{x}$,$\underline{y}$ representen variables, per representar expressions de la mena $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$, on $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$ són neotermes. Si posem

$$\varphi(\underline{x}) \equiv \underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$$

convenim, per qualsevol neoterme $\underline{t}$, en que

$$\varphi(\underline{t}) \equiv (\underline{f}|(\underline{x},\underline{t}))-(\underline{g}|(\underline{x},\underline{t}))/(\underline{h}|(\underline{x},\underline{t})),$$

on el significat de $\underline{f}|(\underline{x},\underline{t})$, etc, és el mateix per neotermes que per termes (el resultat de substituir $\underline{x}$ per $\underline{t}$ en $\underline{f}$). És clar que el cas interessant és quan en $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ no apareixen altres variables que $\underline{x}$. Suposarem que aquest és el cas. Eventualment suprimirem la $\underline{x}$ i només escriurem φ.

També posem

$$1 \equiv S(0), \quad 2 \equiv S(S(0)), \quad 3 \equiv S(S(S(0))), \quad \text{etc}$$

$$\underline{m}/\underline{n} \equiv \underline{m}-0/\underline{n}$$

En particular,

$$1/\underline{n} \equiv 1-0/\underline{n} \equiv S(0)-0/\underline{n}$$

$$\underline{m}/1 \equiv \underline{m}-0/1 \equiv \underline{m}-0/S(0)$$

$$1/1 \equiv 1-0/1$$

3.1 <u>Definició</u>. φ és un real $\equiv \varphi \in R \equiv \varphi(\underline{x}) \in R(\underline{x}) \equiv \varphi(\underline{x}) \in Q'(\underline{x})$ & $(\exists \bar{m})[\bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x})$ & $(\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi(\bar{m}(\underline{n}))| < 1/\underline{n}]]$.

Si la forma representada per $\varphi \in R$ és closa, que és el cas que es dóna si en $\varphi(\underline{x})$ no apareix altra variable que $\underline{x}$, tenim, d'acord amb V.1-6, que $\bar{V}$: $\varphi \in R$ si

$$\bar{V}\colon \varphi(\underline{x}) \in Q'(\underline{x})$$

i

$$\bar{V}\colon (\exists \bar{m})[\bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi(\bar{m}(\underline{n}))| < 1/\underline{n}]],$$

això és, si

(*) $$\underline{f} \in N_{\bar{V}}(\underline{x}) \ \& \ \underline{g} \in N_{\bar{V}}(\underline{x}) \ \& \ \underline{h} \in N_{\bar{V}}(\underline{x})$$

i, per algun operador que ara denotarem per $\underline{m}$ podem demostrar que

(**) $\bar{V} \vdash |\varphi(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi(\bar{m}(\underline{n}))| < 1/\underline{n}$ per tots els numerals $\underline{n}$ i $\underline{r}$.

Ara tenim

3.2 <u>Lema</u>. Per qualsevol termes $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$, i si $\varphi(\underline{x}) \equiv \underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$,

$$: \varphi(\underline{x}) \in R(\underline{x}) \models (\exists \underline{m},\underline{n})(\forall \underline{r})[\,|\varphi(\underline{n}+\underline{r})| < \underline{m}/1]$$

Per demostrar el lema hem de considerar qualsevol segment $\bar{V}$ extensió de $\bar{B}$ i suposar que $\bar{V}: \varphi(\underline{x}) \in R(\underline{x})$; és a dir, que es satisfan (*) i (**). Aleshores

$$\bar{V} \vdash |\varphi(\bar{m}(1)+\underline{r})-\varphi(\bar{m}(1))| < 1/1 \quad \text{per tots el numerals } \underline{r},$$

d'on, per una propietat del valor absolut (que suposem demostrada),

$$\bar{V} \vdash |\varphi(\bar{m}(1)+\underline{r})|<|\varphi(\bar{m}(1)|+1/1, \quad \text{per tots el numerals } \underline{r}.$$

Tenim, per certs $\underline{a}$ i $\underline{b}$, que $|\varphi(\bar{m}(1))| \equiv \underline{a}-0/\underline{b}$, i llavors

$$\bar{V} \vdash |\varphi(\bar{m}(1)+\underline{r})| < (\underline{a}+1)/1 \quad \text{per tots els numerals } \underline{r},$$

de manera que, d'acord amb V.5 i V.6,

$$\bar{V}: (\exists \underline{m},\underline{n})(\forall \underline{r})[\,|\varphi(\underline{n}+\underline{r})| < \underline{m}/1]$$

(on, ara, $\underline{m}$,$\underline{n}$ i $\underline{r}$ representen variables), i això és el que s'havia de demostrar, segons V.4 (on el $\bar{W}$ de V.4 és el mateix $\bar{V}$).

3.3 <u>Proposició</u>. Si $\varphi_1(\underline{x}) \equiv \underline{f}_1-\underline{g}_1/\underline{h}_1$ i $\varphi_2(\underline{x}) \equiv \underline{f}_2-\underline{g}_2/\underline{h}_2$, on els $\underline{f}_i$, $\underline{g}_i$, $\underline{h}_i$ són termes qualssevol (sense altres variables que $\underline{x}$), aleshores

$$: (\varphi_1 \in R \;\&\; \varphi_2 \in R) \models (\varphi_1+\varphi_2 \in R \;\&\; \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in R \;\&\; -\varphi_1 \in R)$$

Demostrarem, per cada $\bar{V}$, que $\bar{V}: (\varphi_1 \in R \;\&\; \varphi_2 \in R) \models \varphi_1\varphi_2 \in R$. Suposem que $\bar{V}: \varphi_1 \in R \;\&\; \varphi_2 \in R$. D'acord amb la definició anterior i la demostració del lema tenim, per uns certs $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$, $\underline{n}_1$, $\underline{n}_2$, $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$,

$$\bar{V}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}_1(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}_1(\underline{n}))|<1/\underline{n}]$$

$$\bar{V}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_2(\bar{m}_2(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_2(\bar{m}_2(\underline{n}))|<1/\underline{n}]$$

$$\bar{V}:\ (\forall \underline{r})[\,|\varphi_1(\underline{n}_1+\underline{r})|<\underline{m}_1/1]$$

$$\bar{V}:\ (\forall \underline{r})[\,|\varphi_2(\underline{n}_2+\underline{r})|<\underline{m}_2/1]$$

Ara adjuntem a $\bar{V}$ alguns postulats, d'acord amb PR.2, que garanteixin, per el segment $\bar{W}$ així obtingut, i un cert operador $\bar{m}$, que

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{s})[\,\bar{m}(\underline{s})=\bar{m}_1(4\underline{m}_1\underline{s})+\bar{m}_2(4\underline{m}_2\underline{s})+\underline{n}_1+\underline{n}_2]$$

Com que les quatre afirmacions anteriors continuen essent certes a $\bar{W}$, tindrem, usant el principi d'inducció,

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}(\underline{n}))|<1/2\underline{m}_1\underline{n}]$$

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))|<1/2\underline{m}_2\underline{n}]$$

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})|<\underline{m}_1/1]$$

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})|<\underline{m}_2/1]$$

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}(\underline{n}))\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))$$

$$\leqslant|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})|\cdot|\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))|+|\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))|\cdot|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}(\underline{n}))|$$

$$\bar{W}:\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r}-\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))|<1/\underline{n}]$$

Això últim vol dir, si ara $\bar{m}$ representa un pseudooperador, i si afegim una observació trivial:

$$\bar{W}:(\exists\bar{m})[\,\bar{m}(x)\in N(\underline{x})\ \&\ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi_1(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})\varphi_2(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}(\underline{n}))\varphi_2(\bar{m}(\underline{n}))|<1/\underline{n}]]$$

De manera que, d'acord amb V.4, haurem demostrat la proposició si demostrem

$$\bar{W}:\ \varphi_1(\underline{x})\varphi_2(\underline{x})\in Q'(\underline{x})$$

Però això, com abans la demostració de que $\bar{m}(x) \in N_{\bar{W}}(\underline{x})$, és trivial (només cal demostrar que, en general, si $\underline{a} \in N_{\bar{U}}$ i $\underline{b} \in N_{\bar{U}}$, aleshores $\underline{a+b} \in N_{\bar{U}}$ i $\underline{ab} \in N_{\bar{U}}$).

3.4. Definició. $\varphi \sim 0 \equiv \varphi(x) \sim 0 \equiv$

$$\equiv (\exists \bar{m})[\bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ (\forall \underline{n},\underline{r})[\,|\varphi(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})| < 1/\underline{n}\,]]$$

3.5. Definició.

φ és equivalent a $\psi \equiv \varphi \sim \psi \equiv \varphi(x) \sim \psi(x) \equiv \varphi(x)-\psi(x) \sim 0$.

