Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

LIMITES PROYECTIVOS DE MEDIDAS Y CONVERGENCIA DE MARTINGALAS

Juan Luís Romero Romero

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Sevilla

ABSTRACT

In this paper are studied the martingales associated to a projective system of topological spaces. Theorem 1 proves that an arbitrary martingale is "essentially" a martingale associated to a projective system of compact spaces. A formulation of the Radon-Nikodým property for Banach spaces is given in Theorem 2.

Sea T un espacio topológico. Sea $S = \{T_i, \pi_{ij}, i \in I\}$ un sistema proyectivo de espacios topológicos tal que para cada $i \in I$ existe una aplicación continua $\pi_i : T \to T_i$ tal que, si $i \leq j$, $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$. Para cada $i \in I$ denotaremos por $\mathcal{B}_i$ el σ-álgebra de los conjuntos de Borel en T_i y escribiremos $\mathcal{B}^i = \pi_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$. Denotaremos por $\mathcal{B}$ el σ-álgebra de los conjuntos de Borel en T. La familia $\{\mathcal{B}^i, i \in I\}$ es una familia crecientemente dirigida de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$.

En primer lugar estudiaremos la forma que tienen las martingalas sobre T asociadas a la familia $\{\mathcal{B}^i, i \in I\}$. Con este fín se establece el Lema siguiente:

Lema 1.

Sea μ una medida de Radon sobre T, sea E un espacio de Banach y sea i I. Definamos $\mu_i = \pi_i \mu$. La condición necesaria y suficiente para que una función $f \in L_1(\mu; E)$ sea $\mathcal{B}^i$-medible (es decir $f \in L_1(T, \mathcal{B}^i, \mu/\mathcal{B}^i; E)$) es que exista una función $f_i : T_i \to E$ $\mathcal{B}_i$-medible y μ_i-integrable tal que

$$f = f_i \circ \pi_i \quad (\mathrm{mod}\ \mu/\mathcal{B}^i)$$

Si ahora $(f^i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ es una martingala sobre $L_1(\mu, E)$, en virtud del lema anterior, esta martingala es de la forma $(f_i \circ \pi_i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ donde, para cada $i \in I$, $f_i : T_i \to E$ es una función $\mathcal{B}_i$-medible y μ_i-integrable. Si para cada $i \in I$ definimos $\nu_i = f_i \mu_i$, se tiene, por ser $(f_i \circ \pi_i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ una martingala, que $\{\nu_i, i \in I\}$ es un sistema proyectivo de medidas vectoriales numerablemente aditivas tal que, para cada $i \in I$, $\nu_i \ll \mu_i$. En este caso diremos que $\{\nu_i, i \in I\}$ es un sistema proyectivo de medidas vectoriales absolutamente continuo respecto del sistema $\{\mu_i, i \in I\}$.

A continuación se prueba que toda martingala, con valores en un espacio de Banach E, definida a partir de un espacio de medida arbitrario (Ω, Σ, μ) y una familia crecientemente dirigida $\{\Sigma_i, i \in I\}$ de sub-σ-álgebras de Σ es "esencialmente" una martingala (topológica) del tipo considerado anteriormente. Más precisamente , se tiene el siguiente Teorema de Representación:

Teorema 1.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida arbitrario. Sea $\{\Sigma_i, i \in I\}$ una familia crecientemente dirigida de sub-σ-álgebras de Σ. Sea E un espacio de Banach. Sea T el espacio de Stone asociado a (Ω, Σ, μ) y sea λ la medida de Radon sobre T asociada a μ . Para cada $i \in I$ sea T_i el espacio de Stone asociado a $(\Omega, \Sigma_i, \mu/\Sigma_i)$ y sea λ_i la correspondiente medida de Radon sobre T_i. Existen aplicaciones continuas canónicas $\pi_i : T \to T_i$ y $\pi_{ij} : T_j \to T_i$ $(i \leq j)$ tales que $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$, $\lambda_i = \pi_i \lambda$, $\lambda_i = \pi_{ij} \lambda_j$. Existe también una familia $\{g_i, i \in I\}$ de funciones continuas ($g_i : T_i \to E$ para $i \in I$) asociada a la martingala $(f_i, \Sigma_i, i \in I)$ de tal manera que $(g_i \circ \pi_i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ es una martingala y tal que la aplicación $(f_i, \Sigma_i, i \in I) \to (g_i \circ \pi_i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ es inyectiva. Además la martingala $(f_i, \Sigma_i, i \in I)$ converge si y sólo si la martingala $(g_i \circ \pi_i, \mathcal{B}^i, i \in I)$ converge.

