Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SUBMERSIONES CASI-HERMITICAS EN W_4-VARIEDADES

L. Hervella, E. de la Torre

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Santiago de Compostela

ABSTRACT

In this article we prove some properties relatives to inmersions and almost-Hermitian submersions on W_4-manifolds.

COMUNICACION

Sea (M,g,J) una variedad casi-Hermítica C^∞, de dimensión real $2n$. Se dice que M es una W_4-variedad si se verifica:

$$\nabla_X(F)(Y,Z) = \frac{-1}{2(n-1)}\{ g(X,Y)\,\delta F(Z) - g(X,Z)\,\delta F(Y) - g(X,JY)\,\delta F(JZ) + g(X,JZ)\,\delta F(JY)\}$$

para todo $X,Y,Z \in \chi(M)$.

Son este tipo de variedades de especial importancia por verificar:

Cualquier W_4-variedad tiene una estructura casi-compleja integrable.

Cualquier variedad localmente conforme a una variedad Kahleriana es W_4.

Siendo θ la forma de Lee de una W_4-variedad, si θ es cerrada o exacta, M es respectivamente localmente o globalmente conforme a una variedad Kahleriana.

Una variedad casi-Hermítica S, inmersa en una variedad casi-Hermítica M se dice una subvariedad casi-Hermítica de M si la estructura casi-compleja de S coincide con la restricción de la estructura casi-compleja de M a S.

Además de la clásica coderivada de la forma de Kahler F definida en M, es posible definir otro tensor, llamado la coderivada parcial de F respecto a la subvariedad casi-Hermítica S, y notado $\tilde{\delta}F$.

Siendo $\{E_1,\ldots,E_m,JE_1,\ldots,JE_m\}$ una J-base local para χ (S), se define, para un campo de vectores $X\varepsilon\bar{\chi}(S)$, $\tilde{\delta}$ F(X) por:

$$\tilde{\delta}F(X) = -\sum_{i=1}^{m} \{ \nabla_{E_i}(F)(E_i,X) + \nabla_{JE_i}(F)(JE_i,X) \}$$

y se prueba lo siguiente:

LEMA: Sea M una W_4-variedad y S una subvariedad casi-Hermítica de M. Representemos por $\hat{\delta}F$ la coderivada de la forma de Kahler en S y por δ la coderivada en M. Se verifica:

$$\hat{\delta}F(X) = \tilde{\delta}F(X) = \frac{m-1}{n-1}\,\delta F(X) \quad \forall\ X\varepsilon\ \chi(S)$$

TEOREMA: Sea S una subvariedad casi-Hermítica de una variedad casi-Hermítica M. Si M es una W_4-variedad, entonces S es una W_4-variedad.

La demostración se sigue del Lema y de la definición de W_4-variedad.

Sean (M,g,J) y (B,h,J') dos variedades casi-Hermíticas de dimensiones 2m y 2n respectivamente. Una aplicación C^∞, sobreyectiva $f: M \longrightarrow B$ se dice una submersión casi-Hermítica si:

1) f tiene rango máximo
2) $f_*|_{(\mathrm{Ker}\ f_*)^\perp}$ es una isometría lineal
3) f es una aplicación casi-compleja.

Los vectores de M que están en el Ker f_* son tangentes a las fibras de f y se llaman verticales. Los vectores que son ortogonales a la distribución vertical se dicen horizontales.

Un campo de vectores X sobre M se dice básico para la submersión casi-Hermítica $f:M \longrightarrow B$ si :

a) X es horizontal
b) X está f-relacionado a un campo de vectores en B.

TEOREMA: Sea $f:M \longrightarrow B$ una submersión casi-Hermítica. Si M es una W_4- variedad, entonces B es una W_4-variedad.

La demostración se sigue de las relaciones existentes entre $\delta F, \delta' F'$ y $\tilde{\delta} F$.

TEOREMA: Sea $f:M \longrightarrow B$ una submersión casi-Hermítica, con M una W_4-variedad. Si las fibras F_y de f son subvariedades minimales de M, entonces B es una variedad Kahleriana.

Se obtiene este resultado del hecho de que con estas hipótesis B es una variedad semi-Kahleriana y, puesto que B es una W_4-variedad entonces B pertenece a la intersección de las variedades Semi-Kahlerianas y las W_4 y esta intersección son las variedades Kahlerianas {2}.

BIBLIOGRAFIA

{1}. A.GRAY: *Minimal varieties and almost-Hermitian submanifolds.* Michigan Math. J. 12 (1965) 273-287

{2}. A.GRAY y L.HERVELLA: *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants.* Annal. di Mat. Pura et Applicata (1979) 927-971

{3}. J.L.KOSZUL: *Variétés Kahleriennes.* Notes. Sao Paulo 1957

{4}. B.O'NEILL: *The fundamental equations of a submersion* . Michigan Math. J. 13 (1966) 459-469.

{5}. B.WATSON: *Almost Hermitian submersions.* J. of Diff. geom. 11 (1976) 147-165.