PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones-Valldoreix, Mayo 1979.

SOBRE UNICIDAD DE LA SOLUCION EN UN PROBLEMA DE FILTRACION

por José CARRILLO MENENDEZ
Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense. Madrid.

En este trabajo nos planteamos estudiar la unicidad de soluciones en el problema de la filtración en un dique de forma cualquiera. Para ello partimos de un resultado de existencia establecido por H. Brézis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia mediante una nueva formulación del problema, y demostramos que estas soluciones son también soluciones del problema planteado de forma clásica. Luego, partiendo de la formulación clásica, demostramos la unicidad en un sentido "débil", y damos condiciones suficientes para la unicidad en el sentido fuerte.

Diferentes autores han trabajado sobre este problema para casos particulares de diques.

Baiocchi [2] se interesó particularmente en el dique de forma rectangular (fig. 1) para el que demostró la existencia y unicidad de soluciones.

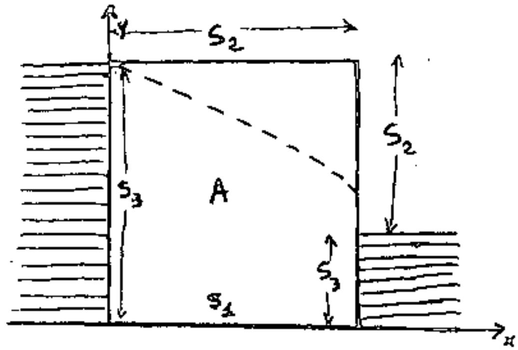

Fig. 1

Alt [1] trabajó sobre un caso un poco más general pero salvando alguna particularidad del dique rectangular (fig. 2), lo que le llevó a demostrar la existencia de una solución minimal.

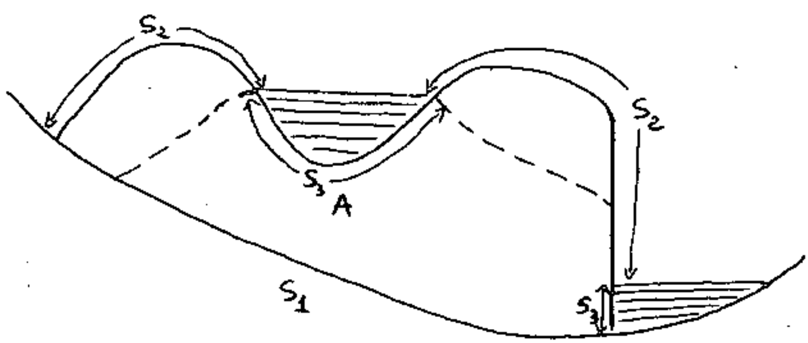

Fig 2

Brezis, Kinderlehrer y Stampacchia [4] trabajaron sobre un dique de forma cualquiera, representado por un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ de borde regular en el que distinguimos 3 partes:

S_1 es la parte impermeable del borde

S_2 es la parte al aire libre.

S_3 es la parte cubierta de agua.

A la vez, llamamos A la parte submergida de Ω, y en el borde de A distinguiremos 4 partes:

$\Gamma_1 \subset S_1$ es la parte impermeable

$\Gamma_2 \subset \Omega$ es la frontera libre de A

$\Gamma_3 = S_3$ es la parte cubierta de agua

$\Gamma_4 \subset S_2$ es la parte mojada del dique situada al aire libre. (fig. 3).

Notemos que Γ_1, Γ_2 y Γ_4 no son conocidos, sólo Γ_3 está perfectamente determinado

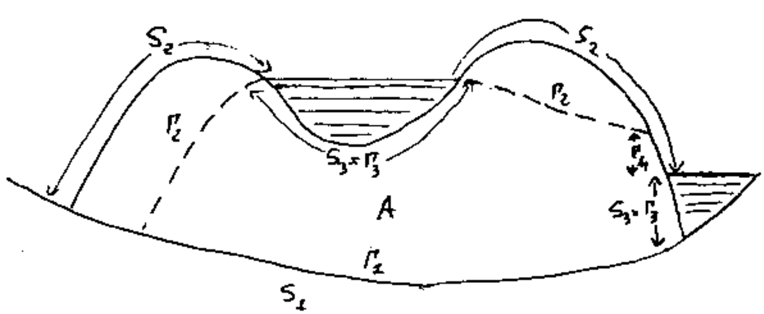

Fig. 3

Desde el punto de vista físico, la ley de Darcy establece que la velocidad $\vec{v}$ del agua, es proporcional al grad(p+y) donde p representa la presión e y la altura. Dada la incompresibilidad del líquido tenemos:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{en} \quad A$$

