Púb. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

FUNCIONES ARITMETICAS DE TIPO MANGOLDT Λ_k^* $\Lambda_{k,t}^*$

Catalina Calderón García

Dpto. de Matemáticas
Universidad del Pais Vasco

ABSTRACT.- From a function of type Möbius, μ_k^*, it is defined ano ther two functions Λ_k^* and $\Lambda_{k,t}^*$. Them, it is obtained, as a particular case, the Mangoldt's function Λ.

Para cada k entero positivo definimos la función aritmética Λ_k^* por

$$\Lambda_k^*(n) = \sum_{d/n} \mu_k^*(d) \log n/d \tag{1}$$

donde μ_k^* es una función generalizada de Möbius que se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\mu_k^*(1) = 1 \\ &\mu_k^*(n) = 0 && \text{si } p^{k+1}/n \text{ para algún } p \text{ primo} \\ &\mu_k^*(n) = (-1)^{\Omega(n)} && \text{si } n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \ 0 \le \alpha_i \le k, \\ & && \Omega(n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \end{aligned} \tag{2}$$

Si $k=1$ la función μ_k^* coincide con la función de Möbius usual y por lo tanto la fórmula anterior (1) da la función de Mangoldt.

La serie de Dirichlet que genera la función Λ_k^* se obtiene a partir de la correspondiente a la función μ_k^*. Esto es, para la función μ_k^* se verifica

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k^*(n)\, n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\, \gamma_k(s) \quad , \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

donde

$$(4) \qquad \gamma_k(s) = \begin{cases} \dfrac{\zeta((k+1)s)}{\zeta(2(k+1)s)} & \text{si } k \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{1}{\zeta((k+1)s)} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

de (3) y (4) y diferenciando término a término la función Zeta se obtiene en el semiplano $\mathrm{Re}\ s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_k^*(n)\cdot n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \log n \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_k^*(n)\cdot n^{-s}$$

Podemos escribir para Λ_k^* la expresión

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_k^*(n)\cdot n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\ \zeta(2s)\ \gamma_k(s) \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

donde $\gamma_k(s)$ está dada por (4).

Se observa en (5) que cuando $k=1$ se obtiene la serie correspondiente a la función de Mangoldt usual.

Si $k=2$ la función Λ_2^* y la función β definida para $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ por $\beta(n) = \alpha_1 \dots \alpha_r$ siendo los $\alpha_i > 0$ y p_i primos distintos se verifica una propiedad que relaciona estas funciones con la función μ de Möbius

$$(6) \qquad \Lambda_2^*(n) = -\sum_{d/n} \mu(d) \log d\ \ \beta(n/d).$$

Una generalización inmediata de la función Λ_k^* es la siguiente. Para k, t números naturales cualesquiera definimos la función $\Lambda_{k,t}^*$ por la expresión

$$(7) \qquad \Lambda_{k,t}^*(n) = \sum_{d/n} \mu_k^*(d)\ (\log n/d)^t$$

Si $t=1$ obtenemos la función (1), $\Lambda_{k,1}^*(n) = \Lambda_k^*(n)$.

La diferenciación término a término de la función Zeta nos da

$$(8) \qquad \zeta^{(t)}(s) = (-1)^t \sum_{n=1}^{\infty} \log^t n \cdot n^{-s}$$

de (3), (4) y (8) vemos que

$$(9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{k,t}^*(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k^*(n) \cdot n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \log^t n \cdot n^{-s}$$

Así obtenemos para la función $\Lambda_{k,t}^*$

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{k,t}^*(n) \cdot n^{-s} = (-1)^t \frac{\zeta^{(t)}(s)}{\zeta(s)} \zeta(2s)\ \gamma_k(s) \qquad \text{Re } s > 1$$

donde $\gamma_k(s)$ viene dada por (4).

IVIC, A. |4|, define una función generalizada de Mangoldt Λ_t de la siguiente forma

$$(11) \qquad \Lambda_t(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\ (\log n/d)^t$$

y obtiene la serie de Dirichlet para esta función, esto es

$$(12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_t(n) \cdot n^{-s} = (-1)^t \frac{\zeta^{(t)}(s)}{\zeta(s)}$$

Obtendremos a continuación una expresión que relaciona la función $\Lambda_{k,t}^*$ con la función Λ_k^* y Λ_t.

De la identidad

$$\frac{1}{\zeta(s)}(-1)^t \frac{\zeta^{(t)}(s)}{\zeta(s)} \zeta(2s)\ \gamma_k(s) = (-1)^t \frac{\zeta^{(t)}(s)}{\zeta(s)} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \gamma_k(s)$$

se deduce la relación

$$\sum_{d/n} \Lambda^*_{k,t}(d)\ \mu(n/d) = \sum_{d/n} \Lambda_t(d)\ \mu^*_k(n/d) \tag{13}$$

Aplicando ahora la inversión de Möbius a la función

$$f(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\ \Lambda^*_{k,t}(n/d)$$

obtenemos por último que

$$\Lambda^*_{k,t}(n) = \sum_{d/n} \sum_{m/d} \Lambda_t(m)\ \mu^*_k(d/m).$$

BIBLIOGRAFIA

|1| CALDERON G., C.: "Sobre unas funciones generalizadas de Möbius y Euler". VI Jornadas de Matemáticas Hispano-Lusas. Santander, 1979.

|2| CALDERON G., C.: "Algunas propiedades de las funciones μ^*_k, ϕ^*_k ". Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.

|3| CHANDRASEKHARAN, K.: "Arithmetical Functions". Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

|4| IVIC, A.: "An Application of Dirichlet Series to Certain Arithmetical Functions". Mathematika Balkanica, 3, 158-165, Belgrado, 1973.

|5| PRACHAR, K.: "Prinzahlverteilung". Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.