Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL CON VALORES EN UN ESPACIO VECTORIAL DE CONVERGENCIA. I. DERIVADAS.

Fernando Castañeda Bravo

Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de Valladolid

Abstract. Any order derivation of functions of a real variable with values in a convergence vector space over $\mathbb{R}$ (c.v.s.) has been defined. We build up a c.v.s. isomorphism between a c.v.s. F and the c.v.s. $\mathcal{L}_c(\mathbb{R};F)$. We prove a function to be of class C^n if, and only if, it is of class C^n_c, $n \in \mathbb{N}$. A formula for the derivative of any order of the product of m functions, and another one for the higher derivative of a composed function, are given. Some other results have been established.

Introducción. El objeto de este trabajo es definir la derivación, de cualquier orden, de funciones de variable real valoradas en un espacio vectorial de convergencia sobre $\mathbb{R}$ (abr.: e.v.c.). Por un lado, extendemos a este caso algunos resultados clásicos para espacios de Banach (ver [2], cap. I), o, para espacios vectoriales topológicos y en particular espacios localmente convexos (ver, entre otros, [4], Apen. 1; [1] o [5]); por otro lado, a partir de estos resultados, definiremos y estudiaremos (en un trabajo posterior) la integración de este tipo de funciones (ver, por ejemplo, [2], cap. II; [4], Apen. 2) lo que nos permitirá dar una solución satisfactoria a los problemas que dejamos planteados en [3] (ver introducción); entre otros, un teorema de incrementos finitos y una fórmula de Taylor para aplicaciones entre e.v.c.

Las notaciones y definiciones empleadas pueden verse en [3]. Todas las funciones que vamos a considerar estarán definidas en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y tomarán sus valores en un e.v.c.. Con la letra I siempre representaremos un intervalo de $\mathbb{R}$ no reducido a un punto.

1. Derivada primera.

Definición 1.1: Sean F un e.v.c. y una función $f:I \to F$. Diremos que f es derivable en un punto $t_0 \in I$ si existe en F el

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

El valor de este límite lo llamaremos derivada primera de f en t_0 y lo escribiremos $f'(t_0)$.

Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto.

Son ejemplos de funciones derivables las constantes y las lineales (que necesariamente, son continuas).

Cuando una función sea derivable en todo punto diremos, simplemente, que es derivable; a la función $t \to f'(t)$, que representamos f', le llamaremos derivada de f.

Definición 1.2: Una función $f:I \to F$ se dice de clase C^1 si es derivable en I y si su función derivada $f':I \to F$ es continua.

Considerando $\mathbb{R}$ (con su topología usual) como un e.v.c. y teniendo en cuenta las definiciones dadas en [3] (cap. III y siguientes) se obtiene el siguiente resultado

Proposición 1.3: Una función continua $f: \mathbb{R} \to F$ es de clase C^1 si y sólo si es de clase C^1_c.

Además, nos encontramos con la fórmula clásica, $f'(t) = Df(t)1$, que relaciona la derivada con la diferencial.

La siguiente proposición que generaliza un conocido resultado clásico, será de gran utilidad.

Proposición 1.4: Para cualquier e.v.c. F existe un isomorfismo canónico entre los e.v.c. F y $\mathcal{L}_c(\mathbb{R};F)$.

Así pues, salvo isomorfismo, $f'(t)$ puede identificarse con $Df(t)$. Con ayuda de estos resultados vamos a deducir de forma sencilla, utilizando, casi constantemente, resultados obtenidos en [3] (cap. III y IV), algunas propiedades fundamentales de la derivación, para este tipo de funciones.

Proposición 1.5: Sean E y F dos e.v.c.; u una aplicación lineal y continua de E en F. Si una función $f: \mathbb{R} \to E$ es de clase C^1, entonces la función compuesta $u \circ f: \mathbb{R} \to F$ es de clase C^1 y para cada t, $\quad (u \circ f)'(t) = u(f'(t))$.

Proposición 1.6: Sea $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ el e.v.c. producto de los m e.v.c. $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Sea una función $f: \mathbb{R} \to F$.

Si f es de clase C^1, entonces para cada j, f_j es de clase C^1 y para cada t, $f_j'(t) = pr_j(f'(t))$.

