Introducció

L'objectiu de la present memòria és determinar tots els enters r,m,p per als quals existeix un fibrat de fibra S^r_p, l'esfera de dimensió r localitzada a p i d'espai total S^m_p, l'esfera de dimensió m localitzada a p. Dit amb més precissió, aquesta memòria està dedicada principalment a la demostració del següent resultat:

<u>Teorema</u>: Existeix un fibrat de fibra S^r_p i espai total S^m_p, $0 < r < m$, si i només si (r,m,p) pertanyen a algun dels següents tipus:

I) $(2n-1, 2nt-1, p)$, $1 < t < p$;

II) $(2n-1, m, p)$, n divideix $p-1$, $2n \leq m$;

III) $(2n-1, n(2c+1), p)$, $n=2k$, k divideix $p-1$, $1 \leq c < \frac{p-1}{n}$;

IV) $(3,m,2)$, $3 < m$; $(7,15,2)$.

Passem a continuació a donar una visió històrica del problema, que permeti situar millor aquest resultat dins el context de la Topologia Algebraica.

En certa manera pot dir-se que la teoria d'homotopia va començar a prendre forma el 1935, quan Hopf va donar els primers exemples de fibrats d'esferes per esferes. Es tracta dels avui dia anomenats fibrats de Hopf:

$$\begin{array}{l} S^1 \longrightarrow S^{2t-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{t-1} \\ S^3 \longrightarrow S^{4t-1} \longrightarrow \mathbb{H}P^{t-1} \\ S^7 \longrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8 \end{array}$$

Cairebé simultàneament es planteja la pregunta de si aquests són els únics fibrats en els quals la fibra i l'espai total són esferes. Les tècniques desenvolupades en aquella època eren marcadament insuficients per a donar resposta a aquesta pregunta. Una generalització natural és, donats un espai E i un subespai F, preguntar-se per l'existència d'un fibrat de fibra F i espai total E. Aquest problema, en aquests mateixos termes, apareix a la llista de problemes publicada per Massey a l'any 55 ([19]), amb motiu d'una conferència sobre fibrats i geometria diferencial que tingué lloc a la Cornell University el 1953.

Convé observar que el problema anterior, enunciat en termes absoluts, no és un problema ben plantejat de teoria d'homotopia, degut a que la resposta no és un invariant del tipus d'homotopia dels espais E i F donats. Cal, doncs, adoptar la següent definició: direm que un espai E és fibrable per un espai F si existeix un espai B, espais $\overline{F}$, $\overline{E}$ i un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & B \\ \overline{F} \arrow[r] & \overline{E} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

on $\overline{F} \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow B$ és una fibració i les aplicacions verticals són equivalències homotòpiques.

Aquest problema no està resolt i si bé Husseini ([17]) va donar una caracterització interessant, no sembla raonable esperar una solució completa. En canvi, en el cas particular de que E i F són esferes, es tracta d'un problema molt més concret, en el qual es van succeir els resultats parcials. Citem els de [34], [29], [3], molt limitats, però que demostren fins a quin punt en aquella època es tractava d'un problema difícil.

Un pas cabdal va ser el descobriment del que avui dia anomenem successió exacta de Gysin. Si $S^r \longrightarrow S^m \longrightarrow B$ és un fibrat localment trivial, la successió exacta de Gysin ens permet afirmar que $r=2n-1$ i $m=2nt-1$. A més, la cohomologia de B és una àlgebra de polinomis truncada.

Convé parlar dels resultats de Spanier-Whitehead [25] de 1955 i de Sugawara [32], [33] de 1957, que donen un tomb sorprenent al problema. El primer d'aquests treballs demostra que si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ és un fibrat i F és contràctil a E, aleshores F és un H-espai. Els treballs de Sugawara demostren que si F és un H-espai, aleshores $F * F$, el "join" de F amb ell mateix, pot fibrar-se per F i si F és un espai de llaços, existeix un espai contràctil E que pot fibrar-se per F. En particular, si demostrem que les úniques esferes que són H-espais són les de dimensions 1, 3 i 7, ja tindrem pràcticament demostrat (mancarà un detall en el cas de S^7) que els fibrats de Hopf són els únics fibrats d'esferes per esferes. Però el problema de determinar quines esferes són H-espais és un problema clàssic, d'història ben coneguda. Recordem-ne les principals etapes: invariant de Hopf, operacions de Steenrod, relacions d'Adem, operacions secundàries i resolució final del problema per Adams [1], al 1958.

Pot dir-se que l'estudi de l'homotopia mòdul un primer va néixer amb el treball fonamental de Serre [21] de l'any 53. En aquest treball apareix una frase que ha esdevingut profètica: "Il y a là la possibilité d'une étude locale (au sens arithmetique) des groupes d'homotopie". Per exemple, l'obstrucció perquè S^{2n-1} sigui un H-espai es troba a la component 2-primària dels grups d'homotopia. Adams afirma a [2] que ja pels volts de 1956 feia l'observació de que "S^{2n-1} és un H-espai mòdul $p \neq 2$".

La teoria de localització d'espais simplement connexos neix en certa manera com una realització del programa de Serre.

Es tracta de traduir en processos geomètrics el procés algebraic de localitzar un grup abelià (un $\mathbb{Z}$-mòdul) a un primer. El creador d'aquesta teoria va ser Sullivan ([3o]) al 197o. Posteriorment s'ha desenvolupat enormement, principalment en dues direccions: la generalització a espais no simplement connexos ([13],[8]) i les aplicacions a problemes clàssics "mòdul p".

Els èxits aconsseguits per la teoria de localització en els darrers anys han estat molt nombrosos i no els podem discutir aquí tots. S'ha utilitzat aquesta teoria per estudiar el problema de quan un espai és un H-espai mòdul p, o un espai de llaços mòdul p i també per a donar nous exemples de H-espais i d'espais de llaços.

Paral.lelament a la localització, Sullivan va introduir la completació d'espais simplement connexos, que s'ha mostrat com una eina molt potent, que permet construccions geomètriques d'un gran interès. Fixem-nos només en que, aplicant la teoria de completació, Sullivan demostra ([3o]) que si n divideix p-1, aleshores S_p^{2n-1}, la localització de l'esfera de dimensió 2n-1 a p, és un espai de llaços, i això ho fa construint explícitament l'espai classificador. El motiu d'aquesta "ductilitat" de la completació cal cercar-lo al fet de que $\mathbb{Z}$ té pocs invertibles mentre que l'anell dels p-àdics en conté molts més i, en particular, conté arrels (p-1)-èssimes de la unitat! El mètode utilitzat per Sullivan ha estat generalitzat per Clark - Ewing ([9]) i aplicat a la construcció d'espais amb cohomologia polinòmica.