lo que significa:

$$\Delta p = 0 \quad \text{en} \quad A$$

Por otra parte tenemos las siguientes condiciones en el borde:

$$p = \phi \quad \text{en} \quad \Gamma_3$$

$$\frac{\partial(p+y)}{\partial\nu} = \vec{v} \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial(p+y)}{\partial\nu} = \vec{v} \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \quad y \quad p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2$$

$$\frac{\partial(p+y)}{\partial\nu} = \vec{v} \cdot \nu \leq 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_4 \quad y \quad p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_4,$$

donde ν es el vector normal exterior de A y ϕ es la presión del agua en Γ_3. Gracias al principio del máximo, tenemos $p > 0$ en A, dado que $\phi \geq 0$ en Γ_3 y $\partial p/\partial\nu > 0$ en Γ_1.

Esto nos lleva a una formulación débil del problema que sería:

$$\text{sea} \quad \zeta \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{con} \quad \zeta = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \quad y \quad \zeta \geq 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_4$$

tenemos

$$\int_A \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} \zeta + \int_A \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4} \left(\frac{\partial(p+y)}{\partial\nu}\right)\zeta = \int_{\Gamma_4} \frac{\partial(p+y)}{\partial\nu}\zeta \leq 0$$

Si prolongamos p por 0 en $\Omega - A$, para $\zeta \in C^1(\bar{\Omega})$, $\zeta = 0$ en Γ_3, $\zeta \geq 0$ en Γ_4 y H representando la función de Heaviside, tenemos:

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\zeta + \int_\Omega H(p)\zeta_y = \int_A \nabla p \cdot \nabla\zeta + \int_A \frac{\partial\zeta}{\partial y} \leq 0$$

La formulación fuerte del problema será entonces:

$$P_0 \quad \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega), \ p = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3 \ (\phi = 0 \text{ en } S_2) \\ p \geq 0 \text{ en } \Omega \text{ y encontrar un conjunto medible } A \text{ tal que} \\ p = 0 \text{ en } \Omega - A \text{ tales que} \\ \int_\Omega \text{grad } p \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y \leq 0 \quad \forall\zeta \in H^1(\Omega), \ \zeta = 0 \text{ en} \\ S_3, \ \zeta \geq 0 \text{ en } S_2 \end{cases}$$

1. EXISTENCIA.

Vamos a utilizar la siguiente formulación:

$$P_1 \quad \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega), \ p = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3 \ (\phi = 0 \text{ en } S_2) \\ p \geq 0 \text{ en } \Omega \text{ y encontrar } g \in L^\infty(\Omega), \ g = 1 \text{ en } \{p > 0\} \\ 0 \leq g \leq 1 \text{ en } \{p = 0\} \\ \int_\Omega \text{grad } p \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega g\zeta_y \leq 0 \quad \forall\zeta \in H^1(\Omega), \ \zeta = 0 \text{ en} \\ S_3, \ \zeta \geq 0 \text{ en } S_2, \end{cases}$$

para la que tenemos el siguiente teorema de existencia debido a Brezis, Kinderlehrer y Stampacchia [4].

<u>Teorema</u> 1.1 Suponemos que ϕ es lipchitziana y que $\phi \geq 0$ en $S_2 \cup S_3$. Entonces existe por lo menos una solución del problema (P_1); además esta solución está en $W^{1,s}_{loc}(\Omega), \forall s < \infty$.

Para evitar al lector demasiada búsqueda y por el interés que tiene en cuanto proporciona un "esquema" de aproximación reproducimos a continuación la demostración del anterior teorema.

Para demostrar la existencia se introduce el siguiente problema aproximado:

$$P_{(1,\varepsilon)} = \begin{cases} \textit{Encontrar} \;\; p_\varepsilon \in H^1(\Omega) \;\; \textit{con} \;\; p_\varepsilon = \phi \;\; \textit{en} \;\; S_2 \cup S_3 \;\textit{tal} \\ \textit{que} \;\; \int_\Omega \text{grad } p_\varepsilon \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega H_\varepsilon(p_\varepsilon)\zeta_y = 0 \\ \forall \zeta \in H^1(\Omega), \;\; \zeta = 0 \;\; \textit{en} \;\; S_2 \cup S_3, \end{cases}$$

donde H_ε *es una sucesión de funciones lipschitzianas que "converge" hacia* H *(función de Heaviside) y tal que* $H_\varepsilon(p) = 0$ *si* $p \leq 0$; *por ejemplo:*

$$H_\varepsilon(p) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \;\; p \leq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}p & \textit{si} \;\; 0 \leq p \leq \varepsilon. \\ 1 & \textit{si} \;\; p \geq \varepsilon \end{cases}$$

Se tiene entonces el siguiente lema:

__Lema.__ Suponemos que H_ε *es una función lipschitziana y acotada. Entonces existe una solución única* p_ε *de* $(P_{(1,\varepsilon)})$ *y además* $p_\varepsilon \geq 0$ *en* Ω.

