Pub. Mat. UAB
N° 1980
Actes VII JMHL

EL ESPACIO BIDUAL DE N (E)

Miguel Angel Revilla Ramos

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Valladolid

SUMMARY:

In this paper, it is shown that the bidual space of $N_\alpha(E)$ is formed by all E" valued sequences $\bar{w} = (w_n)_{n\in N}$ such that the set $\{w_n^\alpha \mid n \in N\}$ is equicontinuous on the strong dual of E.

Supuesto que E es un espacio vectorial topológico separado cuya topología está definida por una familia saturada de seminormas $\mathcal{P} = (P_i)_{i\in I}$, y $\alpha = (\alpha_n)_{n\in N}$ es una sucesión de escalares reales estrictamente positivos, la transformación del espacio de sucesiones de elementos de E en sí mismo

$$b_\alpha : S(E) \to S(E)$$

que envía
$$\bar{x} = (x_n)_{n\in N} \to \bar{x}^\alpha = (x_n^\alpha)_{n\in N} \text{ con } x_n^\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

propicia el estudio de diversas topologías (denominadas ponderadas en [2]) sobre subespacios de S(E). En [2] se estudian ampliamente dichas topologías y es el objeto de este trabajo completar algunos aspectos de dicho estudio.

Si denominamos $c_o(E)$ y $l^\infty(E)$ a los espacios de sucesiones convergentes a cero y acotadas en la topología de E respectivamente, se define $N_\alpha(E) = l^\infty(E) \cap b_\alpha^{-1}(c_o(E))$ dotado de la topología localmente convexa y separada inducida por la familia de seminormas

$$\mathscr{P}_\alpha = (\bar{p}_{i\alpha})_{i \in I} \quad \text{donde} \quad \bar{p}_{i\alpha}(\bar{x}) = \sup_n p_i(x_n^\alpha)$$

En el presente trabajo construimos el espacio bidual de $N_\alpha(E)$ basados en el conocimiento del bidual de $c_o(E)$ ([3], cap. IV, apartado 3) y del dual topológico de $N_\alpha(E)$, formado por todas las sucesiones $\bar{v} = (v_n)_{n \in N}$ de elementos de E' (dual de E) que verifican las dos propiedades siguientes:

1) Existe una seminorma $p \in \mathscr{P}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \left\| \frac{v_n}{\alpha_n} - \frac{v_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right\|_p < \infty$$

con $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ y $\|v\|_p = \sup_{p(x) \leq 1} |\langle x, v \rangle|$

2) $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{v_k}{\alpha_k} - \frac{v_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right)$ para todo $n \in N$

entendiéndose la convergencia puntual de la serie.

Si escribimos ${}^t b_\alpha$ para la aplicación transpuesta de b_α, y teniendo en cuenta que $b_\alpha(N_\alpha(E)) \subset c_o(E)$, de [1], cap. 3, § 12 corolario de prop. 3, se deduce que

PROPOSICION 1: La aplicación

$${}^t b_\alpha : c_o(E)' \to N_\alpha(E)'$$

que envía $\bar{u} = (u_n)_{n \in N} \to \bar{v} = (v_n)_{n \in N}$ con $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_n \frac{u_k}{\alpha_k}$

es un isomorfismo para las topologías fuertes

$$\beta(c_o(E)', b_\alpha(N_\alpha(E)) \quad \text{y} \quad \beta(N_\alpha(E)', N_\alpha(E))$$

sobre $c_o(E)'$ y $N_\alpha(E)'$ respectivamente.

COROLARIO: $N_\alpha(E)''$ es canónicamente identificable con un espacio de sucesiones de elementos de E" (bidual de E).

Más concretamente

PROPOSICION 2: Si $\bar{w} \in N_\alpha(E)''$, existe una única sucesión $(w_n)_{n \in N}$ de elementos de E", tales que si $\bar{v} = (v_n)_{n \in N} \in N_\alpha(E)'$

$$<\bar{v},\bar{w}> = \sum_{n=1}^{\infty} <v_n, w_n>$$

El resultado principal del trabajo es la caracterización de las sucesiones de elementos de E" que representan elementos del bidual de $N_\alpha(E)$ en el sentido que indica la proposición.

TEOREMA: Una sucesión $\bar{w} = (w_n)_{n \in N}$ de elementos de E" representa un elementos de $N_\alpha(E)''$ si, y sólo si, la sucesión de elementos (de E")

$$\bar{w}^\alpha = (w_n^\alpha)_{n \in N} \quad \text{donde} \quad w_n^\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k}{s_n}, \text{ es tal que}$$

el conjunto $\{w_n^\alpha | n \in N\} \subset E''$ es equicontinuo sobre E' dotado de la topología $\beta(E',E)$.

Demostración: Si denominamos también $b_\alpha: S(E'') \to S(E'')$ a la aplicación extensión de b_α, de [3] prop. 4.8 se deduce que el teorema quedará probado viendo que $N_\alpha(E)'' = b_\alpha^{-1}(c_o(E)'')$.

De la proposición 1 se deduce que la aplicación

$${}^{tt}b_\alpha : [N_\alpha(E)' - \beta(N_\alpha(E)', N_\alpha(E))]' \to [c_o(E)' - \beta(c_o(E)', b_\alpha(N_\alpha(E)))]'$$

es biyectiva, y puesto que el primer espacio es $N_\alpha(E)''$, falta ver que el espacio imagen es precisamente $c_o(E)''$ y que la aplicación ${}^{tt}b_\alpha$ es la restricción de b_α a $N_\alpha(E)''$.

