Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

# DIFERENCIAS DE FUNCIONES DE PRYM

José Garay de Pablo

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Resumen: Se estudia el comportamiento de funciones que se obtienen como diferencias de dos funciones de Prym, observando una gran analogía con las funciones exponenciales. Estas funciones juegan un papel interesante en ciertos problemas sobre dieléctricos. En este trabajo se obtienen resultados para ciertos casos particulares, quedando pendiente hacer un estudio más general.

---

Sea la función $F(z)=P(b,z)-P(a,z)$, $(0<a<b<+\infty)$, donde las funciones del segundo miembro son las correspondientes funciones de Prym, también llamadas funciones gamma incompletas.

La representación integral de F es

(1) $$F(z)=\int_a^b e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

y por consiguiente

(2) $$\operatorname{Re} F(z)=\int_a^b e^{-t}\, t^{x-1} \cos(y \log t)\, dt$$

(3) $$\operatorname{Im} F(z)=\int_a^b e^{-t}\, t^{x-1} \operatorname{sen}(y \log t)\, dt$$

De la misma representación integral se deduce que F es entera, y ó bien observando (2) y (3) ó también como consecuencia del principio de la reflexión de Schwarz resulta $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$ por lo cual nos limitaremos a estudiar F en el semiplano superior.

Veremos con detalle el caso $1<a<b$, señalando que para el caso $a<b<1$ un estudio paralelo da resultados análogos.

Teorema 1. Si $F(z)\neq 0$ resulta $F^{(n)}(z)\neq 0$ $\forall n\in N$.

Demostración: Si $F=U+iV$, derivando en (2) se deduce

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \int_a^b e^{-t}\, t^{x-1}\, (\log t)^n \cos(y \log t)\, dt$$

y en consecuencia si $U(z)\neq 0$ se tiene $\frac{\partial^n U}{\partial x^n}(z)\neq 0$ $\forall n\in N$. Análoga relación existe entre V y sus derivadas.

Ahora basta que

$$F^{(n)} = \frac{\partial^n U}{\partial x^n} + i\,\frac{\partial^n V}{\partial x^n}$$

Teorema 2.-$\forall\varepsilon > 0$, existe $x_0\in R$ tal que $|F(x+iy)| < \varepsilon$ $\forall x < x_0$, $\forall y\in R$.

Demostración: Basta observar que en las integrales (2) y (3) el factor $t^{x-1}$ converge a 0 y los otros factores están acotados uniformemente respecto de y.#.

En lo que sigue haremos $\alpha = \dfrac{\pi}{2(\log b-\log a)}$ y $A=\{z\in C, 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$.

Teorema 3.-Sea K un compacto en $[0,\alpha)$. $\forall M > 0$, existe $x_0\in R$ tal que $|F(x+iy)| > M$ $\forall x > x_0$, $\forall y\in K$.

Demostración: Sean

$$\delta = \alpha - \max K, \qquad \varepsilon < \delta\,\frac{\log b-\log a}{\log b+\log a}$$

Si ahora $\lambda\in K$, $\lambda-\varepsilon < y < \lambda+\varepsilon$, $a\leq t\leq b$, resulta que $y \log t$ varía dentro de un intervalo de longitud menor que $\pi/2$. Por lo ta tanto una al menos de las funciones sen, cos, -sen ó -cos se mantiene estrictamente mayor que un cieto r positivo. Entonces existe $\xi > 0$, tal que

$$|F(x+iy)| > M, \forall x > \xi, \forall y\in(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon).$$

Ahora basta aplicar la compacidad de K.#.

Teorema 4.-F no se anula en A.

Demostración: Se razona en forma análoga a la demostración del teorema anterior, rstudiando el intervalo de variación de $y \log t$.#.

Corolario.-F es conforme en A.

Demostración: Es consecuencia de los teoremas 1 y 4.#.