En aquest estat de coses, quan la tendència a estudiar problemes clàssics mòdul cada primer s'està mostrant tan fecunda, és natural plantejar-se el problema de quines esferes localitzades a p poden fibrar-se per esferes localitzades a p. La resolució d'aquest problema és l'objectiu del present treball.

En primer lloc cal fer una observació important: el localitzat d'un espai a un primer no és un espai, sinó un tipus homotopia, és a dir, una classe d'equivalència d'espais mòdul la relació de ser homotopament equivalents. Per tant, quan estudiem fibrats d'esferes per esferes mòdul p cal adoptar la definició homotopament invariant citada anteriorment. És a dir, quan diem que $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ és un fibrat, de fet afirmem només que és un fibrat llevat d'homotopies. Això té conseqüències molt importants; per exemple, encara que E i F siguin esferes locals, no podem afirmar que B té dimensió finita.

Donem una idea de la demostració del teorema principal que hem enunciat al començament d'aquesta introducció. És clar que tindrà dues parts ben diferenciades. En primer lloc cal veure quins són els fibrats d'esferes per esferes mòdul p que coneixem i després caldrà demostrar que no n'hi ha més. Parlem primer d'aquesta segona part. El mètode és el clàssic: aplicar la successió de Gysin amb coeficients $\mathbb{Z}_p$ per calcular la cohomologia de la base. Estudiar aleshores l'actuació de les operacions de Steenrod i de les operacions secundàries sobre aquesta cohomologia i obtenir restriccions sobre les dimensions de les esferes. En el cas p=2, les operacions de cohomologia no basten i cal recórrer a la teoria K. La construcció efectiva dels fibrats es fa aplicant en diversos punts la teoria de Sullivan.

Observem, doncs, que al localitzar a p apareixen molts fibrats nous, sense relació amb els de Hopf. Tots aquests fibrats són "invisibles" abans de localitzar.

La present memòria s'organitza de la següent manera: El capítol zero conté la totalitat dels resultats no originals de la present memòria i conté també un resum dels resultats que utilitzarem al llarg de les demostracions. Els capítols 1 i 4 són principalment tècnics. En ells s'obtenen certs resultats que si bé s'utilitzaran a la demostració del teorema principal, s'aparten de la línia general del treball. El capítol 2 conté les construccions dels fibrats d'esferes per esferes mòdul p. El capítol 3 està dedicat a demostrar que les condicions del teorema principal són necessàries en el cas $p\neq 2$ i al capítol 5 es fa el mateix per al cas $p=2$. La bibliografia conté només les obres citades.

Una versió preliminar, molt rudimentària, del present treball va ser presentada per mi a la Reunión Anual de Matemáticos Españoles del 1977 ([4]).

Finalment, voldria mostrar el meu agraïment a tanta gent com m'ha ajudat en la realització d'aquest treball, i molt especialment al Dr. M. Castellet que n'ha estat el director.

Barcelona, Març del 1979

0. Resultats previs

L'objectiu d'aquest capítol és agrupar diversos resultats ja coneguts que utilitzarem al llarg de la memòria. A més, aquest capítol també servirà per a donar una breu idea sobre les principals tècniques que farem servir més endavant.

o.1 Topologia Algebraica general

Evidentment, utilitzarem lliurement la Topologia Algebraica que pot considerar-se bàsica, entenent per tal la que es troba continguda al llibre de Spanier [24]. Generalment, la referència a resultats continguts a aquest llibre serà omesa. Citem, però, alguns dels punts que apareixeran més repetidament:

a) Teoremes de coeficients universals, principalment 5.5.3;

b) obstrucció, secció 8.4;

c) successió exacta de Gysin i isomorfisme de Thom, 9.5.2;

d) teoria de Serre de classes de grups abelians, secció 9.6;

e) el teorema 9.7.13 que afirma que la component p-primària de $\pi_{n+m}(S^n)$, n senar, $n \geq 3$, és zero si $o < m < 2p-3$ i $\mathbb{Z}_p$ si $m=2p-3$.

També utilitzarem el concepte d'aproximació homològica d'un espai, que pot trobar-se, per exemple, a [12], p. 53.

Diverses vegades utilitzarem push-outs i també la successió de Mayer-Vietoris d'un push-out.

La paraula espai voldrà dir espai topològic del tipus d'homotopia d'un CW complex.

o.2 Grups abelians

Designarem per $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\hat{\mathbb{Z}}_p$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, els grups dels enters mòdul n, els enters localitzats a p, els enters p-àdics i el grup de les arrels p^r-èssimes de la unitat per a tot r, respectivament.

Utilitzarem alguns resultats sobre grups abelians, sobre tot al capítol 1. Es tracta, principalment, de propietats dels subgrups p-bàsics i dels functors Hom i Ext. La principal referència és el llibre de Fuchs [11].

Recordem que un subgrup B d'un grup abelià A es diu que és p-bàsic si compleix:

i) B és suma directa de p-grups cíclics i grups cíclics infinits;

ii) A/B és p-divisible;

iii) B/p^kB és sumand directe de A/p^kB per a tot k.

Tot grup abelià conté subgrups p-bàsics ([11], I, p.137).

Utilitzarem també les computacions: $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n,A)=A/nA$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{D},\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{D}^{\aleph_0}$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{(p)})=\hat{\mathbb{Z}}_p$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{(p)},\mathbb{Z}_{(p)})=$ $=0$.

També utilitzarem els teoremes d'estructura dels grups divisibles ([11], I, p. 1o4) i dels grups lliures de torsió de rang 1 ([11],II, p.11o).

Recordem que un grup abelià p-local és un grup q-divisible i sense q-torsió per a tot $q\neq p$.

o.3 Localització de CW complexos

La referència bàsica és el llibre de Hilton - Mislin - Roitberg [13], si bé gairebé mai sortirem del marc elemental dels espais simplement connexos. Recordem que la teoria de localització associa a tot espai simplement connex X un altre espai X_p, definit llevat d'homotopies, i una aplicació $X \longrightarrow X_p$ de manera que X_p és p-local, és a dir, els seus grups d'homologia (o equivalentment els seus grups d'homotopia) són p-locals, i, a més, $X \longrightarrow X_p$ és universal amb aquesta propietat. La localització conserva fibracions.