Suposarem, per expressions $\varphi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$, etc, de la forma $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$, i quan així ho indiqui el context, que $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$ son termes (no neotermes qualssevol) en els quals no aparegui altra variable que $\underline{x}$.

3.6. Proposició. Per qualssevol $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \chi$,

1) $: \varphi \in R \ \models \varphi \sim \varphi$

2) $: (\varphi \in R \ \& \ \psi \in R \ \& \ \varphi \sim \psi) \models \psi \sim \varphi$

3) $: (\varphi \in R \ \& \ \psi \in R \ \& \ \chi \in R \ \& \ \varphi \sim \psi \ \& \ \psi \sim \chi \models \varphi \sim \chi$

4) $: (\varphi_1 \in R \ \& \ \varphi_2 \in R \ \& \ \psi_1 \in R \ \& \ \psi_2 \in R \ \& \ \varphi_1 \sim \varphi_2 \ \& \ \psi_1 \sim \psi_2)$

$$\models (\varphi_1 + \psi_1 \sim \varphi_2 + \psi_2 \ \& \ \varphi_1\psi_1 \sim \varphi_2\psi_2 \ \& \ -\varphi_1 \sim -\varphi_2)$$

5) Les lleis formals de la suma i el producte

3.7. Definició. Per $\psi(\underline{x}) \equiv \bar{r}(\underline{x}) - \bar{s}(\underline{x})/\bar{t}(\underline{x})$, on $\bar{r}$, $\bar{s}$ i $\bar{t}$ són pseudoperadors de grau 1, posem $(\exists\psi)$ com abreviatura de $(\exists \bar{r}, \bar{s}, \bar{t})$. Aleshores definim

$$\varphi(\underline{x}) \text{ és invertible } \equiv (\exists\psi)[\psi \in R \ \& \ \varphi(\underline{x})\cdot\psi(\underline{x}) \sim 1/1]$$

3.8. Proposició. Recordem la definició de φ^{-1}. Aleshores, per cada φ,

$$: (\varphi \in R \ \& \ \varphi^{-1} \in R) \models (\varphi \text{ és invertible } \& \ \varphi\cdot\varphi^{-1} \sim 1/1)$$

3.9. Nota. No tenim una dicotomia que afirmi que cada real hagi de ser invertible o equivalent a zero. Al respecte es pot veure la observació 3.13, més endavant.

3.10. Definició. φ és no negatiu $\equiv \varphi \gtrsim 0 \equiv 0 \lesssim \varphi$

$$\equiv (\exists \bar{m})[\bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ (\forall \underline{n},\underline{r})[0/1 \leqslant \varphi(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})+1/\underline{n}]]$$

3.11. Definició. φ és negatiu $\equiv \varphi \lessdot 0 \equiv 0 \gtrdot \varphi$

$$\equiv (\exists \bar{m},\underline{n})(\forall \underline{s})[\bar{m}(\underline{s}) \in N \ \& \ 0/1 > \varphi(\underline{s}+\bar{m}(\underline{s}))+1/\underline{n}]$$

3.12. Definició.

$$\varphi \lesssim \psi \equiv \psi \gtrsim \varphi \equiv 0 \lesssim \psi-\varphi$$

$$\varphi \lessdot \psi \equiv \psi \gtrdot \varphi \equiv \varphi-\psi \lessdot 0$$

3.13. Observació sobre la tricotomia. No tenim una tricotomia de l'estil "si φ és un real, $\varphi \lessdot 0$, $\varphi \sim 0$ ó $\varphi \gtrdot 0$" ni dicotomies "si φ és real, $\varphi \lessdot 0$ ó $\varphi \gtrsim 0$" o "si φ és real, $\varphi \gtrdot 0$ ó $\varphi \lesssim 0$". Tenim, però, succedanis d'aquestes afirmacions. Un exemple, que no usarem, és:

Proposició. Per cada φ,

$$: \varphi \in R \models (\exists \underline{s})[(\underline{s}=0 \vee \underline{s}=1) \ \& \ (\underline{s}=1 \models \varphi \lessdot 0) \ \& \ (\varphi \lessdot 0 \models \underline{s}=1)$$
$$\& \ (s=0 \models \varphi \gtrsim 0) \ \& \ (\varphi \gtrsim 0 \models s=0)]$$

La demostració és com segueix:

Suposem que $\bar{V}: \varphi \in R$, on $\varphi \equiv \underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$, $\underline{f} \in N_{\bar{V}}(\underline{x})$, $\underline{g} \in N_{\bar{V}}(\underline{x})$, $\underline{h} \in N_{\bar{V}}(\underline{x})$. Considerem l'expressió

$$0/1 \leqslant \varphi(\underline{y}+\underline{z})+1/\underline{x}$$

y recordem que, segons les definicions de la secció 2, aquesta expressió no és res més que la representació d'una certa fòrmula $\underline{k}=0$, on $\underline{k} \in N_{\bar{V}}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$. Això és,

$$0/1 \leqslant \varphi(\underline{y}+\underline{z})+1/\underline{x} \equiv \underline{k}=0$$

i, per qualssevol termes $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,

$$0/1 \leqslant \varphi(\underline{b}+\underline{c})+1/\underline{a} \equiv \underline{k}|(\underline{x},\underline{a})|(\underline{y},\underline{b})|(\underline{z},\underline{c})=0$$

D'acord amb PR.2, podem obtenir una extensió $\bar{V}_1$ de $\bar{V}$ en la que, per algún operador $\bar{f}_1$ tinguem

$$\bar{V}_1: (\forall\underline{x},\underline{y},\underline{z})[\bar{f}_1(\underline{x},\underline{y},\underline{z})=1\dot{-}\underline{k}]$$

$$\bar{V}_1: (\forall\underline{x},\underline{y})[E\bar{f}_1(\underline{x},\underline{y}) \in N \ \& \ (E\bar{f}_1(\underline{x},\underline{y})=0 \vee E\bar{f}_1(\underline{x},\underline{y})=1)]$$

En una certa extensió $\bar{V}_2$ de $\bar{V}_1$ tindrem, de la mateixa manera, per un cert $\bar{f}_2$,

$$\bar{V}_2: (\forall\underline{x},\underline{y})[\bar{f}_2(\underline{x},\underline{y})=E\bar{f}_1(\underline{x},\underline{y})]$$

$$\bar{V}_2: (\forall\underline{x})[E\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ (E\bar{f}_2(\underline{x})=0 \vee E\bar{f}_2(\underline{x})=1)]$$

De la mateixa manera, en una certa extensió $\bar{V}_3$ de $\bar{V}_2$ i per un cert $\bar{f}_3$,

$\bar{V}_3: (\forall\underline{x})[\bar{f}_3(\underline{x})=E\bar{f}_2(\underline{x})]$

$\bar{V}_3: E\bar{f}_3 \in N \ \& \ (E\bar{f}_3=0 \vee E\bar{f}_3=1)$

Fem

$$\underline{s} \equiv E\bar{f}_3$$

Tenim $\bar{V}_3 \vdash \underline{s}=0 \vee \underline{s}=1$.

Hem de demostrar ara

1) $\bar{V}_3: \underline{s}=1 \models \varphi \angle 0$

2) $\bar{V}_3: \underline{s}=0 \models \varphi \gtrapprox 0$

3) $\bar{V}_3: \varphi \not\angle 0 \models \underline{s}=1$

4) $\bar{V}_3: \varphi \gtrapprox 0 \models \underline{s}=0$

Suposem que $\bar{V}_3 \vdash s=1$. Això vol dir que $\bar{V}_3 \vdash E\bar{f}_3=1$, i que, per tant, segons els metateorema de minimització,

$$\bar{V}_3: M\bar{f}_3 \in N, \ \text{ i } \ \bar{V}_3 \vdash \bar{f}_3(M\bar{f}_3)=0, \ \text{ d'on } \ \bar{V}_3 \vdash E\bar{f}_2(M\bar{f}_3)=0,$$

que implica, per el postulat (IV) de PR.2 relatiu a $\tilde{f}_2$, que

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[\neg \bar{f}_2(M\bar{f}_3,\underline{y})=0\ ]$$

i, en conseqüència,

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[\neg E\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y})=0\ ]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[E\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y})=1]$$

i, per el metateorema de minimització,

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y}) \in N \ \& \ \bar{f}(M\bar{f}_3,\underline{y},\ M\bar{f}_1(M\bar{f}_2,\underline{y}))=0],$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y}) \in N \ \& \ \neg \underline{k}|(\underline{x},M\bar{f}_3)|(\underline{z},M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y}))=0]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{y})[M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,y) \in N \ \& \ 0/1 > \varphi(\underline{y}+M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,\underline{y}))+1/M\bar{f}_3]$$

Fem, per alguna extensió $\bar{V}_4$ de $\bar{V}_3$, que

$$\bar{V}_4 \ : (\forall \underline{y})[\bar{m}(\underline{y})=M\bar{f}_1(M\bar{f}_3,y)],$$

i fem també $\underline{n} \equiv M\tilde{f}_2$. Hem demostrat que

$$\bar{V}_4 : (\exists \bar{m},\underline{n})(\forall \underline{y})[\bar{m}(\underline{y}) \in N \ \& \ 0/1 > \varphi(\underline{y}+\bar{m}(y))+1/\underline{n}],$$

això és, que $\bar{V}_3 : \varphi \not< 0$; i això demostra (1).

