Pub. Mat. UAB
Vol. 28 Nº 2-3 Set. 1984

FEUILLETAGES DE K-CONTACT SUR LES VARIETES COMPACTES DE DIMENSION 3

Gilbert Monna

Introduction

Soit V une variété de dimension 2n+1, sur laquelle est définie une forme de contact α . Nous désignerons par Y_α le système dynamique de cette forme de contact (c'est-à-dire l'unique champ de vecteurs sans singularité, global, sur V tel que $i_{Y_\alpha}\alpha = 1$ et $i_{Y_\alpha} d\alpha = 0$).

Les trajectoires de Y_α définissent un feuilletage de dimension 1 de V, appelé feuilletage de contact. La notion de forme de K-contact a été introduite dans [8] (voir aussi [1]). On dit qu'une forme de contact α est une forme de K-contact s'il existe une métrique riemannienne g telle que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{Y_\alpha} g$ de g par rapport à Y_α soit nulle, c'est-à-dire que le système dynamique Y_α de α définit un flot d'isométries. L'importance de ces structures de contact particulières a notamment été signalée dans [2], spécialement en dimension 3 .
Si α est une forme de K-contact, le feuilletage défini par Y_α sera appelé feuilletage de K-contact.

Nous montrons ici que la condition de K-contact est équivalente à l'existence d'une métrique transverse invariante pour le feuilletage de contact, ou, ce qui revient au même, à ce que ce feuilletage soit transversalement riemannien (à bundle libre metric au sens de [7]).

Nous donnons ensuite quelques propriétés générales des feuilletages de contact, et, à l'aide de la classification des feuilletages transversalement riemanniens sur les variétés compactes de dimension 3 donnée par [3] , nous établissons notre résultat principal :

Les feuilletages de K-contact sur les variétés compactes de dimension 3 sont les fibrations de Seifert pour lesquelles il n'existe pas de feuilletage supplémentaire invariant. Dans une note (C.R.A.S. T.298, série 1 N°12, 1984, "Formes de contact invariantes sur les 3-variétés") l'auteur a déjà utilisé ces feuilletages, donnant cette fois leur rapport avec les feuilletages définis par une forme de contact régulière.

Différentiable signifie C^∞, toutes les variétés différentielles considérées sont compactes connexes et sans bord.

L'auteur remercie le referee pour ses remarques et pour avoir attiré son attention sur le travail de MM.Nicolau et A.Reventos : "On some geometrical properties of Seifert bundles" [5] .

I - FEUILLETAGES DE K-CONTACT ET FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT RIEMANNIENS.

Soit V une variété sur laquelle est définie une forme de K-contact α , dont nous désignerons le système dynamique par Y_α.

Il existe donc une métrique riemannienne g sur V, telle que $\mathcal{L}_{Y_\alpha} g = 0$.

Pour tout x de V, on note $\mathcal{F}_x$ la feuille passant par x du feuilletage de contact $\mathcal{F}$ défini par α , et on désigne par $T_xV/T_x\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des vecteurs transverses au feuilletage. Si X est un champ de vecteurs sur V, on notera $\overline{X}$ le champ de vecteurs transverse correspondant.

X et Y étant deux champs de vecteurs, on pose :

$$\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) = g(-X+\alpha(X)Y_\alpha , -Y+\alpha(Y)Y_\alpha).$$

Vérifions tout d'abord que $\overline{g}$ est bien définie.

Si $\overline{X'} = \overline{X}$, $\overline{Y'} = \overline{Y}$, on aura :

$$X' = X + \lambda Y_\alpha$$
$$Y' = Y + \mu Y_\alpha \quad .$$

C'est-à-dire :

$$\overline{g}(\overline{X}',\overline{Y}') = g(-X'+\alpha(X')Y_\alpha, \; - \; Y'+\alpha(Y')Y_\alpha)$$
$$= g(-X-\lambda Y_\alpha + \alpha(X+\lambda Y_\alpha)Y_\alpha, \; -Y-\mu Y_\alpha + \alpha(Y+\mu Y_\alpha)Y_\alpha)$$
$$= g(-X + \alpha(X)Y_\alpha, \; -Y+\alpha(Y)Y_\alpha).$$

La bilinéarité et la symétrie de $\overline{g}$ étant évidentes, remarquons que $\overline{g}(\overline{X},\overline{X}) = 0$ entraîne :

$$g(-X+\alpha(X)Y_\alpha, -X+\alpha(X)Y_\alpha) = 0 ,$$

c'est-à-dire $X = \alpha(X)Y_\alpha$, et donc $\overline{X} = 0$.

