

SOBRE ELS PUNTS PERIÒDICS DE LES FUNCIONS CONTÍNUES DE LA CIRCUMFERÈNCIA

Lluís Alsedà

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract.— We study the relation between the degree of a continuous map of the circle into itself with its periodic points. We give a complete answer if the degree is different from -1 and 1 .

En els darrers anys problemes concrets en Sistemes Dinàmics i en Biologia han portat a l'estudi dels punts periòdics de les aplicacions contínues de la recta en la recta i posteriorment de la circumferència (veure (4)).

Previament donem algunes definicions que valen en ambdós casos. Definim f^n inductivament com segueix : $f^1=f$, $f^n=f \circ f^{n-1}$; f^0 serà l'aplicació identitat. Sigui $x \in \mathbb{R}$ ó S^1 , direm que x és punt fix de f si $f(x)=x$ i x serà un punt periòdic de f si existeix un enter positiu tal que $f^m(x)=x$. Al més petit n tal que $f^n(x)=x$ l'anomenem periode de x i a x punt n -periòdic. $P(f)$ és el conjunt dels enters positius que són periode d'algun punt periòdic de f .

En el cas de les funcions contínues de la recta tenim molta informació, bàsicament en el teorema de Šarkovskii (veure (5)).

Teorema (Šarkovskii). Sigui $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i suposem que $n \in P(f)$. Llavors $m \in P(f)$ per a tot m a la dreta de n en la següent ordenació : $3, 5, 7, 9, \dots, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, \dots, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, \dots, 8, 4, 2, 1$.

D'ací es dedueixen immediatament els següents corol·laris:

Corol·lari.1. Sigui $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i suposem que té un nombre finit de punts periòdics. Llavors existeix $n > 0$ tal que $P(f) = \{1, 2, \dots, 2^n\}$.

Corol·lari.2. Sigui $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i suposem que $3 \in P(f)$. Llavors $P(f) = \mathbb{N}$.

Cal dir que el teorema és igualment vàlid si considerem funcions contínues d'un interval tancat de la recta en ell mateix.

En el cas de les funcions contínues de la circumferència, que és l'objecte del nostre treball tenim poca informació. Els resultats més recents els devem a L.Block (veure (1)). Dels dos que exposem a continuació, el primer ha estat provat simultàniament per J.Llibre a (3) utilitzant altres tècniques.

Teorema (Block-Llibre). Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que té un nombre finit de punts periòdics. Llavors existeixen n i m , enters positius, amb $n > 0$ i $m > 1$ tals que $P(f) = \{m, 2.m, 4.m, \dots, 2^n.m\}$.

Teorema (Block). Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$. Llavors les següents propo-
sicions són equivalents:

- 1) $P(f) = \mathbb{N}$
- 2) $P(f) \supset \{1, 2, 3\}$

Observem que aquests resultats són completament anàlegs als corol·laris que s'obtenen quan $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

D'altra banda és conegut que $|1 - \text{grau}(f)|$ és el nombre mínim de punts fixes que té una funció contínua de la circumferència (De fet $|1 - \text{grau}(f)|$ és el numero de Nielsen de l'aplicació f). Es clar, per tant, que si $\text{grau}(f) \notin \{-1, 0, 1\}$ f té infinits punts periòdics. Aquest resultat l'hem pogut millorar de la següent manera:

Teorema.A. Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i sigui $\text{grau}(f) \notin \{-1, 0, 1\}$. Llavors $P(f) = \mathbb{N}$, excepte quan $\text{grau}(f) = -2$ que tenim $P(f) \supset \mathbb{N} - \{2\}$.

Amb el corol.lari.1 és immediat el següent corol.lari:

Corol.lari.3. Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que té un nombre finit de punts periòdics. Llavors $\text{grau}(f) \in \{-1, 0, 1\}$. Si $m \neq 1$, essent m el donat en el teorema(Block-Llibre), tenim que $\text{grau}(f) = +1$.

Per provar aquest resultat, utilitzem les tècniques que exposem a continuació.

Siguin R, K i L arcs propis tancats de S^1 . Direm que R f -recobreix K si existeix I , arc tancat, tal que $I \subset R$ i $f(I) = K$. Anàlogament R f -recobreix $K \cup L$ si existeix J , arc tancat, tal que $J \supset K \cup L$ i R f -recobreix J .

El següent lema és anàleg al que van utilitzar Li i Yorke en el seu article "Period three implies chaos" (veure (2)).

