PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979

EL METODO DE POINCARE-LINDSTEDT PARA ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO

por A. Casal(*) y M. Freedman(**)

Introducción

Se desea esbozar una extensión del método de Poincaré-Lindstedt para el estudio de la existencia y construcción de soluciones periódicas de cierto tipo de ecuaciones diferenciales funcionales. Más concretamente, se trata de extender dicho método a ecuaciones con un parámetro de retardo, desarrollando un algoritmo recurrente para la construcción de un desarrollo asintótico uniformemente válido, y presentando el estudio de modo que, en ciertas condiciones de regularidad, si el algoritmo puede establecerse en general a nivel formal, entonces existen realmente soluciones periódicas que admiten como desarrollos asintóticos los obtenidos mediante el algoritmo citado.

Este punto de vista tiene como objeto el presentar la posibilidad de efectuar cálculos aproximados de soluciones periódicas, lo cual no es posible cuando los métodos empleados para determinar su existencia no son constructivos. Así, por ejemplo, los trabajos realizados hasta el momento sobre la ecuación del girasol (Casal y Somolinos (1) y Somolinos (4)) centran su atención en la demostración de la existencia de una solución periódica, y en este sentido la extensión que se pretende del método citado vendría a complementar lo ya realizado proporcio-

(*) Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Ecuaciones Funcionales

(**) Boston University
Department of Mathematics
Boston, Massachusetts.

nando expresiones aproximadas de la solución periódica obtenida. Sin embargo, el contexto en que se estudiará el problema es bastante más general que lo que requiere la ecuación mencionada.

En el presente trabajo se expone sólo una forma en que el método en cuestión puede extenderse a cierto tipo de ecuaciones con retardo, y por razones de longitud excesiva, tanto en la exposición como en la presente redacción, sólo se incluyen los preliminares formales, pero preparando las cosas para el estudio analítico directo. El trabajo completo, tanto en el aspecto formal como analítico, así como la aplicación a la ecuación del girasol, aparecerá proximamente (Casal y Freedman (2)).

Se considera, pues, la ecuación diferencial retardada

$$\dot{x}(t) = f(\lambda,x(t),x(t-\lambda)) \tag{1}$$

donde $x,f \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ y λ es un parámetro real no negativo. Se estudiará dicha ecuación en el entorno de un punto x_* en el que $f(\lambda,x_*,x_*) = 0$, para todo $\lambda > 0$. Puede tomarse $x_* = 0$ sin pérdida de generalidad.

Hipótesis y notación

En la ecuación (1) se supone que f es de clase C^{k+3} $(k \geq 0)$ en un entorno de $x = 0$.

Sea

$$\dot{\eta} = A(\lambda)\eta + B(\lambda)\,\eta(t-\lambda) \tag{2}$$

la ecuación linealizada, en la que

$$A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=y=0},\quad B(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x.y)\Big|_{x=y=0}.$$

Se supondrá que la ecuación (2) posee soluciones periódicas no nulas para algún valor del retardo $\lambda=\lambda_0>0$, y se desean estudiar las posibilidades de existencia y construcción de soluciones periódicas para valores de λ próximos a λ_0. Bajo ciertas condiciones, la mera existencia de esas soluciones puede considerarse como un problema de bifurcación de Hopf, pero nuestro interés primordial será el de la existencia y construcción de desarrollos asintóticos uniformemente válidos para tales soluciones.

Se denotará mediante P al espacio de funciones vectoriales continuas 2π-periódicas, al cual se puede dotar de producto escalar en la forma integral habitual, y mediante P^k $(1\leq k<\infty)$ al subespacio de P de funciones de clase k.

Mediante L se denotará al operador diferencial con retardo

$$L\eta(t) = \dot{\eta}(t) - A(\lambda_0)\,\eta(t) - B(\lambda_0)\,\eta(t-\lambda_0)$$

y N(L) será el subespacio nulo de L en P^{∞}. La dimensión ℓ de N(L) será mayor o igual que dos, porque se ha hecho la hipótesis de que (2) posee al menos una solución periódica z_o, y $z_o(t-\alpha)$ es linealmente independiente de z_o para al menos algún α. Sea $\{v_1(t), \ldots, v_\ell(t)\}$ una base de N(L).