Donc $\overline{g}$ est une métrique riemannienne sur l'espace des champs de vecteurs transverses.

$\mathcal{L}_{Y_\alpha} \alpha = 0$, donc $\mathcal{L}_{Y_\alpha} \overline{g} = 0$, et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement riemannien.

Remarquons que la définition de $\overline{g}$ est à rapprocher de la formule de [1] qui permet de montrer l'existence de métriques adaptées à une forme de contact (c'est-à-dire telles que le noyau de la forme de contact soit orthogonal au système dynamique).

Tout feuilletage de K-contact est donc transversalement riemannien.

Réciproquement :

Proposition 1

Si le feuilletage de contact $\mathcal{F}$ est transversalement riemannien, $\mathcal{F}$ est un feuilletage de K-contact.

Démonstration

Soit $\overline{g}$ une métrique riemannienne transverse invariante, et X et Y deux champs de vecteurs locaux sur V. On pose :

$$g(X,Y) = \overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) + \alpha(X)\alpha(Y).$$

On a : $\mathcal{L}_{Y_\alpha} \overline{g} = 0$, donc $\mathcal{L}_{Y_\alpha} g = 0$.

g est bilinéaire symétrique, de plus :

$g(X,X) = 0$ équivaut à $\overline{g}(\overline{X},\overline{X}) + (\alpha(X))^2 = 0$.

C'est-à-dire :
$$\begin{cases} \overline{g}\,(\overline{X},\overline{X}) = 0 \\ \alpha(X) = 0 \end{cases}$$

$\overline{g}(\overline{X},\overline{X}) = 0$ entraîne $\overline{X} = 0$, donc $X = \lambda Y_\alpha$ et $\alpha(X) = 0$ entraîne alors $\lambda = 0$, donc $X = 0$.

g est donc une métrique invariante par Y_α, et $\mathcal{F}$ est un feuilletage de K-contact.

II - PROPRIETES GENERALES DES FEUILLETAGES DE CONTACT :

Nous donnons dans ce paragraphe trois propriétés des feuilletages de contact, qui nous permettront d'établir au paragraphe suivant que certains feuilletages transversalement riemanniens ne sont pas de contact.

V est toujours une variété de dimension 2n+1, α est une forme de contact sur V. On appelle forme basique une forme différentielle β (de degré p) sur V telle que : $i_{Y_\alpha}\beta = 0$ et $i_{Y_\alpha}d\beta = 0$.

On notera $H_b^p(V,\mathcal{F})$ le $p^{\text{ième}}$ espace de cohomologie basique par rapport au feuilletage $\mathcal{F}$.

Proposition 2

Une condition nécessaire pour qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 *sur* V *soit un feuilletage de contact est que* $H_b^{2n}(V,\mathcal{F})$ *soit non nul.*

Démonstration

$(d\alpha)^n$ est une 2-forme basique fermée, donc $[(d\alpha)^n]$ est un élément de $H_b^{2n}(V,\mathcal{F})$. Si $[(d\alpha)^n] = 0$, donc s'il existe une 2n-forme sur V, α' basique telle que

$d\alpha' = (d\alpha)^n$, considérons la (2n+1)-forme sur V :

$$d(\alpha \wedge \alpha') = d\alpha \wedge \alpha' + \alpha \wedge d\alpha'$$
$$= \alpha \wedge d\alpha' \text{ puisque } d\alpha \wedge \alpha' \text{ est une (2n+1)-forme}$$
basique, donc est nulle.

On a donc : $d(\alpha \wedge \alpha') = \alpha \wedge (d\alpha)^n$, ce qui est impossible, puisque $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur une variété compacte et sans bord.

Nous donnons maintenant un résultat déjà connu (sous-jacent dans [8]) qui figure dans [4] où il est démontré par des arguments assez complexes. Nous en donnons une démonstration directe.

Proposition 3

Tout feuilletage de contact est géodésible.