__Demostración del lema.__ La existencia resulta del teorema del punto fijo de Schauder.

En cuanto a la unicidad, se consideran dos soluciones p_ε *y* $\hat{p}_\varepsilon$ *de* $(P_{(1,\varepsilon)})$. *Sea* $q = p_\varepsilon - \hat{p}_\varepsilon$ *se tiene entonces:*

$$\left|\int_\Omega \text{grad } q \cdot \text{grad } \zeta\right| \leq L \int_\Omega |q| \cdot |\zeta_y|,$$

donde L *es la constante de Lipschitz de* H_ε. *Dado* $\delta > 0$, *se escoge* $\zeta = (q-\delta)^+/q$. *Se obtiene:*

$$\int_{|q > \delta|} \frac{|\text{grad } q|^2}{q^2} \leq L \int_{|q > \delta|} \frac{|q_y|}{|q|}$$

y por lo tanto

$$\int_\Omega \left|\text{grad Log}\left(1+\frac{(q-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2 \le L^2|\Omega|$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré se tiene:

$$\int_\Omega \left|\text{Log}\left(1+\frac{(q-\delta)}{\delta}\right)\right|^2 \le CL^2|\Omega|$$

donde C *es independiente de* δ. *Haciendo tender* δ *hacia* 0, *se deduce que* $q \le 0$, *por lo tanto la solución es única.*

Se demuestra que $p_\varepsilon \ge 0$ *utilizando* $\zeta = (-p_\varepsilon-\delta)^+/p_\varepsilon$ *y aplicando la misma técnica que anteriormente.*

<u>Fin de la demostración del Teorema</u> 1.1.

Está claro que p_ε *está acotado en* $H^1(\Omega)$ *así como* $W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$. $\forall s < \infty$. *Sea* $p_{\varepsilon_n} \to p$ *en* H^1 *(débilmente),* $p_{\varepsilon_n} \to p$ *en* L^2, $H_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n}) \to g$ *en* L^2. *Sea* $\zeta \in H^1(\Omega)$ *con* $\zeta = 0$ *en* S_3 *y* $\zeta \ge 0$ *en* S_2; *se tiene*

$$\int_\Omega \text{grad } p_\varepsilon \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega H_\varepsilon(p_\varepsilon)\zeta_y = \int_{S_2} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}\zeta \le 0$$

dado que $p_\varepsilon = 0$ *en* S_2 *y* $p_\varepsilon \ge 0$ *en* Ω *implica* $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \le 0$ *en* S_2 *Pasando al límite, se ve que* p *es solución de* (P_1). *Se puede notar que* $g = 1$ *en el conjunto abierto* $p > 0$ *dado que* $H_\varepsilon(p_\varepsilon) \to 1$ *en* $p > 0$. *Esto acaba la demostración del teorema 1.1.*

<u>Nota</u> 1.2. Está claro que toda solución de (P_0) es solución de (P_1).

<u>Nota</u> 1.3. Vamos a demostrar que los problemas (P_1) y (P_0) son equivalentes en el sentido de que toda solución de (P_1)

es también solución de (P_0) lo que establecerá la existencia de soluciones de (P_0).

Previo a este resultado, vamos a establecer algunas relaciones obvias que satisfacen las soluciones de (P_1). (Por lo tanto también las eventuales soluciones de (P_0)).

Teorema 1.4. Si (p,g) es solución de (P_1) tenemos:

1) sea $G = \{(x,y) \in \Omega / g(x,y) = 1\}$, entonces $\Delta p = 0$ en $\overset{\circ}{G}$

2) $\Delta p \geq 0$ en Ω

3) $\Delta p + \partial_y g = 0$ en Ω

4) $\partial_y g \leq 0$ en Ω.