En algun punt molt concret s'utilitza la teoria de completació d'espais no necessàriament simplement connexos. Si bé la referència original és [3o], és millor utilitzar el llibre de Bousfield – Kan [8].

o.4 <u>Fibrats de fibra una esfera localitzada o completada</u>

Utilitzarem diverses vegades el resultat fonamental del treball de Sullivan [3o]. Aquest teorema afirma que per a cada n i p existeixen espais $\mathcal{B}_{n,p}$, $\hat{\mathcal{B}}_{n,p}$ tals que els fibrats sobre un espai X de fibra S_p^{n-1}, o bé $\hat{S}_p^{n-1}$, estan classificats per $[X, \mathcal{B}_{n,p}]$ i $[X, \hat{\mathcal{B}}_{n,p}]$, respectivament. A més, $\mathcal{B}_{n,p}$ i $\hat{\mathcal{B}}_{n,p}$ són el localitzat i el completat, respectivament, de l'espai BG_n. Aquest espai és l'espai classificador del H-espai associatiu dels automorfismes de l'esfera S^{n-1}.

o.5 <u>L'àlgebra de Steenrod mòdul p</u>

En la demostració del teorema principal de la present memòria intervé de manera fonamental l'àlgebra de Steenrod mòdul p, incloses les relacions d'Adem. La referència standard és el llibre de Steenrod – Epstein [28].

També utilitzarem el teorema de Liulevicius [18] i Shimada [23] sobre la factorització de les potències reduides de Steenrod a través d'operacions secundàries de cohomologia. És l'anàleg mòdul p del cèlebre teorema d'Adams [1] sobre la no existència d'elements d'invariant de Hopf 1.

De fet, el que utilitzarem serà el següent corol.lari d'aquest teorema:

<u>Corol.lari o.1</u>: Si β i $\mathcal{P}^1$ operen trivialment sobre $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ $p\neq 2$, aleshores $\mathcal{P}^i$ opera trivialment sobre $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$, per a tot i.

La demostració d'aquest corol.lari a partir del teorema de Liulevicius - Shimada es troba a [2o].

Una bona part de la present memòria està dedicada a veure que certes àlgebres de cohomologia no són realitzables. Citem els següents resultats ben coneguts:

1) Si $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x, truncada a $x^3=o$, aleshores la dimensió de x és 2,4 o 8.

2) Si $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x, truncada a $x^{p+1}=o$, aleshores la dimensió de x divideix p-1.

3) Si $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x, truncada a $x^4=o$, aleshores la dimensió de x és 2 o 4.

o.6 <u>Teoria K</u>

Al capítol 5 s'utilitza teoria K complexa amb coeficients $\mathbb{Z}_{(p)}$. Una referència general és el llibre d' Atiyah [6]. El mètode per a calcular K(X) és la successió espectral de Atiyah - Hirzebruch ([7]): es tracta d'una successió espectral amb $E_2^n = H^n(X;\mathbb{Z}_{(p)})$, que convergeix al graduat associat a K(X) respecte a la filtració donada per

$$K_n = \mathrm{Ker}\ (\ K(X) \longrightarrow K(X^{2n-1})\ ).$$

Si H(X) no té p-torsió, aquesta successió espectral col.lapsa i per tant, tenim:

$$H^{2i}(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Gr_i K(X) = K_i/K_{i+1}.$$

Un resultat útil és la següent observació de Hubbuck ([15]):

Lema o.2: Sigui $\mathbb{M}$ una $\mathbb{Z}_{(p)}$-àlgebra filtrada, lliure com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul i tal que la seva àlgebra graduada associada $\mathbb{N}$ sigui una àlgebra de polinomis truncada. Aleshores es compleix que si $\mathbb{N}\otimes\mathbb{Q} \cong \mathbb{M}\otimes\mathbb{Q}$, també $\mathbb{N} \cong \mathbb{M}$. ∎

També utilitzarem les operacions d'Adams ψ^k. Recordem les seves propietats:

a) ψ^k és homomorfisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$-àlgebres;

b) $\psi^q\psi^r = \psi^r\psi^q = \psi^{rq}$;

c) $\psi^q x - q^n x \in K_{n+1}$ si $x \in K_n$;

d) $\psi^p x \equiv x^p$ mod p;

e) Si $H(X)$ és lliure de p-torsió i $x \in K_n$, existeixen $v_{n+i(p-1)} \in K_{n+i(p-1)}$ tals que $\psi^p x = \sum_{i=0}^{n} p^{n-i}\, v_{n+i(p-1)}$. A més, v_{pn} pot prendre's igual a x^p. Si $\bar{x}$, $\bar{v}_{n+i(p-1)}$ són els elements corresponents de $Gr\,K(X)$, es compleix que $\bar{v}_{n+i(p-1)} = \mathcal{P}^i(\bar{x})$. (Si $p=2$, posem $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$).

1. Com reconèixer una esfera localitzada

L'objectiu d'aquest capítol és donar condicions necessàries i suficients sobre la cohomologia d'un espai simplement connex, per tal de poder afirmar que és del tipus d'homotopia de S_p^m, l'esfera de dimensió m localitzada a p.

p designarà un primer fixat.

Lema 1.1: Sigui A un grup abelià i B un subgrup p-bàsic. Aleshores, $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p)$.

Demostració: Com que A/B és p-divisible i $\mathbb{Z}_p$ no conté subgrups p-divisibles diferents del trivial, la successió exacta de Hom-Ext associada a $B \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/B$ dóna que $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_p)$ és un subgrup de $\mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p)$. Sigui $f:B \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. Clarament, f factoritza a través de B/pB. Per la condició iii) de la definició de subgrup p-bàsic, B/pB és sumand directe de A/pB, per tant, f s'estén a A/pB i dóna lloc a un homomorfisme $g \in \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_p)$.∎

Lema 1.2: Si A és un grup p-local i $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q})=\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_p)=0$, aleshores A és un p-grup divisible.