Suposem ara que $\bar{V}_3 \vdash \underline{s}=0$. Això vol dir que $\bar{V}_3 \vdash E\bar{f}_3=0$ i que, segons el postulat (IV) per $\bar{f}_3$, $\bar{V}_3 : (\forall \underline{x})[\neg \bar{f}_3(\underline{x})=0]$, d'on $\bar{V}_3 : (\forall \underline{x})[E\bar{f}_2(\underline{x})=1]$ i, per el metateorema de minimització,

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{x})[M\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ \bar{f}_2(\underline{x},M\bar{f}_2(\underline{x}))=0]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{x})[M\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ E\bar{f}_1(\underline{x},M\bar{f}_2(\underline{x}))=0]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{x},\underline{z})[M\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ \neg \bar{f}_1(\underline{x},M\bar{f}_2(\underline{x})=\underline{z})=0]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{x},\underline{z})[M\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ \underline{k}|(\underline{y},M\bar{f}_2(\underline{x})) = 0]$$

$$\bar{V}_3 : (\forall \underline{x},\underline{z})[M\bar{f}_2(\underline{x}) \in N \ \& \ 0/1 \leqslant \varphi(M\bar{f}_2(\underline{x})+\underline{z})+1/\underline{x}]$$

Si fem, en algun $\bar{V}_4'$ extensió de $\bar{V}_3$, que, per un cert $\bar{m}$,

$$\bar{V}_4': (\forall \underline{x})[\bar{m}(\underline{x})=M\bar{f}_2(\underline{x})],$$

haurem demostrat que $\bar{V}_4': \varphi \geqslant 0$; i això demostra (2).

Suposem ara que $\bar{V}_3: \varphi \not< 0$, que vol dir que per un cert terme $\underline{n}$ i una certa $\bar{m}(t) \in N_{\bar{V}_3}(t)$, tenim

$$\bar{V}_3: (\forall t)[0/1 > \varphi(\underline{t}+\bar{m}(\underline{t}))+1/\bar{n}],$$

això és,

$\bar{V}_3 \vdash \bar{f}_1(\underline{n}, \underline{t}, \bar{m}(\underline{t}))=0$ per cada numeral $\underline{t}$, d'on, per (IV),

$$\bar{V}_3 \vdash E\bar{f}_1(\underline{n},\underline{t})=1 \text{ per cada numeral } \underline{t}$$

(A) $$\bar{V}_3 \vdash \neg\bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=0 \text{ per cada numeral } \underline{t}$$

En aquest moment tenim un pas delicat, en el que afirmem que d'aquesta afirmació (A) podem concloure que

(B) $$\bar{V}_2 \vdash \neg\bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=0 \text{ per cada numeral } \underline{t}$$

Per no perdre el fil de la demostració deixarem la justificació del pas de (A) a (B) per una mica més endavant.

Tenim ara, de (B), per PR.3, un segment $\bar{V}_2'$ extensió de $\bar{V}_2$ que s'obté d'aquest en afegir el postulat $\neg E\bar{f}_2(\underline{n})=1$. És adir que tenim

$$\bar{V}_2' \vdash E\bar{f}_2(\underline{n})=0$$

Recordem ara que hem passat de $\bar{V}_2$ a $\bar{V}_3$ afegint uns postulats (I)-(VII), d'acord amb PR.2, que ens han permès introduir una nova notació, $\bar{f}_3(x)$, per $E\bar{f}_2(\underline{x})$. Observem que PR.2 permet afegir exactament els mateixos postulats a $\bar{V}_2'$, obtenint així un nou segment $\bar{V}_2''$ que és, al mateix temps, extensió de $\bar{V}_2'$ i de $\bar{V}_3$, i en el qual tenim

$$\bar{V}_2'' \vdash \bar{f}_3(\underline{n})=E\bar{f}_2(\underline{n})$$

Per tant,

$$\bar{V}_2'' \vdash \bar{f}_3(\underline{n})=0$$

i, per (IV) (relatiu a $\bar{f}_3$),

$$\bar{V}_2'' \vdash E\bar{f}_3=1$$

$$\bar{V}_2'' \vdash \underline{s}=1$$

i, como que ja hem observat que $\bar{V}_2'' \succ \bar{V}_3$, això demostra (3), excepte per que ens falta veure com podem passar de (A) a (B), que és el que ara farem. Observem, per començar, que, com que $\bar{f}_2(\underline{x},\underline{y})$ només pot prendre els valors 0 i 1, (A) i (B) equivalen a

(A') $\bar{V}_3 \vdash \bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$ per cada numeral $\underline{t}$

(B') $\bar{V}_2 \vdash \bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$ per cada numeral $\underline{t}$

Considerem qualsevol numeral $\underline{t}$. Segons (A'), $\bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$ és un teorema en $\bar{V}_3$, i volem demostrar que també ho és en $\bar{V}_2$. Suposem que C és una col.lecció finita de postulats de $\bar{V}_3$ tal que

$$C \vdash \bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$$

Sigui C' el conjunt de membres de C que també són postulats de $\bar{V}_2$. Si suposem que $\bar{f}_2(n,t)=1$ no és teorema de $\bar{V}_2$ hi ha d'haver una valoració lògica que sigui compatible amb C' i no amb aquesta fòrmula. Podem modificar aquesta valoració fent que valgui $\underline{\bar{F}}$ (fals) en qualsevol fòrmula atòmica $\underline{a}=\underline{b}$ que no aparegui en cap membre de C', i aquesta valoració, que denotarem G, continuarà essent compatible amb C' i no amb $\bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$. Veurem ara que G es pot "estendre" a una valoració G' compatible amb C i no amb $\bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$, cosa que dóna una contradicció, ja que $C \vdash \bar{f}_2(\underline{n},\underline{t})=1$. Que G' sigui "extensió" de G voldrá dir que $G'(\underline{a}=\underline{b}) \equiv \underline{\bar{V}}$ (veritat) sempre que $G(\underline{a}=\underline{b}) \equiv \underline{\bar{V}}$. Aquesta G' es pot construir a partir de G per passos, fent primer que G sigui compatible amb els casos de (I) que pertanyen a C i no a C', després amb els de (II), etc.

Demostrarem ara (4). Suposem que $\bar{V} : \varphi \gtrsim 0$, que vol dir, per un cert operador $\bar{m}$, que

$$\bar{V}_3 \vdash \bar{f}_1(\underline{n},\bar{m}(\underline{n}),\underline{r})=1 \quad \text{per tots els numerals } \underline{n} \text{ i } \underline{r}$$

De manera semblant a com hem passat de (A) a (B), tenim

$$\bar{V}_1 \vdash \bar{f}_1(\underline{n},\bar{m}(\underline{n}),\underline{r})=1 \quad \text{per tots els numerals } \underline{n} \text{ i } \underline{r}$$

Per PR.3 tenim ara un segment $\bar{V}_1'$ extensió de $\bar{V}_1$ tal que

$$\bar{V}_1' \vdash E\bar{f}_1(\underline{n},\bar{m}(\underline{n}))=0 \quad \text{per cada numeral } \underline{n}$$

Adjuntem ara a $\bar{V}_1'$, per PR.2, exactament els mateixos postulats que hem adjuntat a $\bar{V}_1$ per passar a $\bar{V}_2$, i al nou segment així obtingut adjuntem-li els mateixos postulats que hem adjuntat a $\bar{V}_2$ per obtenir $\bar{V}_3$. Obtindrem així un segment $\bar{V}_1''$ que és extensió de $\bar{V}_1'$ i de $\bar{V}_3$, i tal que

$$\bar{V}_1'' \vdash \bar{f}_2(\underline{n},\bar{m}(\underline{n}))=0 \quad \text{per cada numeral } \underline{n}$$

$$\bar{V}_1'' \vdash E\bar{f}_2(\underline{n})=1 \quad \text{per cada numeral } \underline{n}$$

$$\bar{V}_1'' \vdash \neg\bar{f}_3(\underline{n})=0 \quad \text{per cada numeral } \underline{n}$$

Tenim, ara, per PR.3, una extensió $\bar{V}_1'''$ de $\bar{V}_1''$ (i, per tant, també de $\bar{V}_3$) tal que

$$\bar{V}''' \vdash E\bar{f}=0$$

$$\bar{V}''' \vdash \underline{s}=0,$$

tal com havíem de demostrar .