5) $\overset{\circ}{G} = \{p > 0\}$

Demostración. 1) Sea $\zeta \in C_0^\infty(\overset{\circ}{G})$ tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \zeta + \int_\Omega g\zeta_y = \int_{\overset{\circ}{G}} \nabla p \cdot \nabla \zeta + \int_{\overset{\circ}{G}} g\zeta_y = \int_{\overset{\circ}{G}} \nabla p \cdot \nabla \zeta$$

dado que $\int_{\overset{\circ}{G}} g\zeta_y = \int_{\overset{\circ}{G}} \zeta_y = 0$; luego $\Delta p = 0$ en $\overset{\circ}{G}$.

2) Sea $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ no-negativa y $\varepsilon > 0$ y sea la función $\min(p,\varepsilon\zeta) \in H_0^1(\Omega)$ con soporte en $\overset{\circ}{G}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \min(p,\varepsilon\zeta) + \int_\Omega g\,(\min(p,\varepsilon\zeta))_y \\ &= \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \min(p,\varepsilon\zeta) + \int_\Omega (\min(p,\varepsilon\zeta))_y \\ &= \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \min(p,\varepsilon\zeta) \geq \varepsilon \int_{p>\varepsilon\zeta} \nabla p \cdot \nabla \zeta \end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0$ $\{p > \varepsilon\zeta\} \to \{p > 0\}$ y al límite tenemos

$$0 \geq \int_{p>0} \nabla p \cdot \nabla \zeta = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \zeta \quad \text{lo que implica:}$$

$$\Delta p \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

3) Sea $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, tenemos:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \zeta + \int_{\Omega} g \zeta_y = -<\Delta p + \partial_y g, \zeta>_{H^{-1}, H_0^1}$$

con lo cual $\Delta p + \partial_y g = 0$ en Ω

4) de 2) y 3) se deduce $\partial_y g \leq 0$ en Ω.

5) Sea G_i una componente conexa de $\overset{\circ}{G}$, entonces en G_i tenemos ó $p > 0$ lo que está conforme con lo deseado ó $p \equiv 0$. Supongamos $p \equiv 0$ en G_i y obtengamos una contradicción.

Sea entonces $H_i = \{(x,y) \in \Omega / (x,y') \in G_i$ para algún $y'\}$. Está claro que en $H_i - G_i$ $p \equiv 0$ dado que $\partial_y g \leq 0$ con lo cual $p \equiv 0$ en H_i. Finalmente, sea ζ una función C^∞ no-negativa que se anula en $\Omega - H_i$, $\zeta \geq 0$ en S^2 y $\zeta_y \geq 0$, entonces $0 \geq \int_{\Omega} \nabla p \nabla \zeta + \int_{\Omega} g \zeta_y = \int_{\Omega} g \zeta_y \geq 0$. Lo que implica $g = 0$ donde $\zeta_y > 0$; deducimos entonces: $\overset{\circ}{G} = \{p > 0\}$.

Teorema 1.5.

Si (p,g) es solución de (P_1), entonces (p,G) es solución de P_0; siendo $G = \{(x,y) \in \Omega / g(x,y) = 1\}$.

Demostración.

Vamos a demostrar que $g = 0$ en casi todo punto del interior del conjunto $\{p = 0\}$. Para ello vamos a suponer que

$\omega \subset \text{Int}\,\{p = 0\}$ es un conjunto de medida no nula en el que $g \neq 0$; entonces existe $(x_0, y_0) \in \omega$ tal que $\forall\varepsilon > 0$:

$$|B[(x_0,y_0),\, \varepsilon] \cap \omega| \neq 0;$$

sea entonces $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B[(x_0,y_0),\, \varepsilon] \subset \text{Int}\,\{p = 0\}$ construimos una función $\zeta \in C^\infty(\bar{\Omega})$, tal que ζ se anule en $\Omega - H_\varepsilon$ siendo

$$H_\varepsilon = \{(x,y) \in \Omega/(x,y') \in B[(x_0,y_0),\varepsilon] \text{ para algún } y' \leq y\}$$

(notemos entonces que $H_\varepsilon \subset \text{Int}\,\{p = 0\}$), y tal que $\zeta_y \geq 0$ y $\zeta_y = 1$ en

$$H_{\varepsilon/2} = \{(x,y) \in \Omega/(x,y') \in B[(x_0,y_0),\, \varepsilon/2] \text{ para algún } y' \leq y\}.$$