Demostració: Com que $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q})=0$, A no té elements d'ordre infinit. Com que A és p-local, és un p-grup. Sigui B un subgrup p-bàsic. Pel lema anterior, $\mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_p)=0$, per tant $B=0$ perquè B és una suma directe de p-grups cíclics. Deduim que A és p-divisible i, com que és p-local, és divisible.∎

Teorema 1.3: Sigui E un espai simplement connex tal que

(1) E és p-local;

(2) $H^*(E;R)\cong H^*(S^m;R)$ on $R=\mathbb{Z}_p$ o $R=\hat{\mathbb{Z}}_p$;

(3) $H^*(E;\mathbb{Q})\cong H^*(S^m;\mathbb{Q})$;

(4) $H^{m+1}(E;\mathbb{Z}_{(p)})=0$.

Aleshores, $E=S^m_p$. Si omitim alguna de les condicions anteriors, la conclusió és falsa.

Demostració: N'hi ha prou amb demostrar que E és un espai de Moore $M(\mathbb{Z}_{(p)},m)$. Considerem la successió exacta

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \xrightarrow{\cdot p} \hat{\mathbb{Z}}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

Indueix una successió exacta llarga de cohomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^r(E;\hat{\mathbb{Z}}_p) \xrightarrow{\cdot p} H^r(E;\hat{\mathbb{Z}}_p) \longrightarrow H^r(E;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{r+1}(E;\hat{\mathbb{Z}}_p) \to \cdots$$

D'aquí es segueix fàcilment que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, $R=\mathbb{Z}_p$ a la condició (2). D'altra banda, la condició (3) implica que H_rE té rang zero si $r\neq m$ i rang u si $r=m$.

El teorema dels coeficients universals:

$$\mathrm{Ext}(H_{r-1}E,\mathbb{Z}_p) \rightarrowtail H^r(E;\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_p)$$

dóna: $\mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_p)=0$ si $r\neq m$ i $\mathrm{Ext}(H_rE,\mathbb{Z}_p)=0$ si $r\neq m-1$. Del lema 1.2 es segueix que H_rE és un p-grup divisible si $r\neq m$. El teorema d'estructura dels grups divisibles demostra que $H_rE=\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Però $\mathrm{Ext}(H_rE,\mathbb{Z}_p)=0$ si $r\neq m-1$, per tant $H_rE=0$ si $r\neq m,m-1$ degut a que $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$.

Com que $H^m(E;\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$, el teorema dels coeficients universals demostra que hi ha dos casos possibles:

A) $\mathrm{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=0$.

$H_{m-1}E$ és un p-grup divisible, per tant $H_{m-1}E=\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Com que $\mathrm{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$, resulta que $H_{m-1}E=\mathbb{Z}_{p^\infty}$. D'altra banda, sigui B un subgrup p-bàsic de H_mE. En virtut de 1.1, $\mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p)\cong\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=0$ per tant $B=0$ i H_mE és divisible degut a que és p-local i p-divisible. Com que H_mE té rang u i $\mathrm{Ext}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=0$, deduim que $H_mE=\mathbb{Q}$. Per tant, hem vist que en aquest cas l'espai E té l'homologia de $M(\mathbb{Q},m)\vee M(\mathbb{Z}_{p^\infty},m-1)$, la unió per un punt dels espais de Moore $M(\mathbb{Q},m)$ i $M(\mathbb{Z}_{p^\infty},m-1)$.

B) $\mathrm{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_p)=0$, $\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$.

$H_{m-1}E$ és un p-grup divisible tal que $\mathrm{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_p)=0$. Com que $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$, $H_{m-1}E=0$ i E té homologia $\neq 0$ només en dimensió m. Sigui B un subgrup p-bàsic de H_mE. Tenim $\mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$. Com que B és una suma directa de grups cíclics infinits i p-grups cíclics, tenim que $B=\mathbb{Z}_{p^k}$ o $B=\mathbb{Z}$. Si $B=\mathbb{Z}_{p^k}$, aleshores, per la propietat (iii) de la definició de subgrup p-bàsic, obtenim que $\mathbb{Z}_{p^k}$ és sumand directe de H_mE, però això és impossible perquè $\mathrm{Ext}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=0$. Per tant, $\mathbb{Z}$ és un subgrup p-bàsic de H_mE. Com que $D=H_mE/\mathbb{Z}$ ha de ser divisible i $\mathrm{Ext}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=0$, la successió exacta de Hom-Ext associada a $\mathbb{Z}\rightarrowtail H_mE\twoheadrightarrow D$ dóna $\mathrm{Ext}(D,\mathbb{Z}_p)=0$. Apliquem ara el teorema d'estructura dels grups divisibles. Obtenim que D no té p-torsió i per tant H_mE és lliure de torsió degut a que és p-local i només pot tenir p-torsió. Aleshores, H_mE és un grup p-local lliure de torsió de rang u. Apliquem ara el teorema de classificació d'aquests grups ([11], II, p.110). Com que H_mE és p-local, per tal de demostrar que $H_mE\cong\mathbb{Z}_{(p)}$ n'hi ha prou amb veure que H_mE conté elements de p-altura zero. Considerem $1 \in \mathbb{Z} \subset H_m E$. Si $1=pa$, $a \in H_m E$, aleshores, passant a D obtenim $o=p\bar{a}$ i com que D no té p-torsió, arribem a que $a \in \mathbb{Z}$, que és contradictori. Això demostra que el tipus de $H_m E$ és $t_q=\infty$ si $q \neq p$ i $t_p=o$. Per tant, l'espai E és un espai de Moore $\mathbb{M}(\mathbb{Z}_{(p)},m)$.

Hem demostrat fins ara que si un espai simplement connex E compleix les condicions (1),(2) i (3) del teorema, aleshores o bé $E=S^m_p$ o bé E té la mateixa homologia que $\mathbb{M}(\mathbb{Q},m) \vee \mathbb{M}(\mathbb{Z}_{p^\infty},m-1)$. N'hi ha prou amb veure ara que en aquest cas E no compleix la condició (4). Com que $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Q}^{\aleph_0}$, és immediat que $H^{m+1}(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \neq o$.

