Pub. Mat. UAB
Vol. 29 Nº 2-3 Nov. 1985

GRUPOS PRIMITIVOS CON SUBGRUPOS MAXIMALES PEQUEÑOS

Julio Lafuente

Un grupo primitivo es un grupo G que posee un subgrupo maximal U tal que $\mathrm{core}_G U = 1$, siendo $\mathrm{core}_G U = \cap\{U^g; g \in G\}$. A lo largo de todo el trabajo grupo significará grupo finito. Un grupo primitivo G se dice del tipo II, escrito $G \in \underline{P}_{II}$, si posee un único subgrupo normal minimal N no abeliano; en este caso se tiene que $N = S_1 \times \ldots \times S_n$, donde cada $S_i \cong S$ es un grupo simple (no abeliano). Pondremos $N = \mathrm{soc}(G)$.

Dentro de $\underline{P}_{II}$ aparece un tipo especial de grupos primitivos G: aquellos que poseen un subgrupo maximal U verificando que $U \cap \mathrm{soc}(G) = 1$ (y, por lo tanto, que $\mathrm{core}_G U = 1$). Si éste es el caso, escribiremos $G \in \underline{P}'_{II}$. En [1] y en [2] se demuestra la existencia de tales grupos, que Förster llama grupos primitivos con subgrupos maximales pequeños. En [6] se muestra que si $G \in \underline{P}'_{II}$, se tiene que $G/\mathrm{soc}(G) \in \underline{P}_{II}$. Más aún: en este caso, si $\mathrm{soc}(G) \cong S^n$ y $\mathrm{soc}(G/\mathrm{soc}(G)) \cong T^m$ siendo S y T simples, entonces S es sección de T.

En el caso en que $|S| < |T|$ se tiene una suerte de recíproco del resultado anterior, a saber:

<u>TEOREMA</u> Sea $U \in \underline{P}_{II}$, $M = \mathrm{soc}(U) = T_1 \times \ldots \times T_m$, cada $T_i \cong T$ simple. Sea S una sección simple no abeliana de T tal que $|S| < |T|$. Entonces existe $G \in \underline{P}'_{II}$ y un número natural n tal que $\mathrm{soc}(G) \cong S^n$ y de forma que G posee un subgrupo maximal $V \cong U$ tal que $V \cap \mathrm{soc}(G) = 1$.

Obsérvese que la construcción de un grupo $U \in \underline{P}_{II}$ con $\mathrm{soc}(U) \cong T^m$ no plantea mayores dificultades: basta con tomar como U un subgrupo de $\mathrm{Aut}(T^m) = \mathrm{Aut}(T) \sim \Sigma_m$ (donde Σ_m es el grupo simétrico de grado m y el producto orlado se considera respecto de la acción natural de este grupo en $\{1,\ldots,n\}$) que contenga a $\mathrm{Int}(T^m)$ como subgrupo normal minimal (v. al respecto el comentario que aparece en el párrafo 3 de [3]).

El caso en que $|S| = |T|$ (o sea, $S \cong T$) se presenta de otra forma menos regular. Notemos en primer lugar:

<u>OBSERVACIÓN</u> Sea $G \in \underline{P}'_{II}$, $\mathrm{soc}(G) \cong S^n$, U subgrupo maximal de G tal que $U \cap \mathrm{soc}(G) = 1$, $\mathrm{soc}(U) \cong T^m$, donde S y T son grupos simples. Si se supone además que $m = 1$, entonces $|S| < |T|$.

<u>Demostración</u> Pongamos $\mathrm{soc}(G) = S_1 \times \ldots \times S_n$, cada $S_i \cong S$. Sean $H = N_U(S_1)$, $Y = C_U(S_1)$, $X/Y = \mathrm{soc}(H/Y)$. En [2] se ve que, en particular, $X/Y \cong S$ y $\mathrm{core}_U X = 1$. En [6] (Bemerkung) se observa que, siendo $M = \mathrm{soc}(U)$, se tiene que $X/Y \cong (X \cap M)/(Y \cap M)$. Así, si se supone $m = 1$ (o sea, $M \cong T$) y que $|S| = |T|$, se obtiene que $X \cap M = M$, es decir, que $M \leq X$, lo que está en contradicción con $\mathrm{core}_U X = 1$. Q.E.D.