Teorema 5.-Sea h un número natural menor que

$$\frac{\log b}{\log b-\log a}$$

Entonces F transforma la banda

$$\frac{\pi(h-1)}{2\log a} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi h}{2\log b}$$

en un subconjunto del j-ésimo cuadrante, donde $j\equiv h(4)$.

Demostración:En primer lugar nótese que la banda es no vacía por la desigualdad del enínciado.De la misma desigualdad se deduce que cuando t e y varían en sus correspondientes intervalos,se tiene

$$\frac{\pi(h-1)}{2} < y \log t < \frac{\pi\ h}{2}$$

y en consecuencia

$$\operatorname{sen}(y \log t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } j=1,2 \\ < 0 & \text{si } j=3,4 \end{cases}$$

$$\cos(y \log t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } j=1,4 \\ < 0 & \text{si } j=2,3 \end{cases}$$

y como los otros factores de los integrandos de (2) y (3) son positivos,resulta la afirmación del teorema.#.

Teorema 6.-En las condiciones del teorema anterior y si además $h > 1$,existe una curva analítica $\Gamma$ contenida en la banda B:

$$\frac{\pi(h-1)}{2\log b} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi(h-1)}{2\log a}$$

tal que

a)La proyección $z \to \operatorname{Re} z$ de $\Gamma$ sobre R es biyectiva.

b)$F(\Gamma)$ rstá contenida en el semieje que separa los cuadrantes j-1 y j.

c)$F(B')$ está contenida en el j-ésimo cuadrante,donde $B'$ es la parte de la banda B superior a $\Gamma$.

d)$F(B'')$ está contenida en(j-1)-ésimo cuadrante siendo $B''$ la parte de la banda B inferior a $\Gamma$.

Demostración:Lo haremos para el caso particular de h=2,siendo los demás casos de tratamiento análogo.

Fijamos x en R y consideramos la función $G(y)=\operatorname{Im} F(x+iy)$.

Se tiene

$$G'(y) = -\int_a^b e^{-t}\, t^{x-1} \log t \operatorname{sen}(y \log t)\, dt$$

Por razonamientos de igual naturaleza que los anteriores cuando

$$\frac{\pi}{2\log a} < y < \frac{3\pi}{2\log b}$$

resulta $G'(y) < 0$ y por consiguiente G es esrtictamente decreciente.Observando ahora los valores de G en los extremos de este intervalo y en los del enunciado del teorema se sigue que existe un $g(x)$ en el intervalo

$$\left(\frac{\pi}{2\log b},\frac{\pi}{2\log a}\right)$$

tal que Im $F(x+iw)$ es mayor,igual o menor que cero según que $w$ sea respectivamente menor,igual o mayor que $g(x)$.

Finalmente $\Gamma$ es una curva analítica por ser la imagen por $F^{-1}$ de una semirrecta.#.

En vista de los resultados que preseden aparece en el plano complejo una sucesión finita de bandas tal que la imagen de cada $B_n$ está contenida en el n-ésimo cuadrante.Notaremos con $\Gamma_n$ la curva que separa $B_n$ y $B_{n+1}$.

<u>Teorema 7</u>.-Sea

$$D_n=\left(\bigcup_{k=0}^{3} B_{n+k}\right)\cup\left(\bigcup_{k=0}^{2}\Gamma_{n+k}\right)$$

Entonces $F$ es una biyección entre $D_n$ y $C-i^{n-1}R^{+}$

<u>Demostración</u>:La inyectividad se prueba utilizando la siguiente propiedad de las funciones analíticas:

"Sea f una función analítica sobre una región convexa,tal que la parte real de la derivada es positiva.Entonces f es inyectiva."

En nuestro caso hay que considerar como región convexa las bandas que aparecen en los enunciados de los teoremas 5 y 6,y como función f las funciones $F,-F,iF$ ó $-iF$ según los casos.

La suprayectividad es consecuencia de los teoremas 2 y 3 y del corolario del teorema 4.#.