Finalment, observem que no podem ometre cap de les condicions (1),(2),(3),(4) del teorema. En efecte, considerem els espais $E_1=S^m_p \vee \mathbb{M}(\mathbb{Z}_q,2)$; $E_2=S^m_p \vee \mathbb{M}(\mathbb{Z}_p,2m)$; $E_3=\mathbb{M}(\mathbb{Z}_{p^\infty},m-1)$; $E_4=\mathbb{M}(\mathbb{Q},m) \vee \mathbb{M}(\mathbb{Z}_{p^\infty},m-1)$. És fàcil veure que cap d'aquests espais és del tipus d'homotopia de S^m_p i en canvi l'espai E_i compleix les condicions (1),(2),(3),(4) llevat de la i-èssima. ∎

Aquest teorema que acabem de demostrar ens diu que la cohomologia amb coeficients $\mathbb{Z}_p$, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ i $\mathbb{Q}$ no basta per a caracteritzar les esferes locals. El següent teorema demostra que la cohomologia amb coeficients $\mathbb{Z}_{(p)}$ sí que és apropiada per a aquest propòsit.

<u>Teorema 1.4</u>: Sigui E un espai p-local simplement connex tal que $H^*(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^*(S^m;\mathbb{Z}_{(p)})$. Aleshores $E=S^m_p$.

Demostració: El teorema dels coeficients universals dóna: $\operatorname{Hom}(H_r E,\mathbb{Z}_{(p)})=o$ si $r \neq m$, $\operatorname{Ext}(H_r E,\mathbb{Z}_{(p)})=o$ si $r \neq m-1$. A més, $\operatorname{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_{(p)})$ és un subgrup p-local de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Per tant, o bé $\operatorname{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Z}_{(p)}$ o bé $\operatorname{Ext}(H_{m-1}E,\mathbb{Z}_{(p)})=o$. Però en el primer cas $\mathbb{Z}_{(p)}$ seria un grup de cotorsió i això és impossible perquè $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Q}^{\aleph_0}\neq o$. Per tant, $\mathrm{Ext}(H_rE,\mathbb{Z}_{(p)})=o$ per a tot r.

Sigui B_r un subgrup p-bàsic de H_rE. Si B_r conté un sumand directe de la forma $\mathbb{Z}_{p^n}$, es segueix fàcilment de la definició de subgrup p-bàsic que $\mathbb{Z}_{p^n}$ és sumand directe de H_rE. Però $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^n},\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Z}_{(p)}/p^n\mathbb{Z}_{(p)}\neq o$. Per tant, B_r és lliure. Considerem la successió exacta llarga de Hom-Ext associada a

$$\mathbb{Z}_{(p)} \rightarrowtail^{\cdot p} \mathbb{Z}_{(p)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p.$$

Obtenim:

$$o \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{\cdot p} \mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow o$$

I per tant, $\mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_p)=o$ si $r\neq m$. Pel lema 1.1, $\mathrm{Hom}(B_r,\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Hom}(H_rE,\mathbb{Z}_p)=o$, per tant, $B_r=o$ si $r\neq m$. Això demostra que H_rE és un grup divisible per a $r\neq m$. Però el teorema d'estructura dels grups divisibles i les igualtats $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Q}^{\aleph_0}$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}_{(p)})=\hat{\mathbb{Z}}_p$, $\mathrm{Ext}(H_rE,\mathbb{Z}_{(p)})=o$ donen $H_rE=o$ si $r\neq m$.

En el cas r=m la successió exacta anterior demostra que $\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$. Pel lema 1.1, $B_m=\mathbb{Z}$. La successió exacta $\mathbb{Z} \rightarrowtail H_mE \twoheadrightarrow H_mE/\mathbb{Z}$ dóna lloc a

$$o \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_mE/\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow o$$

i per tant $\mathrm{Ext}(H_mE/\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{(p)})$ té rang u. Com que $H_mE/\mathbb{Z}$ és un grup divisible, el teorema d'estructura demostra que $H_mE/\mathbb{Z}$ és un grup de torsió sense p-torsió. Això condueix a que $\mathrm{Hom}(H_mE/\mathbb{Z},\mathbb{Q})=o$ i per tant $\mathrm{Hom}(H_mE,\mathbb{Q})=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. Aleshores, H_mE és un grup de rang u. A més, H_mE és lliure de torsió perquè $H_m E/\mathbb{Z}$ no té p-torsió i $H_m E$ és p-local. Ara podem demostrar, igual que a la demostració del teorema 1.3, que $H_m E \cong \mathbb{Z}_{(p)}$ i per tant l'espai E és un espai de Moore $M(\mathbb{Z}_{(p)}, m)$, i.e una esfera local S^m_p. $\square$

2. Construcció de fibrats d'esferes per esferes mòdul p

L'objectiu d'aquest capítol és demostrar que les condicions I, II, III, IV del teorema principal d'aquesta memòria són suficients per a assegurar que existeix un fibrat d'esferes locals per esferes locals que les compleix. Això es farà mostrant, per a cada valor de r,m,p admissible, un fibrat $S_p^r \longrightarrow S_p^m \longrightarrow B$.

Recordem que els valors admissibles són:

I) $(2n-1, 2nt-1, p)$, $1 < t < p$;
II) $(2n-1, m, p)$, n divideix p-1, $2n \leq m$;
III) $(2n-1, n(2c+1), p)$, $n=2k$, k divideix p-1, $1 \leq c < \frac{p-1}{n}$;
IV) $(3, m, 2)$, $3 < m$; $(7, 15, 2)$.

Estudiarem separadament cada cas.

2.1 Fibrats del tipus I

Si $p=2$, el tipus I és buit, per tant, podem suposar $p \neq 2$.

Stasheff demostra ([26], p.282) que S_p^{2n-1} admet una A_{p-1}-estructura. Aleshores, aplicant la teoria continguda a aquest mateix article de Stasheff, arribem a l'existència de fibrats

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^{2n-1} \overset{t}{*\ \ldots\ *} S_p^{2n-1} \longrightarrow B_t$$

on l'asterisc indica "join". Observem que

$$S_p^{2n-1} \overset{t}{*\ \ldots\ *} S_p^{2n-1} = (S^{2n-1} \overset{t}{*\ \ldots\ *} S^{2n-1})_p = S_p^{2nt-1}$$

per tant, obtenim fibrats

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^{2nt-1} \longrightarrow B$$

per a tot $t < p$, tal i com voliem.