Entonces $\zeta \in H^1(\Omega)$ y $\zeta \geq 0$ en S_2, $\zeta = 0$ en S_3, por lo tanto tenemos

$$0 \geq \int_\Omega \nabla p \nabla \zeta + \int_\Omega g\zeta_y = \int_\Omega g\zeta_y \geq 0 \qquad \text{con lo cual } g\zeta_y = 0$$

en casi todo punto lo que supone $g = 0$ en casi todo punto de $H_{\varepsilon/2}$ De esta contradicción deducimos:

$$g = 0 \text{ en } \text{Int}\,\{p = 0\}$$

II. EXISTENCIA DE UNA SOLUCION MINIMAL Y UNICIDAD EN UN SENTIDO DEBIL.

En esta segunda parte vamos a demostrar que existe una solución minimal p_0 y que cualquier otra solución es igual a la solución minimal más una solución p del problema con dato en el borde $S_2 \cup S_3$ identicamente nulo, tal que $\{p > 0\} \cap \{p_0 > 0\} = \emptyset$.

a) Soluciones S_3-conexas.

Definición. 2.1. Llamamos solución S_3-conexa toda solución p de (P_0) tal que los cierres de todas las componentes conexas de $\{p > 0\}$ corten S_3.

Demostraremos entonces el siguiente teorema:

Teorema. 2.2.

Toda solución de (P_0) es suma de una solución S_3-conexa más una solución del problema (P_0), con un dato en el borde $\phi \equiv 0$ en $S_2 \cup S_3$, nula en el soporte de la solución S_3-conexa.

Demostración.

Vamos a ver primero los siguientes lemas:

Lema 2.3. Sea p una solución de (P_0) y sea A_i una componente conexa de $\{p > 0\}$ tal que el cierre de A_i no corte S_3 entonces $p_i = p \cdot I(A_i)$ es solución del problema

$$P_0(\phi = 0) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega) \quad p = 0 \text{ en } S_2 \cup S_3, \quad p \geq 0 \\ \text{en } \Omega \text{ y encontrar un conjunto medible } A \text{ tal que} \\ p = 0 \text{ en } \Omega - A, \text{ tales que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y \leq 0 \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega) \\ \zeta \geq 0 \text{ en } S_2 \cup S_3. \end{cases}$$

Demostración.

Si llamamos $H(A_i)$ el siguiente conjunto

$$H(A_i) = \{(x,y) \in \Omega / (x,y') \in A_i \text{ para algún } y'\}$$

tenemos,

$$\frac{\partial p_i}{\partial \nu} + I(A_i)\nu \cdot y \leq 0 \quad \text{en el borde de} \quad H(A_i) \;;$$

en efecto en la parte vertical tenemos,

$$I(A_i) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{dado que} \quad \delta A_i$$

no puede tener tramos verticales dentro de Ω sino en ellos tendríamos $p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \nu} = 0$ y por lo tanto $p_i \equiv 0$ en A_i; en S_1 tenemos

$$\frac{\partial p_i}{\partial \nu} + I(A_i)\nu \cdot y = 0$$

y en S_2:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \nu} + I(A_i)\nu \cdot y \leq 0.$$

Entonces para todo $\zeta \in H^1(\Omega)$, $\zeta \geq 0$ en $S_2 \cup S_3$ tenemos:

$$\int_\Omega \text{grad } p_i \cdot \text{grad}\zeta + \int_\Omega I(A_i)\zeta_y = \int_{H(A_i)} \nabla_p \nabla\zeta + \int_{H(A_i)} I(A)\zeta_y \leq 0.$$

<u>Lema</u> 2.4. Las soluciones del problema $[p_0(\phi = 0)]$ son soluciones del problema:

$$P_0(\phi = 0)^* \quad \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega), \; p = 0 \text{ en } S_2 \cup S_3, \; p \geq 0 \text{ en} \\ \Omega \text{ y encontrar un conjunto medible } A \text{ tal que } p = 0 \\ \text{en } \Omega - A, \text{ tales que} \\ \displaystyle\int_\Omega \text{grad } p \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y = 0 \quad \forall\zeta \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

(La recíproca es obvia).

<u>Demostración</u>.

