Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EL LEMA DE GAUSS PARA LA CONEXION CARACTERISTICA DE UNA VARIEDAD CASI-HERMITICA

V. Miquel Molina

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Valencia

Sean $(M, \langle,\rangle, J)$ una variedad casi-hermítica, D su conexión característica, i.e., la única conexión verificando

(i) $D\langle,\rangle = 0$

(ii) $DJ = 0$

(iii) $T(X,Y) = -T(JX, JY)$

donde T es la torsión de D.

Sea $\sigma(m,p)$ la distancia entre dos puntos m y p de M medida a lo largo de la geodésica que une m con p. Se define la esfera geodésica asociada a la conexión D como

$$S_m^D(r) = \{p \in M \,/\, \sigma(m,p) = r\}$$

El teorema de Gauss para la conexión de Levi-Civita de una variedad riemanniana establece la ortogonalidad entre las geodésicas y las esferas geodésicas asociadas a esta conexión. Nos proponemos aquí caracterizar las variedades casi-hermíticas en las que se sigue verificando el lema de Gauss para la conexión característica.

DEFINICION: Una conexión D sobre una variedad riemanniana $(M; \langle,\rangle)$ se dice que es métrica si y sólo si $D\langle,\rangle = 0$.

PORPOSICION (2): una conexión métrica D sobre una variedad de Riemann tiene las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita ∇ si y sólo si $\langle T(X,Y), Y\rangle = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

TEOREMA: Sea $(M; \langle , \rangle)$ una variedad de Riemann y D una conexión métrica sobre ella. El lema de Gauss se verifica para las geodésicas y esferas geodésicas asociadas a D si y sólo sí $\langle T(X,Y), Y\rangle = 0$

DEMOSTRACION: Si D tiene las mismas geodésicas que ∇, $S_m^D(r) = S_m^\nabla(r)$, y el lema de Gauss se verifica trivialmente.

Supongamos que se virifica el lema de Gauss para D. Sea $c(s)$ una curva en M_m (espacio tangente a M en m) tal que $\|c(s)\| = r$. Sea $\exp_m$ la aplicación asociada a D. Consideremos la superficie

$$\alpha(t,s) = \exp_m(t\,c(s))$$

Para cada s_0 fijo, $t \mapsto \alpha(t,s_0)$ es una geodésica, y para cada t_0 fijo, $s \mapsto \alpha(t_0,s)$ es una curva sobre $S_m^D(t_0 r)$. El vector $(\partial\alpha/\partial t)_{(t_0,s_0)}$ es tangente a la geodésica $\alpha(t,s_0)$ en $\alpha(t_0,s_0)$, y el vector $(\partial\alpha/\partial t)_{(t_0,s_0)}$ es tangente a la curva $\alpha(t_0,s)$ en el punto $\alpha(t_0,s_0)$. El lema de Gauss, pues, establece que

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}\Big|_{(t_0,s_0)}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big|_{(t_0,s_0)} \right\rangle = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle = 0$$

y, como D es métrica,

$$\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle = 0$$

Teniendo en cuenta que $t \mapsto \alpha(t,s)$ es una geodésica y que $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right] = 0$, resulta

$$0 = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t} + T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)\right\rangle$$

como $t \mapsto \alpha(t,s)$ es una geodésica,

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle_{(t,s)} = \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle_{(0,s)} = \|c(s)\|^2 = r^2$$

y, por lo tanto,

$$(1)\quad \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)\right\rangle = 0$$

Sea $p \in M$, $Y_p \in M_p$, $\|Y_p\| = 1$. Sea $\beta(t)$ la única geodésica tangente a Y_p en p. Sea $q = \beta(a)$ un punto de $\beta(t)$ tal que $\exp_q$ esté definido sobre $\beta([a,b])$ $(\beta(b) = p)$. Reparametricemos β de modo que $q = \beta(0)$ (y siempre $\|\beta'(t)\| = 1$)

Entonces existe un $v \in M_q$, $\|v\| = 1$ tal que $\beta(t) = \exp_q tv$, $\sigma(q,p) = r$, $p = \exp_q rv$ y $Y_p = \exp_{q*} v$ (considerando $v \in (M_q)_{rv}$).

Sean $X_1, \ldots, X_{n-1}$ vectores ortonormales en M_p tangentes a $S_q^p(r)$. Tomemos $c_i(s)$ curvas sobre M_q verificando

$$c_i(0) = rv \qquad \|c_i(s)\| = r \qquad c_i'(0) = \exp_{q*}^{-1}(X_i)$$

Definamos

$$\alpha_i(t,s) = \exp_q(t\, c_i(s))$$

se tiene entonces

$$Y_p = \left.\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right|_{(1,0)} \qquad X_i = \left.\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}\right|_{(1,0)}$$

y, por verificarse el lema de Gauss, aplicando (1) se tiene

$$\langle T(X_i, Y_p), Y_p \rangle = 0$$

y como $\{X_i, Y_p\}$ es una base ortonormal en p,

$$\langle T(X_p, Y_p), Y_p \rangle = 0 \qquad \forall X_p \in M_p$$

y como $Y_p \in M_p$ y $p \in M$ son arbitrarias, el teorema queda demostrado.

PROPOSICION (3): Una veriedad casi-hermítica $(M, \langle , \rangle, J)$ es Nearly-Kaehleriana si y sólo si el tensor torsión T de la conexión característica D verifica $\langle T(X,Y), Y \rangle = 0$

COROLARIO: La conexión característica de una variedad casi-hermítica M verifica el lema de Gauss si y sólo si M es Nearly--Kaehleriana.

BIBLIOGRAFIA

(1) J. MILNOR: "Morse Theory". Princeton University Press, 1.963.

(2) V. MIQUEL, A.M. NAVEIRA: "Sur la relation entre la function volume de certaines boules géodésiques et la géometrie d'une variété riemanniene". C.R. Acad. Sc. París. t 290, 379-381, (1.980).

(3) V. MIQUEL: "Volumes of certain small geodesic balls and almost-hermitian geometry". (Pendiente de publicación).