Pub. Mat. UAB
N°21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UNA FORMULA DE RESIDUOS PARA CLASES CARACTERISTICAS

Francisco Gómez Ruiz

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract.-

This paper contains the statement without proof of a residue formula relating some characteristic classes of G-vector bundles ξ(for G a torus) to local invariants at the fixed point set of the action of G on the base of ξ. An article with complete proves will appear in Topology.

1. Planteo general del problema

Sea ξ: $N \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibrado vectorial real diferenciable, siendo G un toro de dimensión r y supongamos que M es una variedad diferenciable compacta orientada de dimensión n.

Sea $A = \{x \in M | \dim G_x \geq t\}$, en donde G_x designa el subgrupo de isotropia en $x \in M$ de la acción de G en M, y consideremos la aplicación j_x: $H_*(A) \to H_*(M)$ inducida por la inclusión $j: A \to M$ (utilizamos la homología con coeficientes reales).

Si α es una clase característica de ξ de grado p, es natural formularse las siguientes preguntas:

(1) En que caso $D\alpha \in \operatorname{Im} j_*$? (D designa aquí la dualidad de Poincaré).

(2) Supuesto que $D\alpha \in \operatorname{Im} j_*$ Como construir explicitamente un representante z de $\beta \in H_{n-p}(A)$ tal que $j_*(\beta) = D\alpha$?.

Una tal fórmula, para merecer el nombre de fórmula de residuos, debería expresar z en función de datos locales en A, esto es, en función del "G-fibrado $\xi|_A$" y del "G-fibrado normal de A en M".

El siguiente teorema contesta a la primera pregunta (ver [3; teorema 16]).

(3) Teorema

Si $A = \{x \in M \mid \dim G_x \geq r+p-n\}$, entonces $D\alpha \in \operatorname{Im} j_*$.

Naturalmente este teorema sólo tiene interés cuando $p > n-r$, pues si $p \leq n-r$ es $A = M$ y el teorema es trivial.

Cuando $A = \emptyset$, el teorema anterior nos dice que $\alpha = 0$. Es decir, las clases características de grado $p > n-r+m$ se anulan, siendo m la mayor de las dimensiones de los subgrupos de isotropía de la acción de G en M.

El teorema anterior fue obtenido por J. Pasternack en el caso particular de ser ξ el fibrado tangente de M con la acción inducida por la de G en M, como un corolario de un teorema más general sobre foliaciones riemannianas (ver [4; Corolario 2]).

Es fácil ver como el teorema (3) puede utilizarse para obtener obstrucciones a la existencia de ciertas acciones de grupos de Lie. Por ejemplo, se deduce inmediatamente que si M^{4k+1} es una variedad compacta orientada de dimensión 4k+1 cuya clase de Pontrjagin k-ésima es no nula, entonces si un grupo de Lie compacto G actúa casi libremente sobre M, ha de ser G de dimensión 0 o 1.

§2. Una fórmula de residuos

El toerema (3) responde a la pregunta (2) si $p > n-r+m$, ya que entonces $\alpha = 0$. Por consiguiente, quedan por contestar los casos en los que $n-r < p \leq n-r+m$. La fórmula de residuos que exponemos a continuación resuelve el caso $p = n-r+m$ $(m \geq 1)$ (ver [3; teorema 21 o 40]). Esta fórmula es una generalización de la dada por P. Baum y J. Cheeger (ver [1; theorem C]), la cual es análoga a la obtenida por R. Bott en el caso complejo ([2; theorem 1]).

Si T_i $(i = 1,\dots,s)$ son los subtoros de G que aparecen como 1-componentes de los subgrupos de isotropía de dimensión m $(m \geq 1)$ de la acción de G en M, entonces

$$A = F_{T_1} \cup \dots \cup F_{T_s} \quad , \quad F_{T_i} \cap F_{T_j} = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

siendo F_{T_i} $(i = 1,\dots,s)$ el conjunto de puntos fijos de la acción de T_i en M.

Se sabe que F_{T_i} es unión disjunta de subvariedades compactas conexas orientables $F_{i1},\dots,F_{it_i}$ de codimensión par $2m_{i1},\dots,2m_{it_i}$.

Elijamos una orientación en cada F_{ij} y orientemos el fibrado normal η_{ij} de F_{ij} en M de forma compatible con las orientaciones de F_{ij} y M.

Entonces, si $p = 2q$ (las clases características de grado impar valen cero) tendremos

(4) $$D\alpha = j_*(\sum_{ij} D\beta_{ij})$$

en donde D designa a la dualidad de Poincaré y $\beta_{ij} \in H^{2(q-m_{ij})}(F_{ij})$ son las clases de cohomología de de Rham que describimos a continuación.