Así pues, $G \in \underline{P}'_{II}$, $\mathrm{soc}(G) \cong S^n$, $U \cong G/\mathrm{soc}(G)$, $\mathrm{soc}(U) \cong T^m$, S y T simples y $S \cong T$ implica $m > 1$. Pero el ser $m > 1$ no asegura, si $S \cong T$, la validez del teorema análogo al enunciado, pudiéndose dar o no la existencia de un tal grupo G, según sea la estructura de U, como veremos luego.

Utilizaremos las siguientes notaciones: si U es un grupo cualquiera y $B \trianglelefteq A \leq U$, pondremos: $N_U(A/B) = N_U(A) \cap N_U(B)$, $C^*_U(A/B)$ será el conjunto de los elementos de $N_U(A/B)$ que inducen un automorfismo interno en A/B y $C_U(A/B)$ tendrá el significado usual. Utilizaremos el siguiente resultado auxiliar:

<u>LEMA</u> Sea U un grupo cualquiera y A/B una sección simple no abeliana de U. Sean $F = N_U(A/B)$, $C = C^*_U(A/B)$ y $D = C_U(A/B)$. Entonces

$C = AD$, $A \cap D = B$, $F/D \in \underline{P}_{II}$ y $C/D = soc(F/D)$.

Demostración Es claro que $D \leq C \leq F$, luego $C = C^{*}_{F}(A/B)$, $D = C_{F}(A/B)$. Por lo tanto C es el numerador de la corona definida en F por el factor principal A/B (es un grupo simple) de F (1.8 de [5]), $F/D \in \underline{P}_{II}$, $C/D = soc(F/D)$, $C = AD$ y $A \cap D = B$ (v. el párrafo 2 de [4]). Q.E.D.

Demostración del teorema (1) Sea $M = soc(U)$ y sean $B \trianglelefteq A \leq M$ con $A/B \cong S$. Sean $F = N_{U}(A/B)$, $C = C^{*}_{U}(A/B)$ y $D = C_{U}(A/B)$. Por el lema: $F/D \in \underline{P}_{II}$, $C/D = soc(F/D)$, $C = AD$ y $A \cap D = B$.

(2) Sea $Y \leq U$, Y maximal respecto de las condiciones:

$$D \leq Y,\ F \leq N_{U}(Y),\ Y \cap F = D.$$

(Obsérvese que D las cumple.) Sean

$$X = CY,\ H = N_{U}(X/Y).$$

Entonces, de $Y < K \leq U$ y $H \leq N_{U}(K)$ se sigue $X \leq K$.

En efecto: es $D \leq Y < K$, $F \leq H \leq N_{U}(K)$ (como F normaliza a C e Y, normaliza a $X = CY$, luego $F \leq H$; como $C \leq H$, X es un subgrupo), $K \cap F \geq Y \cap F = D$. Por elección de Y se tiene que ha de ser $K \cap F > D$. Ahora bien, como $C/D = soc(F/D)$ y $F/D \in \underline{P}_{II}$, se sigue que $C \leq K \cap F$, luego que $C \leq K$ y, por fin, que $X = CY \leq K$.

(3) Como $U \in \underline{P}_{II}$ y $M = soc(U)$, elegidos X e Y como en (2), es condición necesaria y suficiente para que $core_{U}X = 1$ que $M \not\leq X$. Comprobemos que se verifica esto último.

Notemos en primer lugar que en cualquier caso es $M \not\leq Y$: si no, se tendría que $C_{U}(A) \geq D = Y \cap F \geq M \cap F \geq A$, lo que no puede ser pues A/B es no abeliano.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que A y B son tales que $M \leq X$. Entonces $M \leq X = CY = ADY = AY$. Con la identidad de Dedekind, $M = M \cap AY = (M \cap Y)A$, donde $M \cap Y \trianglelefteq M$ pues $M \leq X = CY \leq FY \leq N_{U}(Y)$. De aquí, $M/(M \cap Y) \cong A/(A \cap Y)$, que es un factor del grupo simple A/B. Si se supone que $A = A \cap Y$, se deduce que $M = M \cap Y$, lo que ya se ha visto que no puede ser. Luego será $A \cap Y = B$ y, por tanto, $M/(M \cap Y) \cong S$. Pero esto es imposible pues el único factor simple de M es isomorfo a T y $S \not\cong T$ por hipótesis.