Parte 1: Se trata de ver que la topología $\beta(c_o(E)', b_\alpha(N_\alpha(E)))$ sobre $c_o(E)'$ es compatible con la paridad $<c_o(E)', c_o(E)''>$. Como es menos fina que $\beta(c_o(E)', c_o(E))$, la cual es obviamente compatible, bastará probar que es más fina que la débil sobre $c_o(E)'$. Dado, pues, $\Phi \in c_o(E)''$ debemos probar la existencia de un acotado $B \subset b_\alpha(N_\alpha(E))$, tal que $\{\phi\}^o \supset B^o$. La existencia ([4], cap.IV, cor. de 5.4) de una red acotada $(\bar{x}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $c_o(E) \subset c_o(E)''$ que converge a Φ por la topología $\sigma(c_o(E)'', c_o(E)')$ nos permite construir una nueva red

$(\bar{x}_{J,\gamma})_{J\in P_F(N),\gamma\in\Gamma}$ (siendo $P_F(N)$ las partes finitas de N)

que también converge a Φ por la misma topología y cuyos elementos son sucesiones que pertenecen a $b_\alpha(\dot{N}_\alpha(E))$ y constituyen el conjunto acotado que resuelve el problema.

Parte 2: Se demuestra en primer lugar que si $\bar{x}\in N_\alpha(E)\subset \subset N_\alpha(E)''$, es cierto que ${}^{tt}b_\alpha(\bar{x}) = b_\alpha(\bar{x})$ como sucesiones de elementos de E", pues teniendo en cuenta que $b_\alpha(N_\alpha(E))\subset c_o(E) \subset \subset c_o(E)''$; si $\bar{u}$ es un elemento arbitrario de $c_o(E)'$ resulta que $\langle\bar{u},{}^t({}^tb_\alpha)\bar{x}\rangle = \langle{}^tb_\alpha(\bar{u}),\bar{x}\rangle = \langle\bar{x},{}^tb_\alpha(\bar{u})\rangle = \langle b_\alpha(\bar{x}),\bar{u}\rangle = \langle\bar{u},b_\alpha(\bar{x})\rangle$ y la representación de los elementos de $c_o(E)''$ por sucesiones es única ([3], prop.4.7)

Teniendo ahora en cuenta que la aplicación ${}^tb_\alpha$ es continua para las topologías $\beta(c_o(E)',c_o(E))$ y $\beta(N_\alpha(E)',N_\alpha(E))$ y tomando éstas como iniciales se deduce de [1], cap.3,§12, cor. de prop. 3 se deduce que la aplicación

$${}^{tt}b_\alpha: N_\alpha(E)'' \to c_o(E)''$$

es continua para las topologías respectivas $\sigma(N_\alpha(E)'',N_\alpha(E)')$ y $\sigma(c_o(E)'',c_o(E)')$.

Ahora podemos pasar del caso particular probado al general, apoyándonos en el resultado antes indicado ([4]cap.IV, cor. de 5.4). Sea $\bar{w} = (w_n)_{n\in N}\in N_\alpha(E)''$ y $(\bar{w}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ la red de elementos de $N_\alpha(E)$ convergente a $\bar{w}$ por la topología débil.Si demostramos que

$$b_\alpha^{-1}({}^{tt}b_\alpha(\bar{w})) = \bar{w}$$

el resultado quedará probado, ya que b_α es biyectiva. La demostración de esta igualdad es ya un problema puramente técnico teniendo en cuenta la continuidad probada de ${}^{tt}b_\alpha$ y dado que E" es separado con la topología $\sigma(E'',E')$.

COROLARIO 1: $N_\alpha(E)''\supset b_\alpha^{-1}(l^\infty(E))$, ya que $l^\infty(E)$ puede considerarse contenido en $c_o(E)''$ ([3],cap.IV, apartado 5).

COROLARIO 2: $N_\alpha(E)$ no es semireflexivo, pues considerados como subespacios de $S(E'')$, tenemos $N_\alpha(E)\subset l^\infty(E)\subset b_\alpha^{-1}(l^\infty(E))\subset N_\alpha(E)''$ y al menos las dos primeras inclusiones son estrictas.

COROLARIO 3: Si E es normado $N_\alpha(E)'' = b_\alpha^{-1}(l^\infty(E''))$, pues en este caso $c_o(E)''$ y $l^\infty(E'')$ coinciden ([3], prop.4.9)

COROLARIO 4: Si E = K(R ó C) el bidual del espacio de sucesiones $\bar{x}$ tales que $b_\alpha(\bar{x})$ converge a cero, es el espacio de las sucesiones $\bar{y}$ tales que $b_\alpha(\bar{y})$ es acotada.

BIBLIOGRAFIA

1. HORVATH,J.: Topologiacal Vector Spaces and Distributions. Addison-Wesley. New York (1966).
2. REVILLA RAMOS,M.A.: Topologías ponderadas en espacios de sucesiones vectoriales. Tesis doctoral (1980).
3. SANZ SERNA,J.: Espacio de sucesiones en espacios vectoriales. Tesis doctoral (1977).
4. SCHAEFER,H.H.: Topological Vector Spaces. Springer-Verlag. New York (1971).