Sea K un subtoro de G de dimensión r-m que actúe casi libremente en M con la acción inducida por la de G. Designemos mediante $\underline{G}$, $\underline{K}$, $\underline{T}_i$ las álgebras de Lie de G, K, T_i respectivamente. Evidentemente tenemos $\underline{K} \cap \underline{T}_i = 0$ $(i = 1,\ldots,s)$.

Elijamos $h_o \in \underline{G}$ tal que expth_o sea denso en G. Es fácil ver que $\dim(\underline{K} + \langle h_o\rangle) \cap \underline{T}_i = 1$ $(i = 1,\ldots,s)$, en donde $\langle h_o\rangle$ designa el subespacio de dimensión 1 generado por h_o. Elijamos $h_i \in \underline{T}_i$ tal que $(\underline{K}+\langle h_o\rangle) \cap \underline{T}_i = \langle h_i\rangle$. Es fácil ver que expt$h_i$ es denso en T_i.

Sea $W^{\xi}: S(Sk(d;\mathbb{R}))_I \longrightarrow H^*(M)$ el morfismo de Chern-Weil del fibrado ξ, siendo d el rango de ξ, $Sk(d;\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los endomorfismos antisimétricos de $\mathbb{R}^d$ y $S(Sk(d;\mathbb{R}))_I$ el álgebra graduada de las aplicaciones multilineales simétricas sobre $Sk(d;\mathbb{R})$ que son invariantes por la representación adjunta de $SO(d;\mathbb{R})$ u $O(d;\mathbb{R})$ según que ξ esté orientado o no.

(5) Supongamos que $\alpha = w^{\xi}(\Gamma)$, siendo $\Gamma \in S^q(Sk(d;\mathbb{R}))_I$.

Entonces, las clases β_{ij} que aparecen en (4) vienen dadas por la componente de grado $2(q-m_{ij})$ de la clase de cohomología de de Rham no homogénea

$$\frac{w_{h_i}^{\xi_{ij}}(\Gamma)}{w_{h_i}^{\eta_{ij}}(pf)}$$

en donde $Pf \in S^{m_{ij}}(Sk(2m_{ij};\mathbb{R}))_{SO(2m_{ij})}$ es el pfaffiano y $w_{h_i}^{\xi_{ij}}$, $w_{h_i}^{\eta_{ij}}$ son son los morfismos de Chern-Weil generalizados $w_{h_i}^{\xi_{ij}}: S(Sk(d;\mathbb{R}))_I \longrightarrow H^*(F_{ij})$, $w_{h_i}^{\eta_{ij}}: S(SK(2m_{ij};\mathbb{R}))_{SO(2m_{ij})} \longrightarrow H^*(F_{ij})$ que definiremos seguidamente.

Comencemos observando que la acción de T_i en ξ_{ij}(resp. η_{ij}) induce representaciones en las fibras. Sean $\theta_{ij}(h_i)(x)$ (resp. $L_{ij}(h_i)(x)$) las derivadas de dichas representaciones en la fibra sobre el punto $x \in F_{ij}$, aplicadas a h_i. Se demuestra que $\theta_{ij}(h_i)$ (resp. $L_{ij}(h_i)$) definen secciones diferenciables en el fibrado de los endomorfismos $L_{\xi_{ij}}$ (resp. $L_{\eta_{ij}}$). Además, si dotamos a los fibrados ξ_{ij}(resp. η_{ij}) de métricas de Riemann T_i-invariantes y elegimos conexiones riemannianas T_i-invariantes, las secciones $\theta_{ij}(h_i)$ (resp. $L_{ij}(h_i)$) resultan ser antisimétricas y paralelas. Definimos entonces los morfismos $w_{h_i}^{\xi_{ij}}$, $w_{h_i}^{\eta_{ij}}$ imitando la definición del morfismo de Chern-Weil pero substituyendo en todas partes el tensor de curvatura R por $R+\theta_{ij}(h_i)$ (y análogamente para η_{ij}). Se demuestra, utilizando la identidad de Bianchi, y el hecho de ser $\theta_{ij}(h_i)$, $L_{ij}(h_i)$ paralelas, que los morfismos $w_{h_i}^{\xi_{ij}}$, $w_{h_i}^{\eta_{ij}}$ sólo dependen de la acción de T_i en ξ_{ij}, η_{ij} y de la elección de h_i en $\underline{T}_i$.

Bibliografía

1. P Baum y J.Cheeger; Infinitesimal isometries and Pontrjagin numbers; Topology 8(1969), 173-193.
2. R. Bott; A residue formula for holomorphic vector fields;J. Diff. Geom. 1(1967), 311-330.
3. F. Gómez;A residue formula for characteristic classes; to appear.
4. J.Pasternack; Foliations and compact Lie group actions; Comm. Math. Helv. 46(1971), 467-477.