Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

ALGORITMO PARA DETERMINAR UN FLUXO DE CUSTO MÍNIMO.

Ernesto Q.V. Martins

Instituto de Matemática
Universidade de Coimbra

Abstract - Network flow problems arise whenever items must be shipped through a capacitated network to meet customers demand. In the minimal cost flow problem, the items must be distributed so as to minimize costs. We present a new variant of the dual-simplex algorithm to this problem which is valid when there are no cycles with negative cost.

1. Terminologia

Designamos por $R(N,A)$ uma rede orientada, onde N é o conjunto (finito) dos nodos e $A \subset N \times N$, o conjunto dos arcos. Cada arco é representado por um par ordenado (i,j), com $i,j \in N$; sem perda de generalidade supõe-se que $i \neq j$, para qualquer $(i,j) \in A$.

Dados dois quaisquer $i,j \in N$, define-se um caminho de i para j em $R(N,A)$, p_{ij}, como sendo uma sucessão de nodos e arcos que permite atingir j a partir de i, sendo qualquer nodo utilizado quando muito uma vez. Usando os arcos independentemente da sua orientação, a sucessão assim definida toma o nome de cadeia, C_{ij}. Os arcos duma cadeia dizem-se directos ou reversos conforme são percorridos no sentido condizente ou no sentido oposto à sua orientação. A um caminho $p_{ii}, \forall i \in N$, chama-se ciclo.

A cada arco (i,j) associam-se três constantes inteiras c_{ij}, ℓ_{ij} e u_{ij}. A primeira designa o custo do transporte de uma unidade de fluxo pelo arco (i,j), sendo ℓ_{ij} e u_{ij}, respectivamente, o limite inferior e superior da capacidade de (i,j).

O custo de um caminho p, entre dois quaisquer nodos, é dado por

$$c(p) = \sum_{(i,j) \in p} c_{ij} ,$$

sendo um caminho mínimo de i para j, aquele para o qual $c(p_{ij})$ é mínimo. Para determinar um caminho mínimo numa rede, existem vários e eficientes algoritmos, [1,2].

No que segue $\hat{p}_{ij}$ designará sempre um caminho mínimo.

A cada $i \in N$, associa-se uma constante inteira e finita, r_i, dita o requerimento de i. Um nodo i diz-se fornecedor, consumidor ou de passagem se $r_i > 0$, $r_i < 0$ ou $r_i = 0$, respectivamente.

Para um dado $i \in N$, seja

$$P(i) = \{j \in N \mid (j,i) \in A\} \quad \text{e} \quad S(i) = \{j \in N \mid (i,j) \in A\} .$$

Designando por x_{ij} a quantidade de fluxo em (i,j), o problema da determinação de um fluxo de custo mínimo em $R(N,A)$, (PFCM), equaciona-se na seguinte forma:

$$\text{(1.1)} \qquad \min c(X) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\text{(1.2)} \qquad \sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} = r_i \quad , \quad \forall i \in N$$

$$\text{(1.3)} \qquad 0 \le \ell_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \quad , \quad \forall (i,j) \in A$$

Uma qualquer solução X deste problema, diz-se admissível quando satisfaz às restrições (1.2) e (1.3).

O algoritmo que apresentamos, exige a existência de um único nodo fornecedor s e de um único nodo consumidor t. No entanto tal imposição não é restritiva, dado que o problema mais geral é equivalente a um PFCM numa rede aumentada, em que existe um único nodo fornecedor e um único nodo consumidor, [3]. O algoritmo exige ainda, a não existência de ciclos de custo < 0 em $R(N,A)$, o que na prática é normalmente irrelevante.

2. Algoritmo

Com o algoritmo obtem-se uma sucessão de soluções $\{X^k\}$, convergente para $\bar{X}$; se existir uma solução admissível para o problema, então $\bar{X}$ é uma solução óptima. Os termos de $\{X^k\}$, excepto $\bar{X}$ quando óptima, são soluções não admissíveis do PFCM, pois não verificam as restrições (1.3), embora o mesmo não aconteça com as restrições (1.2).