(4) Así pues, elegidos A y B como se indica en (1), de acuerdo con la caracterización de Kovács que aparece en [2], se tiene que el grupo $G = (X/Y) \sim_H U$ verifica las condiciones requeridas en el enunciado. Obsérvese que es $n = |U:H|$. Q.E.D.

Resta el caso en que $S \cong T$. Una condición suficiente para que se verifique la tesis del teorema, una vez modificada la hipótesis exigiendo que $S \cong T$ y que $m > 1$, es fácil de obtener: En la demostración acabada de hacer sólo al final se ha utilizado la condición sobre S y T. Volvamos sobre dicho punto: se tiene que $M \cap Y \trianglelefteq M$ y que $M/(M \cap Y) \cong T$, con lo que podemos suponer que $M \cap Y = T_2 \times \dots \times T_m$. Veamos que esto no puede ocurrir si se han podido elegir A y B de forma que $N_U(A/B)$ actúe libre de puntos fijos sobre $\{T_1,\dots,T_m\}$. Se tendría entonces la existencia de $u \in N_U(A/B)$ tal que $T_1 = T_i^u$ con $i \neq 1$, obteniéndose la contradicción:

$$T_2 \times \dots \times T_m = M \cap Y = M^u \cap Y^u = (M \cap Y)^u = T_1 \times \overset{i}{\dots} \times T_m.$$

Esta observación permite caracterizar fácilmente el caso $m = 2$:

<u>PROPOSICIÓN</u> Sea $U \in \underline{P}_{II}$, $M = soc(U) = T_1 \times T_2$, cada $T_i \cong T$ simple. Existe $G \in \underline{P}'_{II}$ con $soc(G) \cong T^n$ para algún n y $G/soc(G) \cong U$ si y sólo si M posee un subgrupo diagonal completo A tal que $N_U(A)$ actúa transitivamente en $\{T_1,T_2\}$.

<u>Demostración</u> La implicación a la izquierda es consecuencia inmediata de lo dicho más arriba.

Recíprocamente: Por la citada caracterización de Förster-Kovács, suponiendo que U es subgrupo maximal de G y que $U \cap soc(G) = 1$, se tiene que U posee subgrupos H, X e Y tales que

$\mathrm{core}_U X = 1$, $Y \trianglelefteq X$, $X/Y \cong T$, $H = N_U(X/Y)$ y de forma que si $K \leq U$, $Y < K$ y $H \leq N_U(K)$, entonces $X \leq K$.

Sean $T_1 = \{(t,1);t \in T\}$, $T_2 = \{(1,t);t \in T\}$. Pongamos $A = X \cap M$ y $B = Y \cap M$. Se tiene que $X/Y \cong A/B$ (v. Bemerkung de [6]) luego $A/B \cong T$.

(i) Ni T_1 ni T_2 están contenidos en X.

Supongamos que $T_1 \leq X$. Como $M \not\leq X$ (ya que $\mathrm{core}_U X = 1$) y U actúa transitivamente en $\{T_1,T_2\}$ se deduce que $H \leq N_U(T_1)$ y, por lo tanto, que $H \leq N_U(T_2)$. En particular T_2Y es un subgrupo de U normalizado por H. Supongamos que $Y = T_2Y$. Entonces es $T_2 \leq Y$, luego $T_2 \leq B < A \leq M$; como $A/B \cong T \cong M/T_2$, resulta que $A = M$, en contra de ser $\mathrm{core}_U X = 1$. Por lo tanto $X \leq T_2Y$, luego, con la identidad de Dedekind, $X = (X \cap T_2)Y$, de donde $X/Y \cong (X \cap T_2)/(Y \cap T_2)$. Como $X/Y \cong T \cong T_2$, se sigue que $X \cap T_2 = T_2$, obteniéndose de nuevo la contradicción $M \leq X$.

Análogamente se demuestra que $T_2 \not\leq X$.

