Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

TRANSPORTE DE FORMAS DE VOLUMEN EN UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE REAL

Javier Lafuente López

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

By means of the concept of pseudo-divergence operator, wich is defined in this paper, the weakest structure allowing a parallel displacemente of volume forms is established on a differentiable manifold. The study of this structure leads to some results relative to the parallel displacement of volume forms associated to a linear connection on the manifold.

Notaciones y Definiciones Preliminares

En este trabajo M representrá una variedad diferenciable paracompacta y conexa de dimensión finita n, $\mathfrak{X}(M)$ el algebra de Lie de los campos diferenciables en M y F(M) el álgebra de las funciones diferenciables en M con valores reales.

Una densidad θ en M subordina un operador $\mathrm{div}_\theta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow F(M)$ que será denominado operador divergencia usual (O.D.U.). Si M es orientable, una forma de volumen Ω en M da lugar a una densidad denotada por $|\Omega|$(véase [1]) y se escribirá div_Ω en lugar de $\mathrm{div}_{|\Omega|}$. Dicho operador viene definido por la fórmula: $(\mathrm{div}_\Omega X)\Omega = L_X\Omega$, donde L_X denota la derivada de Lie respecto al campo X. (véase [3]).

Una sección S en L(M), fibrado de referencias en M, se identitica con una base local de campos $(e_1,\dots,e_n)$ en el dominio abierto U de definición de S, y si $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ en su base dual de 1-formas, $\Omega_S=\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^n$ es una forma de volumen que da lugar a un O.D.U. en U denotado por div_S.

La traza w de una conexión lineal Γ es la traza de la matriz (w^i_j) de proyecciones verticales de Γ en L(M) (véase [2]).

Por último, si σ es curva integral maximal de un spray $\mathfrak{X}$ en M, al conjunto imagen de σ se denominará trayectoria del spray (véase 4).

Definición 1

Un operador $div:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow F(M)$ se llamará operador pseudo-divergencia (O.S.D.) si satisface las siguientes condiciones para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, y $f\in F(M)$:

1) $div(X+Y) = div(X)+div(Y)$
2) $div(fX) = L_Xf + f divX$

Si además se satisface la condición
3) $div(L_XY) = L_X(divY)-L_Y(divX)$, se denominará operador divergencia (O.D.). Se demuestra facilmente que cualquier O,S.D. (respectivamente O.D.) puede obtenerse a partir de uno dado por adición de 1-formas en M (resp. 1 formas cerradas).

Teorema 1

Un operador $div:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow F(M)$ es O. D. si y sólo si, para cada $p\in M$ existe un entorno aiberto y conexo U de p, y una forma de volumen Ω en U unívocamente determinada salvo constantes multiplicativas no nulas por la condición: $(div\ X)\ U = div\ \ (X/U)$ para todo $X\in\mathfrak{X}(M)$, o más bremente, $div/U = div_\Omega$.

El teorema 1 muestra que un O.D. es "localmente" un O.D.U.,y esto - permite establecer respecto a él una definición localmente trivial de transporte de formas de volumen, que se extiende de forma natural para un O.S.D.:

Definición (y Proposición) 2

a) Sea div O.D. en M, $\sigma:[a,b] \longrightarrow M$ un camino continuo con origen -- en $p \in M$ y Ω_p forma de volumen en TM. Exite entonces una única forma de volumen continua a lo largo de σ, $\Omega(t) = (\sigma\Omega_p)_{div}(t)$ $a \leq t \leq b$, tal que:

1) $\Omega(a) = \Omega_p$
2) $\forall$ $t_0 \in [a, b]$ existe U entorno abierto de $\sigma(t_0)$, y Ω forma de volu-- men en U con $div/U = div_\Omega$, y tal que $\Omega(t)= \Omega(\sigma(t)$ para $t \in [a,b]$, suficientemente próximo a t_0.

b) Pro otra parte, si $div' = div + \alpha$ es O.S.D. (α es 1-forma en M) y σ es diferenciable a trozos, la fórmula que sigue establece sin ambi--- güedad una definición de transporte de formas de volumen respecto al - operador div':

$$(\sigma\, \Omega_p)_{div'}(t) = (\exp \int_a^t \sigma_* \alpha \ )(\sigma\Omega_p)_{div}(t)$$

Un O.D. div. en M determina de manera natural una 1-forma en L(M), w que queda bien definida por la condición:

$$w/L(U)= \frac{d\Omega}{\Omega}$$

para cada forma de volumen Ω definida sobre un abierto U de M, tal que $div/U = div_\Omega$. esta idea se generaliza para un O.S.D. en el siguiente

Teorema 2

Dado un O.S.D. div en M, existe una única 1-forma w en L(M) tal que para toda sección local $S:U \longrightarrow L(M)$ es $div/U = div_S + S^* w$. Además - se verifican las equivalencias:

1) div es O.D. $\Longleftrightarrow$ w es cerrada

2) div es O.D.U. $\Longleftrightarrow$ w es exacta

Por otra parte se demuestra que la traza w de una conexión lineal en M, es la 1-forma en L(M) asociada a un cierto O.S.D. div_Γ, que define el mismo transporte de formas de volumen que la conexión. Si w es cerrada por el teorema 2, div es O.D. y dicho transporte es localmente trivial.

Por otra parte para conexiones simétricas Γ, el carácter cerrado de w equivale a la simetría de su tensor de curvatura de Ricci, obteniendose el siguiente resultado:

Teorema 3

Una conexión simetrica Γ conserva localmente formas de volumen por transporte paralelo si y sólo si su tensor de curvatura de Ricci es simétrico.

Finalmente el teorema 4 tratará de precisar qué tipo de restricciones deben imponerse a una conexión lineal en M para que quede unívocamente determinada por su O.S.D. asociado:

Teorema

Sea $\mathfrak{X}$ un spray en M. Entonces para cada O.S. D div existe una única conexión lineal simétrica Γ en M, con div_Γ = div, y cuyo spray de geodésicas posee las mismas trayectorias que el spray $\mathfrak{X}$.

Su demostración está relacionada con las técnicas y resultados obtenidos en [4].

BIBLIOGRAFIA

(1) M. BERGER, B. GOSTIAUX — GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Libraire Armand Colin Paris, 1972

(2) NOEL J. HICKS — NOTES OF DIFFERENTIABLE GEOMETRY
Van Nostrand Reinholds Mathematical Studes, 1971.

(3) R. ABRAHAM, J. MARSEN — FOUNDATIONS OF MECHANICS
W. A. Benjamin Inc. 1967.

(4) J. LAFUENTE — SOBRE LOS OPERADORES HESSIANOS ASOCIADOS A SPRAYS QUE POSEEN LAS MISMAS TRAYECTORIAS.
PREPRINT.