4. Successions de reals

Si en $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$ no apareixen altres variables que $\underline{x}$, $\underline{y}$, usarem expressions tals com $\chi(\underline{x},\underline{y})$ per a representar $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$. Si

$$\chi(\underline{x},\underline{y}) \equiv \underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$$

convenim, per qualssevol neotermes $\underline{s},\underline{t}$, en que

$$\chi_{\underline{s}}(\underline{t}) \equiv \chi(\underline{x},\underline{t}) \equiv (\underline{f}|(\underline{x},\underline{s})|(\underline{y},\underline{t}))-(\underline{g}|(\underline{x},\underline{s})|(\underline{y},\underline{t}))/(\underline{h}|(\underline{x},\underline{s})|(\underline{y},\underline{t}))$$

Ometrem la $\underline{x}$, o la $\underline{x}$ i la $\underline{y}$, quan convingui i no causi confusió. Frequentment serà un sobreentès que $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$ són termes (i no neotermes qualssevol).

4.1 Definició.

$$\chi_{\underline{x}} \text{ és una successio de reals } \equiv \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \in S_{\underline{x}}R(\underline{y}) \equiv \chi_{\underline{x}} \in S_{\underline{x}}R$$

$$\equiv (\exists\bar{m})\ \bar{m}(\underline{x},\underline{y}) \in N(\underline{x},\underline{y})\ \&\ (\forall\underline{s},\underline{n},\underline{r})[\,|\chi_{\underline{s}}(\bar{m}(\underline{s},\underline{n})+\underline{r})-\chi_{\underline{s}}(\bar{m}(\underline{s},\underline{n}))| < 1/\underline{n}]$$

(de manera que, per cada numeral $\underline{s}$, $\chi_{\underline{s}}(\underline{y})$ és un real, però la funció $\bar{m}(\underline{s},\underline{n})$ que l'exhibeix com a tal ha de ser donada al mateix temps per tots el $\underline{s}$. El que volem és evitar un $\exists$ en l'àmbit d'un $\forall$, cosa que causaria dificultats tècniques)

4.2 Definició. $\chi_x(y)$ és una successió de Cauchy de reals

$$\equiv \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \in CS_{\underline{x}}R(\underline{y}) \equiv \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \in S_{\underline{x}}R(\underline{y})\ \&\ (\exists\bar{m},\bar{k})[\bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x})$$

$$\&\ \bar{k}(\underline{x},\underline{y}) \in N(\underline{x},\underline{y})\ \&\ (\forall\underline{n},\underline{r},\underline{s})[\,|\chi_{\bar{m}(\underline{n})+\underline{r}}(\bar{k}(\underline{n},\underline{r})+\underline{s}) - \chi_{\bar{m}(\underline{n})}(\bar{k}(\underline{n},0))| < 1/\underline{n}]]$$

4.3 Definició

la successió $\chi_{\underline{x}}$ convergeix a $\varphi \equiv \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \xrightarrow[\underline{x}\to\infty]{} \varphi(\underline{y}) \equiv$

$$\equiv \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \in S_{\underline{x}}R(\underline{y})\ \&\ \varphi(\underline{y}) \in R(\underline{y})\ \&\ (\exists\bar{m},\bar{k},\bar{u})[\bar{m}(\underline{x} \in N(\underline{x})\ \&\ \bar{k}(\underline{x},\underline{y}) \in N(\underline{x},\underline{y})$$

$$\&\ \bar{u}(\underline{x}) \in N(\underline{x})\ \&\ (\forall\underline{n},\underline{r},\underline{s},\underline{t})[\,|\chi_{\bar{m}(\underline{n})+\underline{r}}(\bar{k}(\bar{n},\underline{r})+\underline{s})-\varphi(\bar{u}(\underline{n}))+\underline{t})| < 1/\underline{n}]]$$

4.4 <u>Proposició</u>. Cada successió de Cauchy de reals convergeix a un real. Això és, per cada $\chi(\underline{x},\underline{y})$,

$$: \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \in CS_{\underline{x}}R(\underline{y}) \models$$

$$(\exists\bar{r},\bar{s},\bar{t})[\bar{r}(y)-\bar{s}(y)/\bar{t}(y) \in R(y) \ \& \ \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \xrightarrow[\underline{x}\to\infty]{} \bar{r}(\underline{y})-\bar{s}(\underline{y})/\bar{t}(\underline{y})]$$

Efectivament, si $\tilde{V}$: $\chi_x(y) \in CS_x R(y)$ usem tres vegades PR.2 per obtenir una extensió $\bar{W}'$ de $\bar{V}$ en la qual, per certs operadors $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$,

$$\bar{W}': (\forall t)[\bar{r}(\underline{t})-\bar{s}(\underline{t})/\bar{t}(\underline{t})=\chi_{\bar{m}(\underline{t})}(\bar{k}(\underline{t},0))]$$

on $\bar{k}$ és l'operador de 4.2, i aleshores tindrem, per alguna extensió $\bar{W}$ de $\bar{W}'$,

$$\bar{W}: \chi_{\underline{x}}(\underline{y}) \xrightarrow[\underline{x}\to\infty]{} \bar{r}(\underline{y})-\bar{s}(\underline{y})/\bar{t}(\underline{y})$$

L'única dificultat pot ser la traducció a l'argot de la demostració obvia.

4.5 <u>Definició</u>. $\bar{q}(\underline{x})$ és una funció estrictament creixent de $\underline{x}$

$$\equiv \bar{q}(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ (\forall\underline{n})[\bar{q}(\underline{n}) < \bar{q}(\underline{n}+1)]$$

4.6 <u>Definició.</u> $\chi(\bar{q}(\underline{x}),\underline{y})$ és una subsuccesió de $\chi(\underline{x},\underline{y})$

$\equiv \chi(\underline{x},\underline{y}) \in S_{\underline{x}}R(\underline{y})$ & $\bar{q}(\underline{x})$ és una funció estrictament creixent de $\underline{x}$.

4.7 <u>Definició</u>.

la successió $\chi(x,y)$ de reals està continguda en l'interval $[\varphi_1 \ \ \varphi_2]$

$$\equiv \chi(\underline{x},\underline{y}) \subset [\varphi_1,\varphi_2] \equiv \chi(\underline{x},\underline{y}) \in S_{\underline{x}}R(\underline{y}) \ \& \ \varphi_1 \in R \ \& \ \varphi_2 \in R$$

$$\& \ (\exists\bar{m}_1,\bar{m}_2)[\bar{m}_1(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ \bar{m}_2(\underline{x}) \in N(\underline{x}) \ \& \ (\forall\underline{s},\underline{n},\underline{r})[0/1 \leqslant$$

$$(\chi_{\underline{s}}(\bar{m}_1(\underline{n})+\underline{r})-\varphi_1(\bar{m}_1(\underline{n})+\underline{r}))+1/\underline{n} \ \& \ 0/1 \leqslant (\varphi_2(\bar{m}_2(\underline{n})+\underline{r})-\chi_2(\bar{m}_2(\underline{n})+\underline{r})+1/\underline{n}]]$$

(Aqui estem demanant $\varphi_1 \lesssim \chi_{\underline{s}}$ i $\chi_{\underline{s}} \lesssim \varphi_2$ per cada $\underline{s}$, però ho fem d'una manera "uniforme", de manera semblant a com hem procedit a 4.1, i per la mateixa raó).

