Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

REDUCCION DE LA CODIMENSION EN INMERSIONES RIEMANNIANAS CON VECTOR CURVATURA MEDIA PARALELO

F.G. Santos

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Abstract.- Let M^n be a connected n-dimensional Riemannian manifold immersed into an (n+p)-dimensional Riemannian manifold $\bar{M}^{n+p}(c)$ of constant sectional curvature c. In the present paper we prove a theorem on reduction of codimension of the immersion in terms of the normal curvature tensor when the mean curvature vector of the immersion is parallel in the normal bundle. This theorem extends a result of A. G. Colares and M. P. do Carmo [2].

§1.-Fórmulas básicas.- Sea $(\bar{M},g)$ una variedad de Riemann y M una subvariedad dotada de la métrica inducida, de dimensiones m y n respectivamente. Por $\bar{\nabla}$ (resp. $\bar{R}$) se denotará la conexión de Levi-Civita (resp. el tensor de curvatura) de $\bar{M}$ y con ∇ (resp. R) la conexión de Levi-Civita (resp. el tensor de curvatura) inducida en la subvariedad.

Las fórmulas de Gauss y de Weingarten vienen dadas por :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \qquad (1.1)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi \qquad (1.2)$$

para todo $X,Y \in TM$ y $\xi \in T^{\perp}M$. A σ se le llama la segunda forma fundamental de M en $\bar{M}$ y la subvariedad se dice totalmente geodésica si $\sigma=0$, equivalentemente, $A_\xi=0$ para todo $\xi\epsilon T^{\perp}M$. $\nabla^{\perp}$ es una derivación en el fibrado normal y por $R^{\perp}$ se denota el tensor de curvatura en el fibrado normal asociado a $\nabla^{\perp}$. Si $R^{\perp}=0$ se dice que el fibrado normal es <u>llano</u> o que $\nabla^{\perp}$ es <u>llana</u>. Un campo de vectores normales ξ es <u>paralelo</u> en el fibrado normal si $\nabla^{\perp}_X\xi=0$ para todo $X\epsilon TM$. Un subfibrado μ del fibrado normal se dice <u>paralelo</u> en el fibrado normal si $\nabla^{\perp}_X\xi\epsilon\mu$ para todo $\xi\epsilon\mu$, $X\epsilon TM$. Un operador $\Gamma:S(T^{\perp}M)\longrightarrow S(T^{\perp}M)$ sobre el conjunto de secciones normales se dice paralelo en el fibrado normal si $(\nabla^{\perp}_X\Gamma)\xi=\nabla^{\perp}_X\Gamma\xi-\Gamma\nabla^{\perp}_X\xi=0$ (1.3) para todo $X\epsilon TM$ y $\xi\epsilon T^{\perp}M$. El vector curvatura media de M en $\bar{M}$ está dado por $H=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{m-n}$ (Traza A_{ξ_α}) ξ_α donde $\alpha=1,\ldots,m-n$ es una base de campos ortonormales en $T^{\perp}M$. Si el espacio ambiente tiene curvatura seccional constante c, entonces

$$\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z} = c\{g(\bar{Z},\bar{Y})\bar{X}-g(\bar{Z},\bar{X})\bar{Y}\} \qquad (1.4)$$

para cualesquiera campos de vectores $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ sobre $\bar{M}$. La ecuación de Ricci viene dada por

$$\bar{R}(X,Y,\xi,\eta)=R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta)-g([A_\xi,A_\eta]X,Y) \qquad (1.5)$$

para todo $X,Y\epsilon TM$ y $\xi,\eta\epsilon T^{\perp}M$. Se define el <u>primer espacio normal</u> de M en $\bar{M}$ como el complemento ortogonal en $T^{\perp}M$ de

$N_0=\{\xi\epsilon T^{\perp}M/A_\xi=0\}$ y se denotará por N_1.

Una subvariedad M de dimensión n de una variedad de Riemann $\bar{M}$ de dimensión n+p se dice de codimensión substancial $k<p$ si existe una subvariedad totalmente geodésica N de $\bar{M}$ de dimensión n+k conteniendo a M.

2.- <u>Resultados</u>.-

<u>Lema I.- Sea M^n una subvariedad, de dimensión n, en una variedad de Riemann de dimensión n+p, $\bar{M}^{n+p}$. Sea</u> $\Gamma:S(T^{\perp}M^n)\longrightarrow S(T^{\perp}M^n)$ <u>un operador sobre el conjunto de las secciones del fibrado normal de M^n, paralelo en el fibrado normal de M^n. Para cada $m\epsilon M^n$ sea</u> $\mu(m)=\{\xi\epsilon T^{\perp}_m(M^n)/\Gamma_{(m)}\xi=0\}$
<u>Entonces μ es un subfibrado paralelo en el fibrado normal</u>.