Este teorema, junto con las observaciones que siguen al lema 1, muestra la estrecha relación existente entre la teoría de martingalas y la de los límites proyectivos de medidas. Examinamos ahora el problema de la convergencia de martingalas desde este último punto de vista.

Si $(f^i, \mathcal{B}^i, i\in I)$ es una martingala acotada del tipo considerado al principio y $\nu = \{\nu_i, i\in I\}$ es el correspondiente sistema proyectivo de medidas vectoriales de Radon se verifica:

Proposición 1.-

El sistema ν define una medida vectorial finitamente aditiva sobre el álgebra $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}^i$ (y numerablemente aditiva sobre cada $\mathcal{B}^i$) que es de variación acotada y tal que si $\nu \ll \mu(\mathcal{C})$ (es decir si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $\|\nu(A)\| < \varepsilon$ siempre que $A\in \mathcal{C}$ y $\mu(A) < \delta$) entonces ν se puede extender a una medida numerablemente aditiva sobre $\sigma(\mathcal{C})$.

La demostración consiste en probar que ν es débilmente numerablemente aditiva en $\mathcal{C}$ y en utilizar el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn-Kluvanek (Cf.[1], pág.27).

En el estudio de la convergencia de martingalas, las martingalas uniformemente integrables (Cf. [1] ,pág.126) juegan un papel fundamental. Si continuamos con las notaciones anteriores, se verifica:

Proposición 2.

Una martingala acotada $(f^i, \mathcal{B}^i, i\in I)$ es uniformemente integrable en $L_1(T,\mathcal{B},\mu;E)$ si y sólo si $\nu \ll \mu(\mathcal{C})$.

Este último resultado nos vá a permitir establecer una nueva formulación de la propiedad de Radon-Nikodým para los espacios de Banach.

Puesto que decir que una martingala es acotada se traduce en que ν sea de variación total acotada , el que la martingala sea uniformemente integrable en que $\nu \ll \mu(\mathcal{C})$ y el que la martingala sea convergente se traduce en que exista una densidad de ν respecto de μ . El siguiente resultado

Teorema (Cf [1],pág.127)

Un espacio de Banach E tiene la propiedad de Radon Nikodým si y sólo si cada martingala uniformemente integrable y acotada, con valores en E, es convergente.

puede ser enunciado como un teorema genuino del tipo Radon-Nikodym.

Teorema 2.

Un espacio de Banach E tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si para cada sistema $(T,\mu;T_i,\pi_{ij},I)$ y cada medida finitamente aditiva ν con valores en E definida sobre $\mathcal{C}$, numerablemente aditiva sobre cada $\mathcal{B}^i$, de variación acotada y absolutamente continua respecto de μ en $\mathcal{C}$ tiene una densidad respecto a μ.

Corolario

Si $E = \mathbb{R}$, μ es una medida de probabilidad y ν es un sistema proyectivo de probabilidades de Radon tal que $\nu \ll \mu(\mathcal{C})$ entonces ν viene inducida por una probabilidad de Radon.

BIBLIOGRAFIA

[1].-DIESTEL,J. and UHL,J.J.Jr.:Vector Measures. Math.Surveys 15. Amer.Math.Soc.Providence.R.I.(1977)

[2].-DUNDFORD,N. and SCHWARTZ,J.T.:Linear Operator,Part I. Interscience. New York and London. (1958)

[3].-LACEY,H.E.The Isometric Theory of Classical Banach Spaces Springer Verlag. Berlin (1974).

[4].-METIVIER M. Limites Proyectives de Mesures, Martingales, Applications. Annali di Mat.Pura ed Appli. (IV). Vol LXI (1963)

[5].-METIVIER,M.:Martingales a Valeurs Vectorielles.Applications a la Derivation des Mesures Vectorielles, Ann. Inst. Four (Grenoble)17,Fasc.2, 175-208 (1967)

[6].-RIEFFEL,M.A.:The Radon-Nikodym Theorem for the Bochner Integral. Trans Amer. Math. Soc.131,466-487 (1968).