Lema.1. Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que existeixen R i L , arcs propis tancats de S^1 , tals que R f -recobreix $R \cup L$, L f -recobreix R i és certa una de les següents afirmacions:

- a) $f^2(R \cap L) \cap R = \emptyset$
- b) $R \cap L = \{p\}$, $f(p) = q$ punt fix de f i $q \notin L$.

Llavors f té punts n -periòdics per a tot $n \geq 2$.

Es sap que per cada $f \in C^0(S^1, S^1)$ existeix una elevació $\bar{f}$ contínua que fa conmutatiu el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & S^1 \end{array}$$

La utilització acurada de les elevacions ens permet provar l'existència d'interval·ls adequats per utilitzar el nostre lema.

Semblants tècniques permeten provar el següent resultat quan $\text{grau}(f) = 0$.

Teorema B. Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que $\text{grau}(f) = 0$. Llavors si $f(S^1) = S^1$ tenim que $P(f) = \mathbb{N}$ i si $f(S^1) \neq S^1$ val Šarkovskii. Es a dir si $n \in P(f)$, per a tot m a la dreta de n en l'ordenació del teorema (Šarkovskii), tenim que $m \in P(f)$.

Fins aquí aconseguim resoldre el problema completament, en el cas $\text{grau}(f)=\pm 1$; també ho aconseguim si f és homeomorfisme. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ solament arribem a un resultat parcial. Per enunciar-ho necessitarem una definició prèvia.

Teorema C. Sigui $f: S^1 \longrightarrow S^1$ un homeomorfisme. Llavors són certes les tres proposicions següents:

- 1) $\text{grau}(f) = +1$ ó -1
- 2) si $\text{grau}(f) = +1$ i $P(f) \neq \emptyset$ existeix n , enter positiu, tal que $P(f) = \{n\}$
- 3) Si $\text{grau}(f) = -1$ tenim que $P(f) = \{1\}$ ó $P(f) = \{1, 2\}$

Per a cada $p \in S^1$ sigui T_p el conjunt dels $q \in S^1$ tals que $f(p) = f(q)$. Considerem els intervals que f -recobreixen S^1 amb extrems a T_p ordenats per inclusió. El mínim de cada cadena, serà, per definició, una branca de f de punt base p .

Teorema D. Sigui $f \in C^0(S^1, S^1)$ i suposem que $\text{grau}(f)=\pm 1$. Si existeix $p \in S^1$ tal que f té més d'una branca de punt base p tenim que $P(f) = \mathbb{N}$.

Si per a tot $p \in S^1$ f té una sola branca B_p de punt base p , són certes les següents proposicions:

- 1) Si $f(S^1 - B_p) = S^1$, tenim que $P(f) \supset \mathbb{N} - \{1\}$
- 2) Suposem que existeix $p \in S^1$ tal que $S^1 - B_p$ f -recobreix B_p i és certa una de les següents afirmacions:

- a) existeix A , arc propi tancat de S^1 , tal que $f(A) = f(S^1 - B_p)$
i $A \cap B_p = \emptyset$
- b) $p \notin \text{Fr}(B_p)$
- c) p és punt fix de f .
- d) $f^2(p) \notin B_p$

Llavors si $\text{grau}(f) = +1$ tenim que $P(f) \supset \mathbb{N} - \{1\}$ i si $\text{grau}(f) = -1$ tenim $P(f) = \mathbb{N}$.

- 3) Suposem que existeix $p \in S^1$, punt fix de f tal que per a tot q i E , amb $q \in T_p$, E entorn de q a S^1 i $p \notin E$ tenim que $p \in \text{Fr}(f(E))$. Llavors val Šarkovskii per a f .

4) Sigui p l'únic punt fix de f i suposem que existeix $q \in S^1$ tal que $q \notin B_p$, $f(q) \in B_p$ i $f(S^1 - B_p) = [v, f(q)]$ amb $[v, f(q)]$ arc propi de S^1 . Llavors existeix n , enter positiu, tal que $P(f) = \{1, n, n+1, \dots\}$.

Referències

- (1) Block, L.: 'Periodic orbits of a continuous mappings of the circle', preprint.
- (2) Li, T. and Yorke, J.: 'Period three implies chaos', Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 985-992.
- (3) Llibre, J.: 'Continuous maps of the circle with finitely many periodic points', preprint.
- (4) Simó, C.: 'Aplicacions contínues de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ', Publicacions de la Secció de Matemàtiques U.A.B., 12 (1979), 93-117.
- (5) Štefan, P.: 'A Theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line', Comm. Math. Phys, 54 (1977), 237-248.