4.8. Proposició (teorema de Bolzano-Weierstrass). Cada successió $\chi_{\underline{x}}(\underline{y})$ de reals continguda en un intèrval $[\varphi_1 , \varphi_2]$ té una subsuccessió que convergeix a algun real. Més precisament, per qualssevol $\chi, \varphi_1, \varphi_2$,

$$: \chi(\underline{x},\underline{y}) \subset [\varphi_1 , \varphi_2] \models (\exists\bar{q},\bar{r},\bar{s},\bar{t})\big[\bar{q}(\underline{x}) \text{ és una funció de } \underline{x} \text{ estrictament creixent } \& \ \bar{r}(x)-\bar{s}(\underline{x})/\bar{t}(\underline{x}) \in R(\underline{x}) \ \& \ \chi(\bar{q}(\underline{x}),\underline{y}) \xrightarrow[\underline{x}\to\infty]{} \bar{r}(\underline{x})-\bar{s}(\underline{x})/\bar{t}(\underline{x})\big]$$

La demostració de la proposició depèn del següent lema:

Lema. Per qualssevol $\varphi(\underline{x}), \underline{r}_1, \underline{s}_1, \underline{t}_1, \underline{r}_2, \underline{s}_2, \underline{t}_2$,

$$: [\varphi(\underline{x}) \in Q(\underline{x}) \ \& \ \neg\underline{t}_1{=}0 \ \& \ \neg\underline{t}_2{=}0 \ \& \ (\forall\underline{n})[\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1 < \varphi(\underline{n}) \ \& \ \varphi(\underline{n}) < \underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2]] \models (\exists\bar{q})[\bar{q}(\underline{x}) \text{ és una funció estrictament creixent de } \underline{x} \ \& \ \varphi(\bar{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})].$$

Suposem demostrat el lema i suposem que $V{:}\ \chi(\underline{x},\underline{y}) \in [\varphi_1 , \varphi_2]$. Si $\bar{m}(\underline{u},\underline{v})$ és com a 4.1., prenem $\varphi(\underline{x}) \equiv \chi(\underline{x}, \bar{m}(\underline{x},\underline{x}))$. Es fàcil trobar $\underline{r}_1, \underline{s}_1, \underline{t}_1, \underline{r}_2, \underline{s}_2, \underline{t}_2$ que satisfacin les condicions del lema per $\bar{V}$. Aleshores, si, d'acord amb el lema, tenim una extensió $\bar{W}$ de $\bar{V}$ i un $\bar{q}$ tal que $\bar{q}(\underline{x})$ és estrictament creixent i $\varphi(\bar{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})$, és fàcil demostrar que la successió $\chi(\bar{q}(\underline{x}),\underline{y})$ convergeix a $\varphi(\bar{q}(\underline{x}))$, demostrant així la proposició.

Aquesta proposició és la primera afirmació que trobem que és certa en anàlisi formalment recursiva i no ho és en anàlisi recursiva. De manera que no ens ha d'extranyar que la demostració del lema, del qual la proposició depèn, no sigui tan senzilla com la de les proposicions anteriors.

Ara demostrarem el lema

Suposem

$$\bar{V}{:}\varphi(\underline{x}) \in Q(\underline{x}) \ \& \ \neg\underline{t}_1{=}0 \ \& \ \neg\underline{t}_2{=}0 \ \& \ (\forall\underline{n})[\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1 < \varphi(\underline{n}) \ \& \ \varphi(\underline{n}) < \underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2]$$

Estenem el segment $\bar{V}$ a un segment $\bar{V}_1$ en el qual tinguem, per un cert e, que

$$\bar{V}_1 : \underline{e} \in N(\underline{x}) \ \& \ \underline{e}|(\underline{x},0)=S(0) \ \& \ (\forall\underline{x})[\underline{e}|(\underline{x},S(\underline{x}))=2.\underline{e}]$$

Usem la notació $2^{\underline{x}} \equiv \underline{e}$, i també $2^{\underline{t}} \equiv \underline{e}|(\underline{x},\underline{t})$, per cada neoterme $\underline{t}$.

Si recordem les definicions de la secció 2 serà clar que podem estendre $\bar{V}_1$, d'acord amb PR.2, a un segment $\bar{V}_2$ en el qual, per un cert $\bar{f}$, tindrem

(1) $\bar{V}_2 : (\forall\underline{n},\underline{s},\underline{m},\underline{r})[\,(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1)+(s/2^{\underline{n}})\cdot((\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2)-(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1))$
$< \varphi(\underline{m}+\underline{r}) \Leftrightarrow \bar{f}(\underline{n},\underline{s},\underline{m},\underline{r})=0]$

Com que $\bar{V}_2 : (\forall\underline{r})[\varphi(\underline{r}) < \underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2$, tenim

(2) $\bar{V}_2 : (\forall\underline{n},\underline{r})[\neg\bar{f}(\underline{n},2^{\underline{n}},0,\underline{r})=0]$

Aleshores postulem d'acord amb PR.3,

(3) $\bar{V}_3 : (\forall\underline{n})[E\bar{f}(\underline{n},2^{\underline{n}},0)]$,

on $\bar{V}_3$ és algun segment extensió de $\bar{V}_2$.

Per PR.2 tenim aleshores alguna extensió $\bar{V}_4$ de $\bar{V}_3$ i un $\bar{g}$ tals que

(4) $\bar{V}_4 : (\forall\underline{n},\underline{s},\underline{m})[\bar{g}(\underline{n},\underline{s},\underline{m})=E\bar{f}(\underline{n},\underline{s},\underline{m})]$,

d'on

(5) $\bar{V}_4 : (\forall\underline{n})[\bar{g}(\underline{n},2^{\underline{n}},0)=0]$

i, per algun postulat de tipus (IV) de $\bar{V}_4$,

(6) $\bar{V}_4 : (\forall\underline{n})[E\bar{g}(\underline{n},2^{\underline{n}})=1]$

Novament per PR.2 tenim alguna extensió $\bar{V}_5$ de $\bar{V}_4$ i un $\bar{h}$ tals que

(7) $\bar{V}_5 : (\forall\underline{n},\underline{s})[\bar{h}(\underline{n},\underline{s})=1\dot{-}E\bar{g}(\underline{n},\underline{s})]$,

d'on

(8) $\bar{V}_5 : (\forall\underline{n})[\bar{h}(\underline{n},2^{\underline{n}})=0]$

i, una altra vegada per un postulat (IV),

(9) $\bar{V}_5 : (\forall\underline{n})[E\bar{h}(\underline{n})=1]$,

64

d'on, per el metateorema de minimització

(10) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[M\bar{h}(\underline{n}) \in N \ \& \ \bar{h}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))=0]$

Per (7), aleshores

(11) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[E\bar{g}(\underline{h},M\bar{h}(\underline{n}))=1]$,

d'on, novament per el metateorema de minimització,

(12) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})) \in N \ \& \ \bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}),M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))=0]$

Per (4)

(13) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[E\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}), M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})))=0]$,

d'on, per algun postulat (IV),

(14) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n},\underline{r})[\neg\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}),M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})),\underline{r})=0]$

Observem que $\bar{V}_2 : (\forall \underline{n},\underline{t},\underline{u})[\bar{f}(\underline{n},0,\underline{t},\underline{u})=0]$ de manera que, per (14), $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[\neg M\bar{h}(\underline{n})=0]$, d'on, per una propietat de $\dot{-}$,

(15) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[M\bar{h}(\underline{n})=(M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1)+1]$

De (10) i el postulat (VII) convenient,

(16) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[\neg\bar{h}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1)=0]$,

d'on, per (7),

(17) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n})[E\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1)=0]$,

i, per algun postulat (IV)

(18) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n},\underline{m})[\neg\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1,\underline{m})=0]$

d'on, per (4),

(19) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n},\underline{m})[E\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1,\underline{m})=1]$

d'on, per el metateorema de minimització,

(20) $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n},\underline{m})[M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1,\underline{m}) \in N \ \& \ \bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1,\underline{m},M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1,\underline{m}))=0]$

L'afirmació (14) i la segona part de (20) signifiquen, respectivament,

(14') $\bar{V}_5 : (\forall \underline{n},\underline{r})[(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1)+(M\bar{h}(\underline{n}))/2^{\underline{n}}\cdot((\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2)-(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1))$
$\geqslant \varphi(M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))+\underline{r})]$

(20') $\bar{V}_5$: $(\forall \underline{n},\underline{m})[\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1)+((M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1)/2^{\underline{n}})\cdot((\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2)-(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1))$
$$< \varphi(\underline{m}+M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,\underline{m}))]$$

Si prenem $M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})))+\underline{n}$ per $\underline{r}$ i $M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))+\underline{n}$ per $\underline{m}$ tindrem

(21) $\bar{V}_5$: $(\forall \underline{n})[(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1)+((M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1)/2^{\underline{n}})\cdot((\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2)-(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1))$
$$< \varphi(\underline{n}+M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))+M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,\ M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))))]$$

(22) $\bar{V}_5$: $(\forall \underline{n})[\varphi(\underline{n}+M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))+M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))))$
$$\leqslant (\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1)+(M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}})\cdot((\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2)-(\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1))]$$