(ii) A es un subgrupo diagonal completo de M (y $B = 1$).

$AT_1/BT_1 \cong A/(A \cap BT_1)$, que es factor del grupo simple A/B. Si se supone que $A = A \cap BT_1$, se tiene, con la identidad de Dedekind, que $A = (A \cap T_1)B$, luego $A/B \cong (A \cap T_1)/(B \cap T_1)$. Como $A/B \cong T \cong T_1$, resulta que $A \cap T_1 = T_1$, en contra de (i). Luego $B = A \cap BT_1$ y $AT_1/BT_1 \cong A/B$. Como $M/T_1 \cong T \cong A/B$, resulta que $M = AT_1$ y que $B \leq T_1$. Análogamente se prueba que $M = AT_2$ y $B \leq T_2$. Por lo tanto, $B \leq T_1 \cap T_2 = 1$ y $M/T_1 \cong A/(A \cap T_1)$, lo que, con $M/T_1 \cong T \cong A$ implica $A \cap T_1 = 1$. Análogamente, $A \cap T_2 = 1$.

Sea α_i la aplicación canónica de A en T_i $(i = 1,2)$. El núcleo de α_i es $A \cap T_{3-i} = 1$, luego α_i es un isomorfismo. Si β es la composición de $T \cong T_1$ con $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ con $T_2 \cong T$, resulta que $A = \{(t,t\beta);t \in T\}$.

(iii) Existe $u \in N_U(A)$ tal que $T_1^u = T_2$.

Supongamos lo contrario. En particular se tendrá que $H \leq N_U(T_1)$. $T_1 \leq H$ implica $T_1 \leq H \cap M \leq N_M(A) = A$ (es bien sabido que A es subgrupo maximal de M con $\mathrm{core}_M A = 1$), luego $T_1 \leq X$, en contra de (i). Por lo tanto $T_1 \not\leq H$ y, en particular, $Y < T_1 Y$ que es un subgrupo normalizado por H pues $Y \leq H \leq N_U(T_1)$. Se sigue que $X \leq T_1 Y$, luego que $X = (X \cap T_1)Y$. Ahora bien, $X \cap T_1 \trianglelefteq X \cap M = A$ que es simple, luego o $X \cap T_1 = 1$, de donde se obtiene la contradicción $X = Y$, o $X \cap T_1 = A$, en contradicción con $A \cap T_1 = 1$. Q.E.D.

EJEMPLOS

(1) Sea T un grupo simple no abeliano cualquiera, $M = T_1 \times T_2$, $T_1 = \{(t,1);t \in T\}$, $T_2 = \{(1,t);t \in T\}$. Identificaremos $\mathrm{Aut}(M)$ con $\mathrm{Aut}(T) \sim \Sigma_2$ en la forma obvia.

(1a) Sea $(12) \in \Sigma_2 \leq \mathrm{Aut}(M)$ y $U = \langle(12)\rangle M$. Se tiene que $U \in \underline{P}_{II}$, $M = \mathrm{soc}(U)$ y $A = \{(t,t);t \in T\}$ verifica las condiciones de la proposición anterior, tomando $u = (12)$.

(1b) Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(T)$ verificando que $\alpha^2 = 1$ y que α no es un cuadrado módulo $\mathrm{Int}(T)$. Sea $\sigma = (12) \in \Sigma_2 \leq \mathrm{Aut}(M)$.

Sea $x = (\sigma;1,\alpha) \in \mathrm{Aut}(T) \sim \Sigma_2$. Sea $U = \langle x\rangle M$. Obsérvese que es $x^4 = 1$ y que, si $(t_1,t_2) \in M$,

$(t_1,t_2)^x = (t_2,t_1\alpha)$, $(t_1,t_2)^{x^2} = (t_1\alpha,t_2\alpha)$, $(t_1,t_2)^{x^3} = (t_2\alpha,t_1)$.
Como $\alpha \notin \mathrm{Int}(T)$ es claro así que $C_U(M) = 1$ y, como, claramente también, M es subgrupo normal minimal de U, resulta que $U \in \underline{P}_{II}$ y $M = \mathrm{soc}(U)$.