Demostración.- Primeramente se prueba que la dimensión de μ es localmente constante. Para ello si $m \varepsilon M^n$ y la dimensión de $\mu(m)$ es r se toma una base de campos ortonormales en un entorno normal U de m $\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_p$, extendiendo una base ortonormal de $T_m^{\perp}M^n$, ampliada de una base de $\mu(m)$, por desplazamiento paralelo respecto de $\nabla^{\perp}$ a través de las geodésicas de M^n que salen de m. Si $n \varepsilon U$ y $\beta(t)$ es la geodésica que une m con n con $\beta(0)=m$, $\beta(1)=n$, se define

$$h_\alpha(t) = g(\Gamma(\xi_\alpha(t)), \Gamma(\xi_\alpha(t))), \alpha=1, \ldots, p$$

$$\dot{\beta}(t)(h_\alpha(t)) = 2g(\Gamma(\xi_\alpha(t)), \Gamma\nabla^{\perp}_{\dot{\beta}(t)}\xi_\alpha(t))=0$$

luego h_α es constante para todo $\alpha=1, \ldots, p$, a lo largo de $\beta(t)$. De ahí que $h_\alpha(1) = 0$ si y sólo si $h_\alpha(0) = 0$, equivalentemente $\Gamma(\xi_\alpha(1)) = 0$ si y sólo si $\Gamma(\xi_\alpha(0)) = 0$ que ocurre cuando $\alpha \leq r$, lo que prueba que μ es un subfibrado del fibrado normal. El ver que μ es paralelo se deduce fácilmente por la propia definición de μ.

Teorema 2.- Sea M^n una subvariedad conexa de dimensión n, con vector curvatura media paralelo en el fibrado normal, de una variedad de Riemann de dimensión n+p, con curvatura seccional constante c, $\bar{M}^{n+p}(c)$. Si el tensor de curvatura de la conexión normal es paralelo en el fibrado normal y el primer espacio normal de la subvariedad tiene dimensión constante k, entonces la subvariedad M^n tiene codimensión substancial k.

Demostración.- Se consideran dos casos:

CASO I.-La conexión normal $\nabla^{\perp}$ es llana.

En este caso existe en TM^n una base de diagonalización simúltanea de todos los A_ξ con $\xi \varepsilon T^{\perp}M^n$, que se denota por $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Si $\xi \varepsilon N_0$, de ser el espacio ambiente de curvatura seccional constante y $\nabla^{\perp}$ llana se sigue que

$$A_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X = 0 \qquad (2.1)$$

para todo $X, Y \in TM^n$.

De (2.1) se sigue que $A_{\nabla^{\perp}_{X_i}\xi} X_j = 0$ para todo $i \neq j$, $i,j=1,\ldots,n$.

Se trata de demostrar que N_0 es paralelo en el fibrado normal, para lo cual basta ver que Traza $A_{\nabla^{\perp}_{X_i}\xi} = 0$ para todo $i=1,\ldots,n$ y $\xi \in N_0$.

El vector curvatura media H no tiene componente en N_0 y si $\nabla^{\perp}_{X_i}\xi = r_i + s_i$, donde r_i(resp. s_i) son las componentes de $\nabla^{\perp}_{X_i}\xi$ en N_1 (resp. en N_0) se sigue que $A_{s_i}=0$ y si $r_i \neq 0$, se puede elegir una base en N_1 que contenga a r_i por lo que al ser $\xi \in N_0$ y H ortogonales y ser H paralelo en el fibrado normal se deduce que Traza $A_{r_i}=0$. Así $A_{\nabla^{\perp}_{X_i}\xi}=0$ para todo $i=1,\ldots,n$ y para todo $\xi \in N_0$ por lo que $\nabla^{\perp}_{X_i}\xi \in N_0$ para todo $\xi \in N_0$, en consecuencia N_0 es paralelo en el fibrado normal y por tanto N_1 también es paralelo. El resultado del teorema se sigue, en este caso, de un Teorema de J.Erbacher([2],pag.333).

CASO II.- La conexión normal $\nabla^{\perp}$ no es llana.

Sea $\nu = \{ \xi \in T^{\perp}M^n / R^{\perp}(X,Y)\xi = 0$ para todo $X,Y \in TM^n\}$ .Del Lema I se sigue que ν es un subfibrado paralelo en el fibrado normal.De (1.4) y (1.5) $N_0 \subset \nu$ y todos los A_{ξ} con $\xi \in \nu$ pueden ser diagonalizados simúltaneamente Se aplica ahora el argumento del Caso I, donde el papel de $T^{\perp}M^n$ lo hace ahora ν y se concluye el teorema.

BIBLIOGRAFIA.-

[1] A.G. Colares y M.P. do Carmo.-"On minimal immersions with parallel normal curvature tensor" Lecture notes in Mathematics nº 597(1977) Springer Verlag (1977)

[2] J.Erbacher.-"Reduction of the codimension of an isometric immersion". J.Diff.Geom.5(1971),333-340.