Sea (P_i, A_i) una solución de $[P_0(\phi = 0)]$ entonces para todo $\zeta \in D(\bar{\Omega})$ tal que $\zeta \geq 0$ en $S_2 \cup S_3$, tenemos:

$$\int_\Omega \nabla p_i \cdot \nabla\zeta + \int_\Omega I(A_i)\zeta_y \leq 0$$ con lo cual si $\zeta_1 \geq \zeta_2$

ζ_1 y $\zeta_2 \in D(\bar{\Omega})$, tenemos:

$$\int_\Omega \nabla p_i \nabla(\zeta_1-\zeta_2) + \int_\Omega I(A_i)(\zeta_1 - \zeta_2)_y \leq 0$$

en particular, sea ζ_2 una función de $D(\bar{\Omega})$ y ζ_1 y ζ_3 tales que

$$\zeta_1 = \underset{\bar{\Omega}}{\mathrm{Max}}\ (\zeta_2), \quad \zeta_3 = \underset{\bar{\Omega}}{\mathrm{Min}}\ (\zeta_2) \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega \nabla p_i \nabla(\zeta_1 - \zeta_2) + \int_\Omega I(A_i)(\zeta_1 - \zeta_2)_y = \\ &= -[\int_\Omega \nabla p_i \cdot \nabla\zeta_2 + \int_\Omega I(A_i)\zeta_{2_y}] \\ &= \int_\Omega \nabla p_i \nabla\ (\zeta_3 - \zeta_2) + \int_\Omega I(A_i)(\zeta_3 - \zeta_2)_y \geq 0 \end{aligned}$$

con lo cual, dado que ζ_2 es arbitraria,

$$\int_\Omega \nabla p_i \cdot \nabla\zeta + \int_\Omega I(A_i)\zeta_y = 0 \quad \text{para todo} \quad \zeta \in D(\bar{\Omega}),$$

por lo tanto para todo $\zeta \in H^1(\Omega)$.

<u>Nota</u>. 2.5. Analizaremos las soluciones del problema $[P_0(\phi = 0)^*]$ en la tercera parte de este trabajo.

<u>Fin de la demostración del Teorema</u> 2.2.

Sean A_i, $i = 1, k$ las componentes conexas de $\{p > 0\}$ (p es solución de (P_0)), cuyo cierre no corta a S_3, entonces tenemos:

$$\int_\Omega \nabla(p - \sum_{i=1}^{k} I(A_i))\nabla\zeta + \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} I(A_i)\zeta_y = 0 \quad \forall\zeta \in H^1(\Omega)$$

Por lo tanto si A_i $i = k + 1, \ell$ son las componentes conexas de $\{p > 0\}$ cuyos cierres cortan S_3

$$\int_\Omega \nabla(p - \sum_{i=k+1}^{\ell} I(A_i))\nabla\zeta + \int_\Omega \sum_{i=k+1}^{\ell} I(A_i)\zeta_y \leq 0 \quad \text{para todo}$$

$\zeta \in H^1(\Omega)$, $\zeta \geq 0$ en S_2, $\zeta = 0$ en S_3; con lo cual $p \cdot \sum_{k+1}^{\ell} I(A_i)$ es una solución S_3-conexa de (P_0).

b) Unicidad en el conjunto de soluciones S_3-conexas - solución minimal.

Vamos a ver que el problema (P_0) posee una única solución S_3-conexa, por lo tanto esta solución será solución minimal del problema. Para ésto, utilizaremos unos resultados de W. Alt [1] sobre el siguiente problema:

$$P_2 \quad \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega),\ p = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3,\ p \geq 0 \text{ en} \\ \Omega,\ \text{y encontrar un conjunto medible } A \text{ tal que } p = 0 \\ \text{en } \Omega \quad A \text{ y tales que} \\ \int_\Omega \text{grad } p \cdot \text{grad } \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y = 0 \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega),\ \zeta = 0 \\ \text{en } S_2 \cup S_3. \end{cases}$$

Nota 2.6. Es obvio constatar que toda solución del problema (P_0) es también solución del problema (P_2).

Teorema 2.7. (Alt [1]).

Si ϕ es Lipschitziana y $\phi \geq 0$ en $S_2 \cup S_3$ entonces el problema (P_2) posee soluciones. Si (p,A) es solución de (P_2) entonces satisface:

1) $\Delta_p = 0$ en $\mathring{A}$

2) $\Delta_p \geq 0$ en Ω

3) $\partial_p + \partial_y(I(A)) = 0$ en Ω

4) $\partial_y(I(A)) \leq 0$ en Ω

5) $p \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ $\forall\alpha$ tal que $0 < \alpha < 1$,

Además, el problema (P_2) posee una solución minimal (p_0, A_0) tal que $\forall(p,A)$ solución de (P_2) tengamos:

$$0 \leq p_0 \leq p \quad \text{en} \quad \Omega, \quad A_0 \subset A.$$

Nuestro propósito es de comparar las soluciones S_3-conexas de (P_0) con la solución minimal de (P_2).