Tenim, en alguna extensió $\bar{V}_6$ de $\bar{V}_5$, i per algun $\bar{k}$,

(23) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n})[\bar{k}(\underline{n})=\underline{n}+M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n}))+M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,M\bar{g}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})))]$

així que, si fem $\alpha\equiv\underline{r}_1-\underline{s}_1/\underline{t}_1$, $\beta\equiv\underline{r}_2-\underline{s}_2/\underline{t}_2$, tindrem, per (21) i (22),

(24) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n})[\alpha+((M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1)/2^{\underline{n}})\cdot(\beta-\alpha) < \varphi(\bar{k}(\underline{n}))$
$$\& \ \varphi(\bar{k}(\underline{n}) \leqslant \alpha+(M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}})\cdot(\beta-\alpha)]$$

Ara afirmem que

(25) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n})[(M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1)/2^{\underline{n}} \leqslant (M\bar{h}(\underline{n}+1)\dot{-}1)/2^{\underline{n}+1}]$

(això és, $(\forall \underline{n})[2M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}2 \leqslant M\bar{h}(\underline{n}+1)\dot{-}1]$)

En efecte, observem que $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n})[(2M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}2)/2^{\underline{n}+1}=(M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1)/2^{\underline{n}}]$ i tenim, per (20') i (1),

(26) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n},\underline{m})[\bar{f}(\underline{n}+1,2M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}2,\underline{m},M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,\underline{m}))=0]$

Però de (14), per $\underline{n}+1$ en lloc de $\underline{n}$,

(27) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n},\underline{r})[\neg\bar{f}(\underline{n}+1),M\bar{h}(\underline{n}+1),M\bar{g}(\underline{n}+1,M\bar{h}(\underline{n}+1)),\underline{r}=0]$

Per $Mg(n+1),Mh(n+1))$ en lloc de $\underline{m}$ en (26) i

$M\bar{f}(\underline{n},M\bar{h}(\underline{n})\dot{-}1,M\bar{g}(\underline{n}+1,M\bar{h}(\underline{n}+1)))$ en lloc de $\underline{r}$ en (27) tenim

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ \bar{f}(\underline{n}+1, 2M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 2, M\bar{g}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1)),$$

$$M\bar{f}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1)))) = 0]$$

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ \neg \bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1), M\bar{g}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1)),$$

$$M\bar{f}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1)))) = 0\ ],$$

així que

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ M\bar{h}(\underline{n}+1) > 2M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 2],$$

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1 \geqslant 2M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 2],$$

que demostra (25).

També afirmem que

(28) $\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ M\bar{h}(\underline{n}+1/2^{\underline{n}+1} \leqslant M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}}\ ]$

(aixo és, $\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ M\bar{h}(\underline{n}+1) \leqslant 2M\bar{h}(\underline{n})]$).

En efecte, tenim de (14), amb un petit abús de notación,

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n}, \underline{r})[\ 2M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}+1} = M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}} \geqslant \varphi(M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})) + \underline{r})\ ],$$

d'on

(29) $\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n}, \underline{r})[\neg \bar{f}(\underline{n}+1, 2M\bar{h}(\underline{n}), M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})), \underline{r}) = 0]$

Pero d'acord amb (20), per $\underline{n}+1$ en lloc de $\underline{n}$,

(30) $\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n}, \underline{m})[\ f(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, \underline{m}, M\bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, \underline{m})) = 0]$

Si prenem, a (29) i a (30), $M\bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})))$ per $\underline{r}$ i $M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}))$ per $\underline{m}$, tenim

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\neg \bar{f}(\underline{n}+1, 2M\bar{h}(\underline{n}), M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})),$$

$$M\bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})))) = 0],$$

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ \bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})),$$

$$M\bar{f}(\underline{n}+1, M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1, M\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n})))) = 0\ ],$$

així que

$$\bar{V}_6 : \ (\forall \underline{n})[\ 2M\bar{h}(\underline{n}) > M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1\ ]$$

$$\bar{V}_6 : \ (\forall n)[\ 2Mh(n) \geqslant Mh(n+1)],\ \text{(per (15))},$$

que demostra (28).

De (25) i (28) tenim, amb algun abús de notació,

(31) $\bar{V}_6$: $(\forall \underline{n})[\,(M\bar{h}(\underline{n}) \dot{-} 1)/2^{\underline{n}} \leqslant (M\bar{h}(\underline{n}+1) \dot{-} 1)/2^{\underline{n}+1} < M\bar{h}(\underline{n}+1)/2^{\underline{n}+1} \leqslant M\bar{h}(\underline{n})/2^{\underline{n}}]$

Finalment, és fàcil veure que existeix, en alguna extensió $\bar{W}$ de $\bar{V}_6$, un $\bar{r}(\underline{x})$ i un $\bar{q}$ tal que

$\bar{W}$: $(\forall \underline{n})[\,\bar{q}(\underline{n})=\bar{k}(\bar{r}(\underline{n}))]$ i $\bar{q}(\underline{x})$ és estrictament creixent.

I aleshores de (24) i (31) demostrem fàcilment que $\varphi(\bar{q}(\underline{x}))$ és un real, en alguna extensió de $\bar{W}$, que és el que havíem de demostrar.

5. Funcions

5.1 Definició. Fem que $(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h})\,|\,(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z},\ \underline{x}'-\underline{y}'/\underline{z}')$ representi el resultat de posar $\underline{x}',\underline{y}'$ i $\underline{z}'$ en lloc de $\underline{x}$, y, i $\underline{z}$, respectivament, a $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$. Definim

$$\underline{f}-\underline{g}/\underline{h} \in Q(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z}) \equiv f \in N(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \ \& \ g \in N(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$$

$$\& \ \underline{h} \in N(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \ \& \ (\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z})[\neg \underline{h}=0]$$

$$\& \ (\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z},\underline{x}'\underline{y}',\underline{z}')[\neg \underline{z}=0 \wedge \neg \underline{z}'=0 \wedge \underline{x}-\underline{y}/\underline{z}=\underline{x}'-\underline{y}'/\underline{z}'$$

$$\Rightarrow \underline{f}-\underline{g}/\underline{h}=(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h})\,|\,(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z},\underline{x}'-\underline{y}'/\underline{z}')]$$

Usarem expressions de la mena $\Phi(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z})$ per representar expressions $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$, per neotermes $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ en els quals no apareixen altres variables que $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$. En les proposicions freqüentment suposarem tàcitament que $\underline{f}$, $\underline{g}$ i $\underline{h}$ són termes, depenent del context. Fem convencions tals com:

Si $\xi \equiv \underline{x}-\underline{y}/\underline{z}$, $\alpha \equiv \underline{a}-\underline{b}/\underline{c}$ i $\Phi(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z})$ $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}$, aleshores

$$\Phi(\xi) \equiv \Phi(\underline{x}-\underline{y}/\underline{z})$$

$$\Phi(\alpha) \equiv \Phi(\underline{a}-\underline{b}/\underline{c}) \equiv (\underline{f}-\underline{g}/\underline{h})\,|\,(\xi,\alpha)$$

Usarem abreviatures tals com posar $(\forall\alpha)$ en lloc de $(\forall \underline{a},\underline{b},\underline{c})$ o convenir en que $\bar{m}(\alpha,\underline{d}) \equiv \bar{m}(\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d})$, si $\alpha \equiv \underline{a}-\underline{b}/\underline{c}$. També, en aquest cas, posarem

$$\text{denom } \alpha \equiv \underline{c}$$

5.2 Definició. Sigui $\xi \equiv \underline{x}-\underline{y}/\underline{z}$. Definim

$\Phi(\xi)$ és uniformement contínua en conjunts afitats $\equiv \Phi(\xi) \in Q_C(\xi)$

$$\equiv \Phi(\xi) \in Q(\xi) \ \& \ (\exists \bar{m})[\bar{m}(\alpha,\beta,\underline{n}) \in N(\alpha,\beta,\underline{n}) \ \&$$

$$(\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta,\underline{n})[\neg \text{denom}\alpha=0 \wedge \neg\text{denom}\beta=0 \wedge \neg\text{denom}\gamma=0$$

$$\wedge \neg\text{denom}\delta=0 \wedge \alpha \leqslant \gamma \wedge \gamma \leqslant \beta \wedge \alpha \leqslant \delta \wedge \delta \leqslant \beta \wedge |\gamma-\delta| < 1/\bar{m}(\alpha,\beta,\underline{n})$$

$$\Rightarrow |\Phi(\gamma)-\Phi(\delta)| < 1/\underline{n}\ ]]$$

5.3 Observació. Cada element de $Q_C(\xi)$, que associa a cada $\underline{a} \in Q$ un element $\Phi(\underline{a}) \in Q$ pot ser "estès per continuitat" als reals. Més precisament.