No algoritmo, X^{k+1} é determinada por alteração de X^k,$(k\geq 0)$, num dado arco (m,n) e nos arcos de uma cadeia C_{mn} de $R(N,A)$, correspondente de um caminho $\hat{p}_{mn}$ ou $\hat{p}_{nm}$ determinado numa rede orientada $R^*\left[(N^*,A^*),X^k\right]$ - rede incremental associada (a X^k).Nesta rede, $N^* = N$ sendo A^* definido do seguinte modo:

i) $\forall(i,j)\varepsilon A$ tal que $\ell_{ij} < x_{ij}^k < u_{ij}$, então $(i,j)\varepsilon A^*$ e $(j,i)\varepsilon A^*$, com $c_{ij}^* = c_{ij}$ e $c_{ji}^* = -c_{ij}$.

ii) $\forall(i,j)\varepsilon A$ tal que $x_{ij}^k > u_{ij}$, então só $(j,i)\varepsilon A^*$ com $c_{ji}^*=-c_{ij}$.

iii) $\forall(i,j)\varepsilon A$ tal que $x_{ij}^k<\ell_{ij}$, então só $(i,j)\varepsilon A^*$ com $c_{ij}^*=c_{ij}$.

iv) $\forall(i,j)\varepsilon A$ tal que $\ell_{ij} = x_{ij}^k = u_{ij}$, então $(i,j) \notin A^*$ e $(j,i)\notin A^*$.

A solução inicial X^0, é determinada "enviando" r_s unidades de fluxo ao longo dos arcos de $\hat{p}_{st}$.

Para um dado $\hat{p}_{mn}$ em $R^*\left[(N^*,A^*),X^k\right]$,$(k\geq 0)$, sejam $A^+ = \{(i,j)\varepsilon A \mid (i,j)\varepsilon \hat{p}_{mn}\}$ e $A^- = \{(i,j)\varepsilon A \mid (j,i)\varepsilon \hat{p}_{mn}\}$, respectivamente o conjunto dos arcos directos e reversos de C_{mn}.

Algoritmo:

Passo 0:i) k=0.

ii) Determinar $\hat{p}_{st}$ (se não for admissível, fim do algoritmo - não existe solução admissível para o PFCM).

iii) $x_{ij}^k = r_s$, $\forall(i,j)\varepsilon\hat{p}_{st}$ e $x_{ij}^k=0$, $\forall(i,j)\notin \hat{p}_{st}$.

Passo 1:i) Se $\exists(m,n)\varepsilon A$ tal que $x_{mn}^k > u_{mn}$, continue no passo 2.

ii) Se $\exists(m,n)\varepsilon A$ tal que $x_{mn}^k < \ell_{mn}$, continue no passo 3.

iii) Fim do algoritmo. X^k é uma solução óptima do PFCM.

Passo 2:i) Construir a rede incremental associada a X^k.

ii) Determinar $\hat{p}_{mn}$ (se não for admissível, fim do algoritmo - não existe solução admissível para o PFCM).

iii) Determinar: $d_1 = \min\{u_{ij} - x_{ij}^k, \forall(i,j)\varepsilon A^+\}$,

$$d_2 = \min\{x_{ij}^k - \ell_{ij}, \forall(i,j)\varepsilon A^-\},$$

$$\Delta = \min\{x_{mn}^k - u_{mn}, d_1, d_2\} .$$

iv) $x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k} + \Delta, \forall (i,j) \varepsilon A^{+}$

$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k} - \Delta, \forall (i,j) \varepsilon A^{-} \cup \{(m,n)\}$

$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k}$, restantes casos.

v) $k = k+1$.

vi) Se $\Delta = x_{mn}^{k-1} - u_{mn}$, continua no passo 1. Caso contrário, no início do passo 2.

Passo 3: i) Construir a rede incremental associada a X^{k}.

ii) Determinar $\hat{p}_{nm}$ (se não for admissível, fim do algoritmo - não existe solução admissível para o PFCM).

iii) Determinar: $d_1 = \min \{u_{ij} - x_{ij}^{k}, \forall (i,j) \varepsilon A^{+}\}$,

$d_2 = \min \{x_{ij}^{k} - \ell_{ij}, \forall (i,j) \varepsilon A^{-}\}$,

$\Delta = \min \{\ell_{mn} - x_{mn}^{k}, d_1, d_2\}$.

iv) $x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k} + \Delta, \forall (i,j) \varepsilon A^{+} \cup \{(m,n)\}$

$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k} - \Delta, \forall (i,j) \varepsilon A^{-}$

$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^{k}$, restantes casos.

v) $k = k+1$.

vi) Se $\Delta = \ell_{mn} - x_{mn}^{k-1}$, continua no passo 1. Caso contrário, no início do passo 3.

Referências

[1] - Denardo, E.V. e Fox, B.L., "Shortest - Route Methods: 1. Reaching, Pruning and Buckets", Operations Research, 27, 1, 161-186, 1979.

[2] - Dial R., Glover F., Karney D. e Klingman D., "A Computational Analysis of Alternative Algorithms and Labeling Techniques for Finding Shortest Path Trees", Research Report CCS291, Center for Cybernetic Studies, University of Texas at Austin, 1977.

[3] - Helgason R.V. e Kennington J.L., "NETFLO Program Documentation", Technical Report IEOR 76011, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Southern Methodist University at Dallas, 1976.