Teorema 2.8.

El problema (P_0) tiene una única solución S_3-conexa; esta solución es la solución minimal del problema (P_2). (y del problema P_0).

Demostración.

Llamamos p_0 la solución minimal del problema (P_2), vamos a demostrar que cualquier solución p S_3-conexa del problema (P_0) es igual a p_0. Para ello vamos a demostrar que:

$$\frac{\partial p - p_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad S_3.$$

En principio tenemos $p - p_0 \geq 0$ en Ω y $p - p_0 = 0$ en $S_3 \cup S_2$ con lo cual $\frac{\partial p - p_0}{\partial \nu} \leq 0$ en $S_3 \cup S_2$.

Si cogemos entonces una función $\zeta \in H^1(\Omega)$ con $\zeta \geq 0$ tenemos:

$$(2.5.1.) \quad \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y = \int_{S_2} \left(-\frac{\partial p}{\partial \nu} + I(\bar{A})\nu \cdot y\right)\zeta d\Gamma + \int_{S_3} \left(-\frac{\partial p}{\partial \nu} + I(\bar{A})\nu \cdot y\right)\zeta d\Gamma$$

$$(2.5.2.) \quad \int_\Omega \nabla p_0 \nabla \zeta + \int_\Omega I(A_0)\zeta_y = \int_{S_2} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial \nu} + I(\bar{A}_0)\nu \cdot y\right)\zeta d\Gamma + \int_{S_3} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial \nu} + I(\bar{A}_0)\nu \cdot y\right)\zeta d\Gamma;$$

restando (2.5.2.) de (2.5.1.) tenemos:

$$(2.5.3.)\quad \int_\Omega \nabla(p-p_0)\cdot\nabla\zeta + \int_\Omega I(A-A_0)\zeta_y = \int_{S_2} \left(\frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu} + I(\overline{A-A_0})\nu\cdot y\right)\zeta d\Gamma + \int_{S_3} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu}\zeta d\Gamma$$

dado que S_3 pertenece a los bordes de A y de A_0.

Por otra parte, tenemos:

$$(2.5.4.)\quad \int_{S_2} \left(\frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu} + I(\overline{A-A_0})\nu\cdot y\right)\zeta d\Gamma = \int_{S_2 \cap A_0} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu}\zeta d\Gamma + \int_{S_2 \cap (\overline{A-A_0})} \left(\frac{\partial p}{\partial\nu} + I(\bar{A})\nu\cdot y\right)\zeta d\Gamma$$

dado que $S_2 \cap \bar{A}_0$ pertenece a los bordes de A y de A_0 y que $\frac{\partial p_0}{\partial\nu} = 0$ en el borde de $A-A_0$.

Por otra parte $\frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu} \leq 0$ en $S_2 \cup S_3$, y $\frac{\partial p_0}{\partial\nu} + I(\bar{A})\nu\cdot y \leq 0$ en S_2 dado que p es solución de (P_0) con lo cual, de ésto y de (2.5.4.) y (2.5.3.) deducimos:

$$(2.5.5.)\quad \int_\Omega \nabla(p-p_0)\cdot\nabla\zeta + \int_\Omega I(\overline{A-A_0})\zeta_y \leq \int_{S_3} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial\nu}\zeta d\Gamma \leq 0 \qquad \forall\zeta \in H^1(\Omega),\ \zeta\geq 0$$

Si llamamos ζ_ε la restricción a Ω de la función

$$\zeta_\varepsilon = \varepsilon x + 1 - \varepsilon x_0$$

donde x_0 es escogido tal que para todo $x \geq x_0$ y para todo $y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \notin \Omega$ (tal elección se puede hacer dado que Ω está acotado). $\zeta_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ y por otra parte ζ_ε converge uniformemente hacia 1 cuando ε tiende a 0, con lo cual existe ε_0 tal que $\forall\varepsilon \leq \varepsilon_0$ tengamos: $\zeta_\varepsilon > 0$.