2.2 Fibrats del tipus II

Sullivan ([3o]) va demostrar que si n divideix $p-1$, S_p^{2n-1} és un espai de llaços, és a dir, existeix un espai classificador BS_p^{2n-1} tal que $\Omega BS_p^{2n-1} \simeq S_p^{2n-1}$. Volem construir fibrats

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^m \longrightarrow B$$

per a tot $m \geqslant 2n$. Posem $B = S_p^m \times BS_p^{2n-1}$ i considerem la projecció natural $B \longrightarrow BS_p^{2n-1}$. Això indueix un fibrat $S_p^{2n-1} \longrightarrow E \longrightarrow B$. Demostrarem que $E = S_p^m$. Com que $H^*(S_p^{2n-1};\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z}_{(p)})$ i $H^*(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \simeq P(x) \otimes E(y)$, el producte tensorial d'una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió $2n$ i una àlgebra exterior en un generador y de dimensió m, podem aplicar la successió exacta de Gysin i calcular $H^*(E;\mathbb{Z}_{(p)})$. Observem que la classe d'Euler del fibrat és x.

La successió exacta de Gysin dóna:

$$\ldots \longrightarrow H^r(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^r(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^{r-2n+1}(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{\psi}$$
$$H^{r+1}(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^{r+1}(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \ldots$$

on ψ és multiplicar per x. Si $r+1 \neq m$, ψ és isomorfisme, per tant, $H^i(E;\mathbb{Z}_{(p)}) = 0$ si $i \neq m$. Si $i = m$, és immediat que $H^m(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}$.

D'altra banda, observem que, com que B i S_p^{2n-1} són espais p-locals simplement connexos, E és també p-local simplement connex en virtut de la successió exacta d'homotopia d'un fibrat. Per tant, podem aplicar el teorema 1.4 i deduir-ne que $E=S_p^m$.

2.3 Fibrats del tipus III

Aquests fibrats són els que tenen una construcció més complexa i també els d'existència menys evident.

És clar que no és restrictiu suposar $p\neq 2$ perquè el cas $p=2$ es contradiu amb les hipòtesis de III. Tampoc no és restrictiu suposar que n no divideix p-1 perquè si n divideix p-1 tenim ja els fibrats del tipus II.

Com que k divideix p-1, S_p^{n-1} és un espai de llaços. Si B' designa l'espai classificador, $B'=BS_p^{n-1}$, tenim un fibrat

$$S_p^{n-1} \longrightarrow * \longrightarrow B'.$$

D'altra banda, com que $c < p-1$, tenim, en virtut de l'apartat 2.1, un fibrat

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow B.$$

La successió exacta de Gysin permet de calcular la cohomologia amb coeficients $\mathbb{Z}_{(p)}$ de B i B' (veure l'apartat 3.1). Obtenim:

i) $H^*(B';\mathbb{Z}_{(p)})$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió n;

ii) $H^*(B;\mathbb{Z}_{(p)})$ és una àlgebra de polinomis en un generador u de dimensió 2n, truncada per $u^{c+1}=0$.

Calculem ara l'homotopia de B:

Proposició 2.1: Els grups d'homotopia de B són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats. $\pi_i B=0$ $1\leq i<2n(c+1)-1$, $i\neq 2n$. $\pi_{2n}B=\mathbb{Z}_{(p)}$.

Demostració: La successió exacta d'homotopia de la fibració $S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow B$ dóna:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i S_p^{2n-1} \longrightarrow \pi_i S_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow \pi_i B \longrightarrow$$

$$\pi_{i-1} S_p^{2n-1} \longrightarrow \pi_{i-1} S_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow \cdots$$

Per tant, si $i<2n(c+1)-1$, tenim que $\pi_i B = \pi_{i-1} S_p^{2n-1}$. Per tant, $\pi_i B=0$ si $i<2n$ i $\pi_{2n}B \cong \pi_{2n-1} S_p^{2n-1} = \mathbb{Z}_{(p)}$. D'altra banda, recordem que $\pi_{i-1} S_p^{2n-1}=0$ si $2n<i<2n+2p-3$. Com que, per hipòtesi, és $c<(p-1)/n$, tenim $2n(c+1)-1<2n+2p-3$ i, per tant, $\pi_i B=0$, $2n<i<2n(c+1)-1$. ∎

Sigui ara B_c' la base del fibrat

$$S_p^{n-1} \longrightarrow S_p^{n(2c+1)-1} \longrightarrow B_c'$$

que existeix en virtut de l'apartat 2.1.

Proposició 2.2: $[B_c',B] \cong H^{2n}(B_c',\mathbb{Z}_{(p)})$ i l'isomorfisme ve donat fent correspondre a $f:B_c' \longrightarrow B$ l'element $f^*(u)\in H^{2n}(B_c';\mathbb{Z}_{(p)})$.

Demostració: Per obstrucció. Per la proposició anterior, B és $(2n-1)$-connex. A més, com que $H^i(B_c';\mathbb{Z}_{(p)})=0$ si $i>2nc$ i els grups d'homotopia de B són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats, per coeficients universals , deduim que $H^i(B_c'; \pi_i B)=0$ si $i>2n$ i $H^{i+1}(B_c', \pi_i B)=0$ si $i>2n$. Aleshores, pel teorema 8.4.3 de [24], resulta $[B_c', B]= H^{2n}(B_c';\mathbb{Z}_{(p)})$.∎

<u>Proposició 2.3</u>: Els fibrats de fibra S_p^{2n-1} sobre B_c' estan classificats per la classe d'Euler, és a dir, pels elements de $H^{2n}(B_c',\mathbb{Z}_{(p)})$.

Demostració: Apliquem els resultats del treball de Sullivan ([30]) citats al capítol zero. Les fibracions de fibra S_p^{2n-1} sobre B_c' estan classificades per $[B_c', \mathcal{B}_{2n,p}]$. Recordem que $\mathcal{B}_{2n,p}$ és el localitzat de $\mathcal{B}_{2n}$ i $\mathcal{B}_{2n}$ és l'espai classificador de les fibracions de fibra l'esfera de dimensió 2n-1. Recordem també que $\mathcal{B}_{2n}$ és l'espai classificador del H-espai associatiu SG_{2n}, definit com la component de la identitat de l'espai dels automorfismes de S^{2n-1}.