5.4 Proposició. Per qualssevol Φ,φ,χ (en els que no apareixen pseudooperadors),

$$: \Phi(\xi) \in Q_C(\xi) \ \& \ \varphi(\underline{v}) \in R(\underline{v}) \ \& \ \chi(\underline{v}) \in R(\underline{v}) \ \& \ \varphi \sim \chi$$

$$\models \Phi(\varphi(\underline{v})) \in R(\underline{v}) \ \& \ \Phi(\chi(\underline{v})) \in R(\underline{v}) \ \& \ \Phi(\chi(\underline{v})) \sim \Phi(\varphi(\underline{v}))$$

5.5 Nota. Definirem les funcions contínues en un intèrval clos com les successions fonamentals (relatives a l'intèrval) d'elements de Q_C, de la mateixa manera com hem definit els reals, a 3.1, com successions fonamentals de racionals. Usarem notacions tals com

$$\psi(\underline{w},\xi) \equiv \psi(\underline{w},\underline{x}-\underline{y}/\underline{z}) \equiv \underline{p}-\underline{q}/\underline{r},$$

$$\psi_{\underline{n}}(\alpha) \equiv \psi(\underline{n},\alpha) \equiv (\underline{p}-\underline{q}/\underline{r})|(\underline{w},\underline{n})|(\xi,\alpha),$$

per qualsevol $\alpha \equiv \underline{a}-\underline{b}/\underline{c}$ i neotermes $\underline{n}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

5.6 Definició.

$\Psi(\underline{w},\xi)$ és una successió d'elements de $Q_C(\xi) \equiv (\forall \underline{m})[\Psi_{\underline{m}}(\xi) \in Q(\xi)]$ &

$$(\exists\bar{m})[\bar{m}(\underline{k},\alpha,\beta,\underline{n}) \in N(\underline{k},\alpha,\beta,\underline{n})\ \&$$

$$(\forall \underline{k},\alpha,\beta,\gamma,\delta,\underline{n})[\neg\text{denom}\alpha=0 \wedge \neg\text{denom}\beta=0 \wedge \neg\text{denom}\gamma=0 \wedge \neg\text{denom}\delta=0$$

$$\wedge\ \alpha \leqslant \gamma \wedge \gamma \leqslant \beta \wedge \alpha \leqslant \delta \wedge \delta \leqslant \beta \wedge |\gamma-\delta| < 1/\bar{m}(\underline{k},\alpha,\beta,\underline{n})$$

$$\Rightarrow |\Psi_{\underline{k}}(\gamma)-\Psi_{\underline{k}}(\delta)| < 1/\underline{n}]]$$

5.7 Definició. Sigui $I \equiv [\varphi,\chi]$. Aleshores definim

$\Phi(\underline{w},\xi)$ és una funció continua en $I \equiv \Phi(\underline{w},\xi) \in C_I(\xi)$

$\equiv \varphi \in R\ \&\ \chi \in R\ \&\ \Phi(\underline{w},\xi)$ és una successió d'elements de $Q_C(\xi)$ &

$$(\exists\varphi',\chi',\bar{m})[\varphi' \in R\ \&\ \chi' \in R\ \&\ \varphi'\sim\varphi\ \&\ \chi'\sim\chi\ \&\ \bar{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x})$$

$$\&\ (\forall\underline{n})[\varphi'(\underline{n}) \leqslant \varphi'(\underline{n}+1)\ \&\ \chi'(\underline{n}) \leqslant \chi'(\underline{n}+1)]\ \&\ (\forall\underline{n},\underline{r},\underline{a},\underline{b},\underline{c})[\neg\underline{c}=0$$

$$\wedge\ \varphi'(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r}) \leqslant \underline{a}-\underline{b}/\underline{c} \wedge \underline{a}-\underline{b}/\underline{e} \leqslant \chi'(\bar{m}(\underline{n})+\underline{r})$$

$$\Rightarrow |\Phi_{\bar{m}(\underline{n})+\underline{r}}(\underline{a}-\underline{b}/\underline{c})-\Phi_{\bar{m}(\underline{n})}(\underline{a}-\underline{b}/\underline{c})| < 1/\underline{n}]],$$

on el significat de $(\exists\varphi')$ és com segueix: suposem que $\varphi'(\underline{x}) \equiv \bar{r}'(\underline{x})-\bar{s}'(\underline{x})/\bar{t}'(\underline{x})$, per un certs pseudooperadors $\bar{r}'$, $\bar{s}'$, $\bar{t}'$, i llavors $(\exists\varphi')$ significa $(\exists\bar{r}', \bar{s}', \bar{t}')$. Anàlogament per χ'.

Nota. Una part de la definició és $(\forall\underline{n})[\varphi'(\underline{n}) \leqslant \varphi'(\underline{n}+1)]$, que significa (o esta representat per) "φ' és monòtona no decreixent". També tenim, és clar,

$$\psi' \text{ és monòtona no creixent } \equiv (\forall\underline{n})[\psi'(\underline{n}) \geqslant \psi'(\underline{n}+1)]]$$

5.8 Observacions.

a) Anàlogament al que ha estat fet a 3.4 i 3.5, podem definir la noció $\Phi_{\underline{u}}(\xi) \sim 0$ i la noció $\Phi_{\underline{u}}(\xi) \sim \Psi_{\underline{u}}(\xi)$, per $\Phi_{\underline{u}}$ i $\Psi_{\underline{u}}$ en C_I, i demostrar que aquesta és una relació d'equivalència

b) Podem veure cada element de C_I com a "funció de I en R". Donat $\varphi \in R$ tal que $\psi \leqslant \varphi \leqslant \chi$, i donat $\Phi_{\underline{u}} \in C_I$, si θ és un real al qual convergeix $\Phi_{\underline{u}}(\varphi(x))$, podem definir θ com el valor de $\Phi_{\underline{u}}$ en φ. És clar que aquest valor θ només està definit mòdulo equivalència.

Si, en un segment $\bar{V}$, tenim que $\bar{V}: \Phi_{\underline{u}}(\xi) \in C_I(\xi)$ i $\bar{V}: \varphi(\underline{x}) \in R(\underline{x})$, representarem, amb notació ambigua, per $\Phi(\varphi)$ aquest valor de Φ en φ, que acabem de definir, mòdulo equivalència. Quan fem alguna afirmació, en el segment $\bar{V}$, relativa a $\Phi(\varphi)$, estarem fent la afirmació per qualsevol dels reals representats per $\Phi(\varphi)$; o bé, si fixem com a representat per $\Phi(\varphi)$ un real particular al qual $\Phi_{\underline{u}}(\varphi(\underline{x}))$ convergeix, hem d'estar segurs que la mateixa afirmació es compleix per qualsevol real equivalent a ell.

c) Amb el que s'ha dit es pot precisar i demostrar l'afirmació "C_I és una R-àlgebra completa".

5.9 <u>Proposició</u>. (existència de màxim i mínim per elements de C_I). Sigui $I \equiv [\psi, \chi]$. Per qualsevol $\Phi_{\underline{u}}(\xi)$,

$$: \Phi(u,\xi) \in C_I(\xi) \models (\exists \tau_1, \tau_2)[\tau_1 \in R \ \& \ \tau_2 \in R \ \& \ \tau_1 \lesssim \chi \ \& \ \psi \lesssim \tau_2 \ \& \ \tau_2 \lesssim \chi$$
$$\& \ (\forall \theta)[\theta \in R \ \& \ \psi \lesssim \theta \ \& \ \theta \lesssim \chi \models \Phi(\theta) \lesssim \Phi(\tau_1) \ \& \ \Phi(\theta) \gtrsim \Phi(\tau_2)]]$$

Veurem com construir τ_1. Recordem que $\tau_1(\underline{x}) \equiv \bar{r}(\underline{x}) - \bar{s}(\underline{x}) / \bar{u}(\underline{x})$ per certs pseudooperadors $\underline{r}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$, i que $(\exists \tau_1)$ significa $(\exists \bar{r}, \bar{s}, \bar{u})$.