Suponiendo entonces $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ tenemos de (2.5.5.):

$$(2.5.6.) \qquad \varepsilon \int_\Omega \frac{\partial p - p_0}{\partial x} \leq \int_{S_3} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial \nu} \zeta_\varepsilon \leq \int_{S_3} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial \nu} \zeta_{\varepsilon_0} \leq 0$$

de lo cual deducimos:

$$(2.5.7.) \qquad \varepsilon |\mathrm{grad}(p-p_0)|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \geq \int_{S_3} \left|\frac{\partial p - p_0}{\partial \nu}\right| \zeta_{\varepsilon_0} \geq 0$$

para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ con lo cual haciendo tender ε hacia 0 deducimos

$$\frac{\partial(p-p_0)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad S_3,$$

por lo tanto, tenemos:

$$p - p_0 = \frac{\partial(p-p_0)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad S_3, \quad \text{siendo} \quad S_3 \text{ regular},$$

y $p-p_0$ armónica en A_0 con lo cual deducimos

$$p - p_0 = 0 \quad \text{en} \quad A_0;$$

es obvio deducir entonces,

$$p \equiv p_0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

Entonces p_0 es la única solución de (P_0) S_3-conexa; por otra parte el teorema 2.2, nos permite concluir que p_0 es la solución minimal del problema (P_0).

III. ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES DE $[P_0(\phi = 0)]$ Y UNICIDAD.

En esta parte vamos a estudiar las soluciones del problema $[P_0(\phi = 0)]$ y dados los teoremas (2.2) y (2.8), deduciremos condiciones suficientes para la unicidad de la solución en el problema (P_0).

Sea p una solución de $\{P_0(\phi = 0)\}$ es fácil ver que para toda componente conexa A_i de $\{p > 0\}$ tenemos que $p \times I(A_i)$ es también solución de $[P_0(\phi = 0)]$, por lo tanto, nos vamos a limitar al caso en que $\{p > 0\}$ es conexo.

Teorema 3.1.

Si p es solución de $[P_0(\phi = 0)]$ tal que el conjunto $\{p > 0\}$ sea conexo, entonces tenemos:

$$p = \text{Max} \cdot (H-y,0) \times I(A)$$

donde $A = \{p > 0\}$ y

$$H = \sup \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que } p(x,y) > 0 \text{ para algún } (x,y) \in \Omega\}$$

Demostración.

Para todo $\zeta \in H^1(\Omega)$ tenemos:

$$\int_\Omega \nabla p \nabla \zeta + \int_\Omega I(A)\zeta_y = 0.$$

Si cogemos $\zeta = p - \text{Max}(H-y, 0)$ tenemos

$$0 = \int_\Omega \nabla p \nabla(p-\text{Max}(H-y,0)) + \int_\Omega I(A)(p-\text{Max}(H-y,0))_y$$

$$= \int_A \nabla p \nabla(p-\text{Max}(H-u,0)) + \int_A (p-\text{Max}(H-y,0))_y$$

Dado que $-\nabla(\text{Max}(h-y,0)) = (0,1)$ en A, tenemos

$$0 = \int_A \nabla p \nabla(p-\text{Max}(H-y,0)) - \int_A \nabla(\text{Max}(H-y,0)) \cdot \nabla(p-\text{Max}(H-y,0))$$

$$= \int_A [\nabla(p-\text{Max}(H-y,0))]^2 \text{ con lo cual tenemos que}$$

$p-\text{Max}(H-y,0)$ es constante sobre A; como (x,H) pertenece al borde de A para algún x, tenemos:

$$p = \mathrm{Max}(H-y,0) \quad \text{en} \quad A$$

$$p = \mathrm{Max}(H-y,0) \times I(A) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

De este Teorema deducimos el siguiente Corolario.

Corolario. 3.2.

Una condición suficiente para que la solución de (P_0) sea única es que $S_1 - \overline{A}_0$ sea monótono en cada una de sus componentes conexas, siendo A_0 el conjunto en que la solución minimal de (P_0) es mayor que 0.

Demostración. Es obvio ver que en estas condiciones las soluciones no nulas de $[P_0(\phi = 0)]$ tienen un soporte que corta A_0, con lo cual los teoremas 2.2. y 2.8, nos permiten asegurar la unicidad de la solución de (P_0).

BIBLIOGRAFIA.

[1] Alt, Arch. Ract. Mech. Anal., 641 (1977), pp. 111-126, "A free boundary problem associated with the flow of ground water"

[2] Baiocchi, Ann. Mat. Pura Appl., 92 (1972), pp. 107-127, "Su un problema di frontera libera connesso a question di idraulica".

[3] Baiocchi, Comptes rendus, 278, Serie A (1974), pp. 1201-1204, "Problème ã frontiere libre en hydraulique".

[4] Brezis-Kinderlehrer-Stampacchia, Comptes rendus, 287, Serie A, (1978), pp. 711-714, "Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement ã travers une digue".