El operador adjunto de L, L^* viene dado mediante

$$L^*\eta(t) = \dot{\eta}(t) + A^T(\lambda_0)\,\eta(t) + B^T(\lambda_0)\,\eta(t+\lambda_0)$$

sobre P^{∞}. En la expresión anterior A^T y B^T denotan las traspuestas de A y B respectivamente. Se tiene también que $\dim N(L^*) = \dim N(L)$, y se tomará en $N(L^*)$ una base ortonormal $\{w_1(t), \ldots, w_\ell\}$, es decir, tal que

$$\int_0^{2\pi} < w_i(t), w_j(t) > dt = \delta_{ij}.$$

El sistema de ecuaciones

Para el estudio de soluciones periódicas de pequeña amplitud, puede introducirse naturalmente un pequeño parámetro de la manera siguiente:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\text{período}} \cdot \int_{\text{un período}} \|x(t)\|^2 dt. \qquad (3)$$

Puede entonces efectuarse la sustitución de la variable dependiente $x = \varepsilon z$, con lo que se obtendrían de (1) y (3) un sistema de ecuaciones en $z(t,\varepsilon)$ en el que ensayar un desarrollo formal en términos de potencias de ε. Sin embargo, como es bien conocido, el hecho de que el período de $z(t,\varepsilon)$ dependa de ε impide que los desarrollos deseados sean uniformemente válidos por lo que, de acuerdo con el método de Poincaré-Lindstedt, se cambia también la variable t mediante $t = \frac{T(\varepsilon)}{2\pi}\tau$. La nueva $Z(\tau,\varepsilon)$ será 2π-periódica para cada ε si y sólo si $z(t,\varepsilon)$ es $T(\varepsilon)$-periódica. La imposición de algún tipo de condiciones iniciales (lineales), conduce a la consideración de un funcional lineal real y continuo B definido en P tal que $Bz_o = 0$, donde z_o es la solución 2π-periódica supuesta para (2), de modo que el sistema de ecuaciones a estudiar es

$$LZ = G(\tau,\varepsilon),$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|Z(\tau,\varepsilon)\|^2 d\tau = 1,$$

$$BZ(\tau,\varepsilon) = 0,$$

donde

$$G(\tau,\varepsilon) = \frac{T(\varepsilon)}{2\pi\varepsilon} f(\lambda(\varepsilon),\varepsilon Z(\tau),\varepsilon Z(\tau - \frac{2\pi}{T(\varepsilon)}\lambda(\varepsilon))) -$$

$$- A(\lambda_o)Z(\tau) - B(\lambda_o)Z(\tau - \lambda_o), \ \varepsilon \neq 0,$$

$$G(\tau,0) = 0.$$

Una primera condición necesaria para la existencia de soluciones periódicas de (4) es que $G(\cdot,\varepsilon)$ sea ortogonal a $N(L^*)$, es decir

$$(*) \qquad \int_0^{2\pi} < G(\tau,\varepsilon),\ w_i(\tau) > \, = 0, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

<u>Solución formal</u>

Se supondrá en esta sección que las ecuaciones (4) poseen soluciones $Z(\tau,\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon)$ con desarrollos asintóticos

$$Z(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} Z_i(\tau)\varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}), \text{ (con } Z_i(\tau) \text{ } 2\pi\text{-periódica)}$$

$$(5) \qquad \lambda(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}),$$

$$T(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} T_i \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}), \qquad \text{(con } T_o = 2\pi).$$

Se trata, pues, de determinar un algoritmo recurrente para calcular las funciones 2π-periódicas $Z_i(\tau)$, así como los coeficientes λ_i y T_i, $1 \leq i \leq k$. Para ello se introducen las expresiones (5) en las ecuaciones (4), y se igualan los coeficientes de las sucesivas potencias de ε en los correspondientes desarrollos de Taylor. Llamando

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\left(Z_o'(\tau) + \lambda_o B(\lambda_o) Z_o'(\lambda - \lambda_o)\right)$$

$$S(\tau) = A'(\lambda_o) Z_o(\tau) + B'(\lambda_o) Z_o(\tau - \lambda_o)$$

$$\left(A'(\lambda_o) = \left.\frac{dA}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_o},\ B'(\lambda_o) = \left.\frac{dB}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_o}\right)$$

$$F(\tau) = C(\lambda_o;\ Z_o(\tau),\ Z_o(\tau)) + D(\lambda_o;\ Z_o(\tau),\ Z_o(\tau - \lambda_o)) + E(\lambda_o;\ Z_o(\tau - \lambda_o),\ Z(\tau - \lambda_o))$$

