Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE TOPOLOGIAS SOLIDAS EN ESPACIOS NORMALES DE SUCESIONES

Manuel Tort Pinilla

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Barcelona

Resumen

Si E es un espacio normal de sucesiones, se considera el espacio E^s de las formas lineales acotadas sobre las envolturas normales de los elementos de E. En este espacio se define un concepto de conjunto normal que extiende el definido en el espacio de sucesiones E^x. Se establece que una topología localmente convexa separada en E es sólida si y sólo si es la topología de la convergencia uniforme sobre una familia de acotados normales de E^s cuya unión es un espacio normal que contiene φ.

Si E es un espacio normal de sucesiones que contiene φ, representaremos por E^s el espacio de las formas lineales acotadas sobre las envolturas normales de los elementos de E. Este espacio contiene E^x y forma sistema dual con E.

Para cada $u \in E^s$, sea p_u la seminorma definida en E por

$$p_u(x) = \sup_{y \in N(x)} |\langle y,u\rangle| ,$$

donde $N(x)$ representa la envoltura normal de x.

DEFINICION.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ y A un subconjunto de E^S. Diremos que M es normal si M contiene todos los $v \in E^S$ tales que $p_v \leq p_u$, para algún $u \in M$.

Si M está contenido en E^X, M es normal según la definición anterior si y sólo si lo es como conjunto de sucesiones con la definición habitual.

En primer lugar se estudian los polares de los conjuntos normales de E y de E^S en el sistema dual (E,E^S) y se establece el siguiente:

LEMA.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ. 1) Si $A \subset E$ es un conjunto normal de sucesiones, entonces A^O es normal en E^S. 2) Si $A \subset E^S$ es normal, entonces A^O es un conjunto normal de sucesiones. (Los polares se consideran en el sistema dual (E,E^S)).

En [1], pag. 89 se establece que el espacio E^S es el dual topológico de E con la topología sólida localmente convexa más fina. A partir de este resultado y del lema anterior se obtiene la siguiente:

PROPOSICION 1.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ y $\mathcal{T}$ una topología sólida localmente convexa y separada en E. El dual topológico del espacio $E[\mathcal{T}]$ es un subespacio normal de E^S que contiene φ.

Asimismo se establece que todo subespacio de E^S normal que contiene φ es el dual topológico de E con cierta topología sólida:

PROPOSICION 2.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ y F un subespacio de E^S normal que contiene φ. La topología definida en E por la familia de seminormas p_u, para $u \in F$, es una topología sólida y separada y el dual topológico de E con ésta es el espacio F.

A continuación se utiliza el lema y la proposición 1 para caracterizar las topologías sólidas localmente convexas y separadas en E como las de la convergencia uniforme sobre ciertas familias de acotados normales de E^s.

PROPOSICION 3.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ. Una topología localmente convexa y separada en E es sólida si y sólo si es la topología de la convergencia uniforme sobre una familia de acotados normales de E^s cuya unión es un subespacio de E^s normal que contiene φ.

Finalmente se estudia la coincidencia de E^x con el espacio E^s, resultando la siguiente:

PROPOSICION 4.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ. Las siguientes propiedades son equivalentes:
a) $E^x = E^s$, b) Las envolturas normales de los elementos de E son $\sigma(E,E^s)$-compactas, c) Existe una topología localmente convexa y separada en E^s, que tiene una base de entornos normales de cero, compatible con el sistema dual (E^s,E).

A partir de una caracterización de la topología sólida localmente convexa más fina en un espacio normal de sucesiones, que figura en [1] pag.89, y del lema 1.4 de [2] pag.323 se obtiene la siguiente:

PROPOSICION 5.- Sea E un espacio normal de sucesiones que contiene φ. 1) Si $E^x = E^s$, E es bornológico con la topología de Mackey $\tau(E,E^x)$. 2) Si E es completo en el sentido de Mackey,

$E^{x} = E^{s}$ si y sólo si E es bornológico con la topología de Mackey $\tau(E,E^{x})$.

Este último apartado se aplica en particular a los espacios de Köthe, puesto que son completos en el sentido de Mackey.

BIBLIOGRAFIA

[1] GARLING, D.J.H. "On symmetric sequence spaces". Proc. London Math. Soc. (3), 16, 85-106. (1966).

[2] KOMURA,T. - KOMURA,Y. "Sur les espaces parfaits de suites et leurs generalisations". J.Math. Soc. Japan 15, 319-338. (1963).

[3] KÖTHE,G. "Topological Vector Spaces I". Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften B.159. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York. (1969).

[4] TORT,M. "Sobre topologías localmente convexas en espacios de sucesiones". Stochstica Vol.I nº1, 19-47 (1975).

[5] TORT,M. "Sobre la convergencia local de las secciones de una sucesión y espacios de Kothe bornológicos". VI Jornadas Matemáticas Hispano Lusas. Revista de la Universidad de Santander, nº2. parte I. pp. 259-261 (1979).