Tenim una fibració ([30], p.4.12):

$$(\Omega^{2n-1} S^{2n-1})_1 \longrightarrow SG_{2n} \longrightarrow S^{2n-1}$$

on l'u indica que prenem la component del punt base. A partir d'aquí podem obtenir informació sobre els grups d'homotopia de $\mathcal{B}_{2n,p}$. La successió exacta d'homotopia de la fibració anterior dóna:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i S^{2n-1} \longrightarrow \pi_{i-1}(\Omega^{2n-1} S^{2n-1})_1 \longrightarrow \pi_{i-1} SG_{2n} \longrightarrow$$
$$\pi_{i-1} S^{2n-1} \longrightarrow \pi_{i-2}(\Omega^{2n-1} S^{2n-1})_1 \longrightarrow \cdots$$

Si localitzem a p seguim tenint una successió exacta:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i\, S_p^{2n-1} \longrightarrow \pi_{i-1}(\Omega^{2n-1} S_p^{2n-1})_1 \longrightarrow \pi_i\, \mathcal{B}_{2n,p} \longrightarrow$$

$$\pi_{i-1}\, S_p^{2n-1} \longrightarrow \pi_{i-2}(\Omega^{2n-1} S_p^{2n-1})_1 \rightarrow \cdots$$

Com que $\pi_{i-1}(\Omega^{2n-1} S_p^{2n-1})_1 = o$ si $i < 2(p-1)$, resulta que $\pi_i \mathcal{B}_{2n,p} \cong \pi_{i-1}\, S_p^{2n-1}$ si $i < 2(p-1)$. Observem que, com que n divideix $2(p-1)$ i n no divideix $p-1$, tenim que $n < p-1$ i $2n < 2(p-1)$. Per tant, $\mathcal{B}_{2n,p}$ és $(2n-1)$-connex, $\pi_{2n} \mathcal{B}_{2n,p} = \mathbb{Z}_{(p)}$ i $\pi_i \mathcal{B}_{2n,p} = o$ si $i < 2(p-1)$, $i \neq 2n$. Això implica que tenim una aplicació

$$\mathcal{B}_{2n,p} \longrightarrow K(\mathbb{Z}_{(p)}, 2n)$$

que és una $2(p-1)$-equivalència. Observem que, a més, els grups d'homotopia de $\mathcal{B}_{2n,p}$ són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats, és a dir, són sumes directes de $\mathbb{Z}_{(p)}$ i $\mathbb{Z}_{p^n}$. Però, en virtut de la successió exacta de Gysin del fibrat

$$S_p^{n-1} \longrightarrow S_p^{n(2c+1)-1} \longrightarrow B_c'$$

resulta que $H^i(B_c'; \mathbb{Z}_{(p)}) = o$ si $i > 2nc$.

Aleshores, $[B_c', \mathcal{B}_{2n,p}] \cong H^{2n}(B_c'; \mathbb{Z}_{(p)})$. En efecte, $\mathcal{B}_{2n,p}$ és $(2n-1)$-connex i $H^i(B_c'; \pi_i \mathcal{B}_{2n,p}) = o$ si $i > 2n$ perquè $2nc < 2(p-1)$. També, $H^{i+1}(B_c'; \pi_i \mathcal{B}_{2n,p}) = o$ si $i > 2n$ pel mateix motiu. Aleshores podem aplicar el teorema 8.4.3 de [24] i el teorema se segueix d'aquí.∎

Considerem $x^2 \in H^{2n}(B_c'; \mathbb{Z}_{(p)})$. Per la proposició 2.2, això dóna una aplicació $f: B_c' \longrightarrow B$ amb $f^*(u) = x^2$.

Com que B_c' és l'estadi $(2c+1)$ en la construcció de l'espai classificador B', tenim una aplicació $B_c' \longrightarrow B'$ que indueix isomorfismes a cohomologia en dimensió més petita o igual que 2nc. Considerem ara el diagrama

$$\begin{tikzcd} B'_c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, dashed, "g"] \\ B \arrow[r, dashed, "h"] & P \end{tikzcd}$$

i sigui P el push-out.

<u>Proposició 2.4</u>: $H^*(P;\mathbb{Z}_{(p)})$ és una àlgebra sobre $\mathbb{Z}_{(p)}$ amb dos generadors y, z de dimensions $n(2c+1)$ i $2n$, respectivament, i la relació $y^2=z^{2c+1}$.

Demostració: La successió de Mayer-Vietoris del push-out anterior dóna:

$$\ldots \to H^{i-1}(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \oplus H^{i-1}(B';\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^{i-1}(B'_c;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow$$

$$H^i(P;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^i(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \oplus H^i(B';\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \ldots$$

Si $i \leq 2nc$, i^* és un isomorfisme, per tant, tenim una successió exacta curta

$$H^i(P;\mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrowtail H^i(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \oplus H^i(B';\mathbb{Z}_{(p)}) \twoheadrightarrow H^i(B'_c;\mathbb{Z}_{(p)})$$

D'aquí es dedueix que, en dimensió més petita o igual que 2nc, $H^i(P;\mathbb{Z}_{(p)})$ té un generador z de dimensió 2n tal que $h^*z=u$, $g^*z=x^2$.

Si $i > 2nc$, $H^i(B'_c;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^i(B;\mathbb{Z}_{(p)})=0$, per tant,

$$(h^*,g^*)\colon H^i(P;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^i(B;\mathbb{Z}_{(p)}) \oplus H^i(B';\mathbb{Z}_{(p)})$$

és un isomorfisme si $i > 2nc$. Per tant, en dimensió $> 2nc$ $H^{nt}(P;\mathbb{Z}_{(p)})$ està generat per w_t amb $g^* w_t = x^t$. Però, com que $g^* z^t = x^{2t}$, resulta que $w_{2t} = z^t$, mentre que w_{2c+1} és un nou generador y de dimensió $n(2c+1)$. Es compleix que $g^* y^2 = g^* w_{2c+1}^2 = (x^{2c+1})^2 = x^{2(2c+1)} = g^* z^{2c+1}$. Per tant, com que en dimensions $> 2nc$ g^* és isomorfisme, resulta $y^2 = z^{2c+1}$. ∎

Construirem sobre P un fibrat de fibra S_p^{2n-1} i classe d'Euler z.

Sobre B' tenim el fibrat canònic $S_p^{n-1} \longrightarrow * \longrightarrow B'$ amb classe d'Euler x. Considerem el "join" d'aquest fibrat amb ell mateix ("fiberwise"). Com que $S_p^{n-1} * S_p^{n-1} = S_p^{2n-1}$, obtenim un fibrat

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow E' \longrightarrow B'$$

amb classe d'Euler x^2.

