Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

A TRANFORMAÇÃO DE FOURIER NO ESPAÇO DAS ULTRADISTRIBUIÇÕES DE SUPORTE COMPACTO

J. Silva Oliveira

Escola Naval. Lisboa

Abstract. It is defined an homeomorfism, designed by Fourier Transform, of the compact support ultradistributions space on the whole plane exponential growth analytic functions space. It is refered several properties of this application, formally equals to classical properties. It is refered also an inversion formula and mencioned a discretized form of the same application.

1. - Os espaços U_c e H_e.

Seja $K_n = \{z: |z|>n\}$, $n = 1,2,\ldots$, e $\mathcal{B}_n$ o espaço das funções contínuas em $\bar{K}_n$, holomorfas em K_n e nulas no ∞. Considere-se em $\mathcal{B}_n$ a topologia definida pela norma $\| \phi \|_n = \sup_{z\in K_n} |\phi(z)|$.

O espaço U_c das ultradistribuições de suporte compacto identifica-se então, vectorial e topològicamente, com o limite indutivo dos espaços $\mathcal{B}_n$. Os elementos de U_c podem pois ser representados por funções holomorfas numa vizinhança de ∞ e nulas no ∞. U_c é portanto um espaço de Silva, logo completo, separado e reflexivo.

Se f é uma distribuição de suporte compacto a aplicação $\mathcal{S}: \mathcal{E}' \to U_c$, onde $\mathcal{E}'$ representa o espaço das distribuições de suporte compacto, definida por

$$\mathcal{S}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

onde $]a,b[$ é um qualquer intervalo que contenha o suporte de f, é uma aplicação linear, injectiva e contínua relativamente à topologia natural de $\mathcal{E}'$. Esta aplicação, designada por transformação de Stieldges, permite então identificar $\mathcal{E}'$ com um subespaço de U_c. Em particular a distribuição δ de Dirac identifica-se com a ultradistribuição representada pela função $-\frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{z}$.

Seja S_k, $k = 1,2,\ldots$, o espaço das funções inteiras ϕ tais que $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \left|\frac{\phi(z)}{e^{k|z|}}\right| < +\infty$ e nele considere-se introduzida a topologia definida pela norma

$$\|\phi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\frac{\phi(z)}{e^{k|z|}}\right|$$

relativamente à qual é um espaço de Banach.

O limite indútivo dos espaços S_k, que designamos por H_e e que se identifica com o espaço das funções inteiras de crescimento exponencial, é então um espaço de Silva tal como U_c.

2. - A transformação de Fourier. Propriedades.

Se $\phi\in U_c$ chama-se transformada de Fourier de ϕ à função inteira de crescimento exponencial, $\mathcal{F}(\phi)$, definida pelo integral

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_\Gamma e^{iz\lambda}\,\phi(\lambda)\,d\lambda$$

onde Γ representa uma circumferência, que contém no seu interior às singularidades de ϕ, orientada de modo a deixar à esquerda os pontos interiores.

Tem-se então

Teorema 1: $\mathcal{F}: U_c \to H_e$ *é um isomorfismo vectorial topológico.*

No espaço U_c definem-se um operador de derivação e um operador de translacção (complexa) que se reflectem nas funções holomorfas que representam as ultradistribuições pela derivação e translacção usuais. Representando por D e por τ_h, $h\in\mathbb{C}$, respectivamente os operadores de derivação e de translacção tem-se

Teorema 2: *Para todo o* $\phi\in U_c$

$$\text{i) } \mathcal{F}(D\phi) = -iz\,\mathcal{F}(\phi)$$

$$\text{ii) } \mathcal{F}(\tau_h\phi) = e^{ihz}\,\mathcal{F}(\phi)$$

$$\text{iii) } \mathcal{F}(\delta) = \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{z}\right) = 1$$

Pode ainda ver-se que a transformação de Fourier atrás definida é um prolongamento da transformação de Fourier usual no espaço das distribuições de suporte compacto.

Como resulta do Teorema 1 $\mathcal{F}$ é uma aplicação invertível; O teorema seguinte estabelece uma fórmula de inversão

Teorema 3: *Se* $\phi \in U_c$, $\Phi = \mathcal{F}(\phi)$ *e* Λ *é uma (qualquer) semi-recta com origem na origem do sistema de coordenadas,* ϕ *é o prolongamento a uma vizinhança de* ∞ *da função de z definida por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda} e^{-iz\lambda}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda .$$

O integral anterior é convergente apenas para os valores de z pertencentes a um semiplano que depende de Λ. A ultra-distribuição $\phi = \mathcal{F}^{-1}(\Phi)$ é então obtida por prolongamento analítico a uma vizinhança de ∞.

Tendo em atenção a noção de produto de ultradistribuições por funções inteiras introduzida por Sebastião e Silva em [1] é também possível estabelecer o resultado seguinte ainda em concordância formal com resultados habituais relativo à transformação de Fourier

Teorema 4: *Para todo o* $\phi \in U_c$ *tem-se*

$$\text{i) } \mathcal{F}(z.\phi(z)) = -i\, D_z \mathcal{F}(\phi)$$
$$\text{ii) } \mathcal{F}(e^{ihz}.\ \phi(z)) = \tau_{-h}\mathcal{F}(\phi), \quad h \in \mathbb{C}$$

3. - Discretização da transformação de Fourier

Dado que todo o elemento de U_c se pode representar por uma série de potências de $\frac{1}{z}$ é natural que aos resultados anteriores se possa dar uma forma discretizada. A própria definição de imagem de Fourier podia ser dada em novos termos como resultado do teorema seguinte:

Teorema 5: *Se* $\phi \in U_c$ *e então existem constantes complexas* a_n, $n = 1,2,\ldots$, *tais que* $\phi(z) = \sum_1^\infty a_n \frac{1}{z^n}$, *tem-se*

$$\mathcal{F}(\phi) = \sum_0^\infty \frac{2\pi i^{n-1}}{n!}\, a_{n+1}\, z^n .$$

Repare-se que a convergência numa vizinhança de ∞ da primeira série não só garante a convergência em todo o plano da segunda como também que esta última representa uma função inteira de crescimento exponencial.

BIBLIOGRAFIA

1 - *Sebastião e Silva, J.* - Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel. Math. Ann. Bd136, S. 58-96, 1958.

2 - *Sebastião e Silva, J.* - Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Rendiconti di Matematica, Série V, vol XIV, Fasc. 1-2, Roma, 1955.