(en la expresión anterior C, D y E son las formas bilineales que corresponden a los términos cuadráticos en el desarrollo de Taylor de f),

$$M(\tau)v = C(\lambda_o; Z_o(\tau), v) + \frac{D(\lambda_o; v, Z_o(\tau - \lambda_o))}{2}$$

$$N(\tau)\ v = \frac{D(\lambda_o; Z_o(\tau), v)}{2} + E(\lambda_o; Z_o(\tau - \lambda_o), v).$$

(Obsérvese que M y N son operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$) se obtiene lo siguiente

$i = 1$:

$$\begin{aligned} & LZ_1 = T_1R(\tau) + \lambda_1S(\tau) + F(\tau) \\ (6) \qquad & \int_0^{2\pi} \langle Z_o(\tau), Z_1(\tau)\rangle \ d\tau = 0 \\ & B(Z_1) = 0 \end{aligned}$$

$2 \leqq i \leqq k$:

$$\begin{aligned} & LZ_i = T_iR(\tau) + \lambda_iS(\tau) + M(\tau)Z_{i-1}(\tau) + p_i(\tau) \\ (7) \qquad & \int_0^{2\pi} \langle Z_o(\tau), Z_i(\tau)\rangle \ d\tau = q_i \\ & B(Z_i) = 0 \end{aligned}$$

donde $p_i(\tau)$ son funciones vectoriales 2π-periódicas de $Z_o(\tau), \ldots, Z_{i-2}(\tau)$, $T_1, \ldots, T_{i-1}, \lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ y q_i son escalares reales que dependen sólo de $Z_o(\tau), \ldots, Z_{i-1}(\tau)$.

Las dos últimas ecuaciones de (6) o de (7) no son suficientes para determinar todo lo que es desconocido, pero en cada paso puede hacerse uso de la condición (*), que proporciona las condiciones que se necesitan para esa determinación. En efecto, introduciendo en (*) las expresiones (5) se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \langle T_{i+1}R(\tau) + \lambda_{i+1}S(\tau) + M(\tau)Z_i(\tau) + N(\tau)Z_i(\tau - \lambda_o) + p_{i+1}(\tau),$$
$$w_j(\tau)\rangle \ d\tau = 0$$

para $2 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \ell$, y

$$\int_0^{2\pi} \langle T_1 R(\tau) + \lambda_1 S(\tau) + F(\tau),\ w_j(\tau)\rangle \quad d\tau = 0, \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

Para la obtención de las incógnitas λ_i, T_i y $Z_i(\tau)$ partiendo de λ_o, $T_o = 2\pi$ y $Z_o(\tau)$, convendría discutir las expresiones anteriores, lo cual no ofrece demasiada dificultad, y con ello se completaría el proceso formal. Sin embargo, es posible reformular estas condiciones de manera que las nuevas, siendo equivalentes por lo que se refiere al estudio formal, resultan mucho más convenientes para el estudio analítico, con lo cual ambos aspectos reciben un tratamiento unificado. Este se sintetiza mediante la siguiente

Definición. Se dice que el sistema (4) es formalmente resoluble si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) Existen un único λ_1 y un único T_1 que verifican

$$\int_0^{2\pi} \langle T_1 R(\tau) + \lambda_1 S(\tau) + F(\tau),\ w_j(\tau)\rangle \quad d\tau = 0, \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

2) El sistema homogéneo

$$Lu = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \langle Z_o(\tau),\ u(\tau)\rangle \quad d\tau = 0$$

$$Bu = 0$$

posee un espacio de soluciones K de dimensión $\ell - 2$, y el único triplete $(\lambda, T, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times K$ que satisface

$$\int_0^{2\pi} \langle TR(\tau) + \lambda S(\tau) + M(\tau)u(\tau) + N(\tau)u(\tau - \lambda_o),\ w_j(\tau)\rangle \quad d\tau = 0, \quad j \leq \ell,$$

es $\lambda = 0$, $T = 0$, $u(\tau) = 0$.

En el artículo de Casal y Freedman (2) puede verse cómo si un sistema es formalmente resoluble puede obtenerse la validez analítica de los desarrollos formales (5).

Referencias

(1) A. Casal y A. Somolinos, "Estudio analítico y numérico de la ecuación del girasol". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. (Aparecerá).

(2) A. Casal y M. Freedman, "A Poincaré-Lindstedt approach to bifurcation problems for differential delay equations". (Aparecerá).

(3) A. H. Nayfeh, Perturbation Methods, Wiley, New York (1973).

(4) A. Somolinos, "Periodic solutions of the sunflower equation: $\ddot{x} + (a/r)\,\dot{x} + (b/r)\sin x(t-r) = 0$". Quarterly of Applied Mathematics, 35(1978), pp. 465-478.