Recíprocamente, si para todo j, f_j es de clase C^1 entonces f es de clase C^1 y para cada t

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j(f_j'(t))$$

Sea F el e.v.c. producto considerado en la prop. anterior y sea una aplicación $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to [x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m]$ multilineal y continua de F en un nuevo e.v.c. E.

Proposición 1.7: Para cada indice j, sea una función $f_j: \mathbb{R} \to F$ de clase C^1. Entonces la función $h: \mathbb{R} \to E$ definida por

$$h(t) = [f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_m(t)]$$

es de clase C^1 y para cada t se tiene

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{m} [f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(t) \cdot f_i'(t) \cdot f_{i+1}(t) \cdot \ldots f_m(t)]$$

Terminamos esta primera parte con el siguiente resultado

Proposición 1.8: Sea f una función numérica y g una función definida en $\mathbb{R}$ y valorada en un e.v.c. F. Si f y g son de clase C^1, entonces lo es $g \circ f$ y para cada t, $(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$.

2. Derivadas de orden superior.

En esta segunda parte vamos a extender los resultados obtenidos para la derivada primera a las derivadas de cualquier orden.

Definición 2.1: Sean F un e.v.c. y $f: I \to F$ una función. Diremos que f es dos-veces derivable en $t_0 \in I$ si existe f' en un entorno de t_0 y es derivable en t_0.

La derivada de f' en t_0 la llamaremos derivada segunda de f en t_0 y la representaremos $f''(t_0)$. Si esta derivada segunda existe en todo punto, la función $t \to f''(t)$, que representamos f", le llamaremos aplicación derivada segunda de f.

Por recurrencia se define, de igual forma, la función derivada n-ésima de f, que denotamos $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Diremos, en fin, que f es indefinidamente derivable, si es n-veces derivable, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2: Una función $f: I \to F$ es de clase C^n, $n \in \mathbb{N}$, si es de clase C^1 y f' es de clase C^{n-1}.

Se dice que f es de clase C^∞ si es de clase C^n para todo n.

Ahora, es inmediato comprobar que la prop. 1.3 sigue siendo válida si se sustituye ser de clase C^1 (resp., C^1_c) por ser de clase C^n (resp., C^n_c). Y, de la misma forma, el comentario siguiente a la citada prop. se extiende en el sentido de que $f^{(n)}(t) = D^n f(t)(1)^n$.

Ejemplos de funciones de clase C^∞ son las funciones constantes y las lineales y continuas.

Proposición 2.3: Las prop. 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 siguen siendo válidas si se sustituye, en cada caso, ser de clase C^1 por ser de clase C^n.

En cuanto a las fórmulas allí obtenidas, tenemos:

Las dos primeras sirven sustituyendo derivada primera por derivada de orden n. La correspondiente a la prop. 1.7 es,

$$(1)\quad h^{(n)}(t) = \sum \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} \left[f_1^{(k_1)}(t)\cdot f_2^{(k_2)}(t)\cdot\ldots\cdot f_m^{(k_m)}(t)\right]$$

estando la suma extendida a todos los sistemas (k_i) de enteros tales que $0 \leq k_i \leq n$; $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$. Esta fórmula (1) para el caso m=2 es la clásica y conocida fórmula de Leibniz para la derivada n-ésima del producto.

Por último, también puede darse una fórmula para la derivada de orden superior de una función compuesta, que aqui no exponemos por falta material de espacio.

Antes de terminar quiero expresar mi agradecimiento al Profesor D. Juan José Gutiérrez Suárez por el excelente interés y ayuda que en todo momento me presta.

Referencias.

[1] AVERBUKH, V.I. and SMOLJANOV, D.G.: The theory of differentiation in linear topological spaces. Russian Math. Surveys,27,6(1967)201

[2] BOURBAKI, N.: Fonctions d'une variable réelle. ASI 1074.Hermann.Paris.

[3] CASTAÑEDA, F.: Cálculo diferencial en espacios vectoriales de convergencia. Tesis. Universidad de Valladolid. 1979.

[4] KELLER, H.H.: Differential calculus in locally convex spaces. L. N. in Math. Vol. 417. Springer. Berlin. 1974

[5] PENOT, J.P.: Calcul différentiel dans les éspaces vectoriel topologiques. Studia Math., 47(1973)1-23.