Primer definim

$$(\underline{a} - \underline{b}/\underline{c}) \dot{-} (\underline{d} - \underline{e}/\underline{f}) \equiv ((\underline{af} + \underline{ec}) \dot{-} (\underline{bf} + \underline{dc})) - 0/(\underline{cf})$$

La funcio $\tilde{a}(\underline{x})$ definida a la secció 2 s'estén com

$$\bar{a}(\underline{a} - \underline{b}/\underline{c}) \equiv \bar{a}(\underline{a} \dot{-} \underline{b})$$

Ara suposem $\bar{V}: \Phi(\underline{u},\xi) \in C_I(\xi)$. Així que tenim, per algun $\bar{m}$, algun $\bar{t}$, i certes ψ' i χ', monòtones, no decreixent i no creixent, respectivament, i tals que $\chi \sim \chi'$ i $\psi \sim \psi'$;

$$(*) \qquad \bar{V} : (\forall \underline{k},\alpha,\beta,\gamma,\delta,\underline{n})[\neg\mathrm{denom}\alpha=0 \wedge \neg\mathrm{denom}\beta=0 \wedge \neg\mathrm{denom}\gamma=0$$
$$\wedge \neg\mathrm{denom}\delta=0 \wedge \alpha \leqslant \gamma \wedge \gamma \leqslant \beta \wedge \alpha \leqslant \delta \wedge \delta \leqslant \beta$$
$$\wedge |\gamma-\delta| < 1/\bar{m}(\underline{k}, \alpha,\beta,\underline{n}) \Rightarrow |\Phi_{\underline{k}}(\gamma)-\Phi_{\underline{k}}(\delta)| < 1/\underline{n}]$$

$$(**) \quad \bar{V}: (\forall \underline{n},\underline{r},\zeta)[\neg\mathrm{denom}\zeta=0 \wedge \psi'(\bar{t}(\underline{n})+\underline{r}) \leqslant \zeta \wedge \zeta \leqslant \chi'(\bar{t}(\underline{n})+\underline{r})$$
$$\Rightarrow |\Phi_{\bar{t}(\underline{n})+\underline{r}}(\zeta) - \Phi_{\bar{t}(\underline{n})}(\zeta)| < 1/\underline{n}]$$

Llavors tenim, en alguna extensió $\bar{V}'$ de $\bar{V}$, per algun $\bar{f}$, i si $\bar{V}: [\underline{c} > \chi'(0)-\psi'(0)]$,

$$\bar{V}': (\forall \underline{n})[\bar{f}(\underline{n},0)=0]$$

$$\bar{V}': (\forall \underline{n},\underline{i})[\bar{f}(\underline{n},\underline{i}+1)=\bar{f}(\underline{n},\underline{i})+[((\underline{i}+1)\dot{-}\bar{f}(\underline{n},\underline{i}))\cdot$$
$$\bar{a}(\Phi_{\bar{t}(\underline{n})}(\psi'(\bar{t}(\underline{n}))+((\underline{i}+1)/\underline{d})\cdot\varepsilon)\dot{-}\Phi_{\bar{t}(\underline{n})}(\psi'(\bar{t}(\underline{n}))+(\bar{f}(\underline{n},\underline{i})/\underline{d})\cdot\varepsilon))]]$$

on

$$\underline{d} \equiv \underline{c}\cdot\bar{m}(\bar{t}(\underline{n}),\psi'(\bar{t}(\underline{n})),\chi'(\bar{t}(\underline{n})),\underline{n})$$
$$\varepsilon \equiv \chi'(\bar{t}(\underline{n}))-\psi'(\bar{t}(\underline{n}))$$

Usem la notació

$$\rho(\underline{n}) \equiv \psi'(\bar{t}(\underline{n}))+(\bar{f}(\underline{n},\underline{n})/\underline{d})\cdot\varepsilon$$

Llavors, en alguna extensió $\bar{W}'$ de $\bar{V}'$ tenim, per certs $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{u}$,

$$\bar{W}': \rho(\bar{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x}),$$
$$\bar{W}': (\forall \underline{x})[\bar{r}(\underline{x})-\bar{s}(\underline{x})/\bar{u}(\underline{x})=\rho(\bar{q}(\underline{x}))],$$

i $\tau_1(\underline{x})$ és $\bar{r}(\underline{x})-\bar{s}(\underline{x})/\bar{u}(\underline{x})$

La construcció de τ_2 és anàloga, i dóna lloc a un segment $\bar{W}$. Resta per demostrar, per qualsevol θ,

$$\bar{W}: \theta \in R \;\&\; \psi \lessapprox \theta \;\&\; \theta \lessapprox \chi \;\vDash\; \Phi(\theta) \lessapprox \Phi(\tau_1) \;\&\; \Phi(\theta) \gtrapprox \Phi(\tau_2)$$

5.10 <u>Proposició</u>. (teorema de Bolzano). Posem $I \equiv [\psi,\chi]$.

per qualssevol ψ, χ, Φ, θ,

$$: \Phi(\underline{u},\xi) \in C_I(\xi) \ \& \ \theta \in R \ \& \ \Phi(\psi) \lesssim \theta \ \& \ \theta \lesssim \Phi(\chi)$$

$$\vDash (\exists\tau)[\psi \lesssim \tau \ \& \ \tau \lesssim \psi \ \& \ \Phi(\tau) \sim \theta],$$

i l'analeg per $\Phi(\psi) \gtrsim \theta$ i $\theta \gtrsim \Phi(\chi)$.

Per la demostració suposarem, sense perdre generalitat, que

$$\bar{V}: \Phi(\psi) \lesssim 0/1 \ \& \ 0/1 \lesssim \Phi(\chi) \ \& \ \theta \sim 0/1$$

Això, junt amb (*) i (**) de la proposició anterior és la nostra hipòtesi. Fàcilment podem substituir Φ per alguna Φ' tal que, per alguna extensió $\bar{V}'$ tinguem $V': \Phi \sim \Phi'$ i

$$\bar{V}': (\forall\underline{n})[\Phi'_{\bar{t}(\underline{n})}(\psi'(\underline{n})) < 0/1 \ \& \ 0/1 < \Phi'_{\bar{t}(\underline{n})})\chi'(\underline{n}))],$$

amb la mateixa notació de la proposició anterior (per Φ' en lloc de Φ).

Suposem que Φ ja té aquesta propietat, per $\bar{V}' \equiv \bar{V}$.

La condició

$$\bar{V} \ \vdash \Phi_{t(\underline{n})}(\psi'(\bar{t}(\underline{n}))+(i/\underline{d})\cdot\varepsilon \geqslant 0/1)$$

és equivalent, en alguna extensió $\bar{V}'$ de $\bar{V}$, per algun $\bar{f}$, a

$$\bar{V}' \vdash \bar{f}(\underline{n},i)=0$$

Com que $\bar{V}': (\forall\underline{n})[\bar{f}(\underline{n},\underline{d})=0]$ tenim

$$\bar{V}': (\forall\underline{n})[E\bar{f}(\underline{n})=1 \ \& \ M\bar{f}(\underline{n}) \in N \ \& \ \bar{f}(\underline{n},M\bar{f}(\underline{n}))=0 \ \& \ \neg\bar{f}(\underline{n},M\bar{f}(\underline{n})\dot{-}1=0]$$

Tenim aleshores

$$\bar{V}': (\forall\underline{n})[\Phi_{\bar{t}(\underline{n})}(\psi'(\bar{t}(\underline{n}))+(M\bar{f}(\underline{n})/\underline{d})\cdot\varepsilon > 0/1$$

$$\& \ \Phi_{\bar{t}(\underline{n})}(\psi'(\bar{t}(\underline{n}))+((M\bar{f}(\underline{n})\dot{-}1)/\underline{d})\cdot\varepsilon \leqslant 0/1]$$

Fem $\sigma(\underline{n}) \equiv \psi'(\bar{t}(\underline{n}))+(M\bar{f}(\underline{n})/\underline{d})\cdot\varepsilon$ i tindrem, per qualsevol subsuccessió $\sigma(\bar{q}(\underline{n}))$ de $\sigma(\underline{n})$ que sigui un real, en alguna extensió $\bar{V}''$ de $\bar{V}'$,

$$\bar{V}'': \Phi(\sigma(\bar{q}(\underline{n}))) \sim 0/1$$

Instituto de Matemáticas U.N.A.M.

Referències

[1] F. Tomàs. Aritmètica i anàlisi formalment recursives. Pub. Mat. UAB, 28, No. 1, pp. 19-78.

[2] R.L. Goodstein. Recursive Arithmetic. North Holland, 1957

[3] R.L. Goodstein. Recursive Analysis. North Holland, 1961

[4] E. Specker. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. The J. of Symb. Logic, 14, No. 3, (1949), 145-158.

Rebut el dia 14 d'abril de 1986

Instituto de Matematicas
U.N.A.M.
México.