Consideremos el subgrupo diagonal completo $A = \{(t,t\beta);t \in T\}$, donde $\beta \in \mathrm{Aut}(T)$. Un elemento $u \in U$ que normalice a A y tal que $T_1^u = T_2$ tendrá que ser de la forma $u = (s_1,s_2)x^i$ con $s_1,s_2 \in T$, $i = 1$ ó $i = 3$. Ahora bien, de $(t,t\beta)^u \in A$ se obtiene que $\beta\bar{s}_2\beta = \bar{s}_1\alpha$, luego que $\alpha \in \mathrm{Int}(T)(\bar{s}_2\beta)^2$ en el caso en que

$i = 1$ y que $\beta\bar{s}_2\alpha\beta = \bar{s}_1$, luego que $\alpha \in \mathrm{Int}(T)(\bar{s}_1\beta^{-1})^2$ en el caso en que $i = 3$, en ambos casos en contradicción con la hipótesis.

Aplicando la proposición anterior, podemos afirmar que, si $G \in \underline{P}'_{II}$ y $\mathrm{soc}(G) \cong T^n$ para algún n, entonces $G/\mathrm{soc}(G) \not\cong U$.

(1c) Tomar $T = A_5$, el grupo alternado de grado 5, y efectuar la construcción de (1b) con $\alpha = (12) \in \Sigma_5$ identificado con $\mathrm{Aut}(T)$. Podemos entonces afirmar que si $G \in \underline{P}'_{II}$, $G/\mathrm{soc}(G) \not\cong U$.

(2) Sean $T_1,\dots,T_r$ grupos simples no abelianos de forma que T_{i+1} es sección propia de T_i $(i = 1,\dots,r-1)$. Sea $G_1 \in \underline{P}_{II}$ con $\mathrm{soc}(G_1) \cong T_1^{n_1}$. Aplicando el teorema podemos conseguir un grupo $G_2 \in \underline{P}'_{II}$ con $\mathrm{soc}(G_2) \cong T_2^{n_2}$ y tal que $G_2/\mathrm{soc}(G_2) \cong G_1$. Reiterando el proceso obtenemos un grupo G_r con una serie principal
$1 = N_0 < N_1 < \dots < N_{r-1} < G_r$, única entre 1 y N_{r-1} y tal que $G_r/N_{r-i} \cong G_i \in \underline{P}'_{II}$ si $i > 1$ y $N_{r-i}/N_{r-(i+1)} \cong \mathrm{soc}(G_i) \cong T_i^{n_i}$.

De lo citado más arriba se deduce que, si $G \in \underline{P}'_{II}$, $G/\mathrm{soc}(G)$ es no resoluble, luego algún factor principal no abeliano de G_r/N_{r-1} no es complementado por ningún subgrupo maximal de G_r: si R es el numerador de una corona no abeliana de G_r/N_{r-1} y R tiene orden máximo en estas condiciones, G_r/R es resoluble, luego si L es tal que R/L es factor principal de G_r, se tiene que $G_r/L \in \underline{P}_{II} - \underline{P}'_{II}$. (El razonamiento acabado de hacer es por otra parte general y se puede sintetizar en: "Un grupo G es resoluble si y sólo si cada factor principal no de Frattini de G es complementado en G".)

REFERENCIAS

[1] M. Aschbacher and L. Scott, Maximal Subgroups of Finite Groups. J. Algebra 92 (1985), 44-80.

[2] P. Förster, A Note on Primitive Groups with Small Maximal Subgroups. Pub. Mat. UAB (1984), 19-28.

[3] L. G. Kovács, Two results on wreath products. The Australian National University. (Preprint.)

[4] J. Lafuente, Nonabelian crowns and Schunck classes of finite groups. Arch. Math. 42 (1984), 32-39.

[5] J. Lafuente, Crowns and centralizers of chief factors of finite groups. Comm. in Algebra 13 (3) (1985), 657-668.

[6] J. Lafuente, Eine Note über nichtabelsche Hauptfaktoren und maximale Untergruppen einer endlichen Gruppe. Comm. in Algebra (Próxima aparición.)

Rebut el 19 d'abril del 1985

Universidad de Zaragoza.
Dpto. de Algebra
Facultat de Ciencias
Zaragoza
ESPAÑA