Démonstration

Soit g une métrique riemannienne telle que $g(X, Y_\alpha) = \alpha(X)$, pour tout champ de vecteurs X. On sait que cette propriété est vraie pour toute métrique adaptée, donc pour toute forme de contact il existe de telles métriques.

Soit ∇ la connexion de Levi-Cevita associée à la métrique g.

On a :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{Y_\alpha} Y_\alpha, Z) &= Y_\alpha g(Y_\alpha, Z) + Y_\alpha g(Y_\alpha, Z) - Zg(Y_\alpha, Y_\alpha) \\ &\quad + g([Y_\alpha, Y_\alpha], Z) + g([Z, Y_\alpha], Y_\alpha) + g(Y_\alpha, [Z, Y_\alpha]). \\ &= (\mathcal{L}_{Y_\alpha} \alpha)(Z) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Ceci pour tout champ de vecteurs Z, donc $\nabla_{Y_\alpha} Y_\alpha = 0$.

Rappelons enfin le critère de Reeb [6] :

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de contact, il n'existe pas de sous-variété compacte transverse à $\mathcal{F}$.

III - FEUILLETAGES DE K-CONTACT SUR LES VARIETES COMPACTES DE DIMENSION 3.

Théorème

Les seuls feuilletages de K*-contact sur les variétés compactes de dimension* 3 *sont les feuilletages définis par une fibration de Seifert telle qu'il n'existe pas de feuilletage supplémentaire invariant.*

Démonstration

D'après [3] les feuilletages transversalement riemanniens sur les variétés compactes de dimension 3 sont, à conjugaison près :

1) Les feuilletages linéaires sur T^3.
2) Les feuilletages propres du tore hyperbolique.
3) Les fibrations de Seifert.
4) Certains feuilletages à deux feuilles compactes de S^3 ou d'un espace lenticulaire.
5) Les suspensions dans $S^1 \times S^2$ des rotations irrationnelles de S^2.

Dans les cas 1 et 5 le feuilletage admet une section, qui est une sous-variété transverse compacte, il ne peut donc être de contact, d'après le critère de Reeb.

Dans le cas 2, il est établi dans [3] que $H_b^2(V,\mathcal{F}) = 0$, donc d'après la proposition 2, ces feuilletages ne sont pas de contact.

Pour le cas 4, il est établi dans [4] que ces feuilletages ne sont pas géodésibles, donc d'après la proposition 3, ils ne peuvent être de contact.

Il ne reste donc que les fibrations de Seifert, qui sont les seuls feuilletages transversalement riemanniens à pouvoir être de contact. Un tel feuilletage est un feuilletage de contact si et seulement si il n'admet pas de feuilletage supplémentaire invariant (ou ce qui revient au même de feuilletage supplémentaire riemannien), d'après [5].

Cela achève la démonstration du théorème.

Corollaire :

Tout feuilletage riemannien de contact sur une variété de dimension 3 compacte est à feuilles compactes.

Bibliographie

[1] D.E.BLAIR — Contact manifolds in Riemannian geometry
Lecture Notes in Mathematics n°509
Springer Verlag 1976

[2] D.E.BLAIR — On the space of Riemannian metrics on surfaces and contact manifolds.
Lecture Notes in Mathematics n°798.
Springer Verlag 1979.

[3] Y.CARRIERE — Flots Riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension 1.
Thèse, Université de Lille, 1981.

[4] H.GLUCK — Dynamical behavior of geodesic fields.
Lecture Notes in Mathematics n°819
Springer Verlag 1980.

[5] N.NICOLAU et A.REVENTOS — On some properties of Seifert bundles
Israël Journal of Mathematics.
A paraître.

[6] G.REEB — Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques.
Mémoires de l'Académie Royale de Belgique
Service scientifique. 2-27. 1952.

[7] B.REINHART — Foliated Manifolds with bundle like metrics.
Annals of Mathematics.
Vol.69 N°1. 1959. pp.119-131.

[8] S.SASAKI — Almost contact Manifolds.
Lecture notes in the Tohoku University.
Vol.1. 1965. Vol.2. 1967. Vol.3. 1968.

Rebut el 9 d'abril del 1984

CENTRE UNIVERSITAIRE D'AVIGNON
Département de Mathématiques
33, rue Louis Pasteur
84000 - Avignon
FRANCE