Sobre B tenim el fibrat

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow B$$

amb classe d'Euler u. Si considerem els fibrats induits per aquests dos fibrats sobre B_c', tindrem dos fibrats sobre B_c' amb la mateixa classe d'Euler. Per la proposició 2.3, aquests dos fibrats seran equivalents i, com que P és el push-out, obtenim un fibrat sobre P amb classe d'Euler z, el push-out de les classes d'Euler.

Tenim, doncs, un fibrat $S_p^{2n-1} \longrightarrow E \longrightarrow P$ amb classe d'Euler z. Haurem acabat si demostrem que $E \simeq S_p^{n(2c+1)}$.

<u>Proposició 2.5</u>: $E = S_p^{n(2c+1)}$.

Demostració: Observem que, com que B', B'_c i B són tots simplement connexos, P és també simplement connex. D'altra banda, és immediat que B', B'_c i B són p-locals, com es veu a partir de les successions exactes d'homotopia dels fibrats que tenim sobre cada un d'ells. Per tant, P és p-local. En efecte, $\tilde{H}_*B'$, $\tilde{H}_*B'_c$ i $\tilde{H}_*B$ són p-locals. Per la successió exacta de Mayer-Vietoris, $\tilde{H}_*P$ és també p-local, per tant, P és p-local.

La successió exacta d'homotopia de la fibració

$$S_p^{2n-1} \longrightarrow E \longrightarrow P$$

demostra que E és p-local simplement connex. Segons el teorema 1.4, n'hi ha prou amb veure que $H^*(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^*(S^{n(2c+1)};\mathbb{Z}_{(p)})$. Apliquem la successió exacta de Gysin i recordem que la classe d'Euler del fibrat és z. Un raonament del tot anàleg al de l'apartat 2.2 demostra que $H^*(E;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^*(S^{n(2c+1)};\mathbb{Z}_{(p)})$. ∎

Això demostra que hi ha fibrats del tipus III.

2.4 <u>Fibrats del tipus IV</u>

El fibrat de tipus (7,15,2) s'obté localitzant a 2 el fibrat de Hopf

$$S^7 \longrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8.$$

El fibrat de tipus (3,m,2) es construeix igual que els fibrats del tipus II, construits a l`apartat 2.2. Cal només parar esment en que S_2^3 és un espai de llaços.

2.5 Una construcció alternativa de certs fibrats del tipus I

Designem per $\hat{S}_p^{2n-1}$ l`espai que s`obté completant a p l`esfera S^{2n-1}. És sabut que $\hat{S}_p^{2n-1}$ és un A_{p-1}-espai, per tant, per a tot $c < p-1$ existeixen fibrats

$$\hat{S}_p^{2n-1} \longrightarrow \hat{S}_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow B(c).$$

Aquest fibrat pot obtenir-se també completant el fibrat corresponent del tipus I. En tot cas, la demostració de l`existència del fibrat anterior és no constructiva: de fet, es demostra que $S_p^{2n-1}$ és un $A_{p-1}$-espai evaluant les obstruccions. En particular, no disposem de cap informació "geomètrica" sobre l`espai $B(c)$.

Una situació diametralment oposada és la dels fibrats del tipus II: la demostració de que si n divideix p-1, aleshores $\hat{S}_p^{2n-1}$ és un espai de llaços, i per tant existeix un fibrat $\hat{S}_p^{2n-1} \longrightarrow * \longrightarrow B\hat{S}_p^{2n-1}$ es fa construint explícitament l`espai classificador $B\hat{S}_p^{2n-1}$ (veure [3o]). Aquesta construcció efectiva de $B\hat{S}_p^{2n-1}$ permet, per exemple, d`estudiar les loop-maps de $\hat{S}_p^{2n-1}$ ([5]).

Seria molt interessant poder disposar d`una construcció geomètrica similar dels fibrats del tipus I. En particular, podria ser útil de cara a estudiar quines són les $A_{p-1}$-aplicacions de $\hat{S}_p^{2n-1}$. En aquest apartat donarem una construcció d`aquest tipus per al cas $c < \frac{p-1}{n}$. El mètode utilitzat és el de [9]. De fet, però, aquest resultat parcial que obtindrem no serveix de cara al problema citat abans, perquè arribem només als nivells en que l'obstrucció encara és trivial.

Sigui G el subgrup del grup linial $GL(\hat{\mathbb{Z}}_p, n)$, generat pel grup simètric i per les matrius

$$\begin{pmatrix} \zeta^{\nu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{\nu_n} \end{pmatrix}$$

on $\zeta \in \hat{\mathbb{Z}}_p$ és una arrel primitiva $(p-1)$-èssima de la unitat i $\sum_{i=1}^{n} \nu_i \equiv 0$ (mòd $p-1$). Aquest grup és estudiat a [22] amb la notació $G(p-1,p-1,n)$. Es tracta d'un grup finit d'ordre $(p-1)^{n-1}n!$.

G actua sobre $K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2)$. Observem que $K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2)$ és el completat a p de $\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$. Sigui X l'espai cocient per aquesta acció. La cohomologia de X amb coeficients $\mathbb{Z}_p$ és (veure [9]) una àlgebra de polinomis amb generadors de dimensions $2n$, $2(p-1)$, $4(p-1)$, ..., $2(n-1)(p-1)$. Aquest espai X es troba a la llista d'àlgebres de polinomis realitzables de [9].

<u>Lema 2.6</u>: Sigui Y un espai tal que $H^{2i+1}(Y;\mathbb{Z}_p)=0$ per a tot i. Aleshores, $H_{2i}Y$ no té p-torsió, per a tot i.

Demostració: Suposem que $H_{2i}Y$ contingui $\mathbb{Z}_p$. Aleshores, $\mathrm{Ext}(H_{2i}Y,\mathbb{Z}_p)\neq 0$ i pel teorema dels coeficients universals, $H^{2i+1}(Y;\mathbb{Z}_p)\neq 0$, contradicció.∎

Designem per B el completat de X a p. El grup fonamental de X és G. Com que p no divideix l'ordre de G, resulta que G és $\mathbb{Z}_p$-perfecte i, aplicant VIII, 3.2 de [8], obtenim que X és

$\mathbb{Z}_p$-bo i E és simplement connex. Per tant, $H^*(B;\mathbb{Z}_p) \cong H^*(X;\mathbb{Z}_p)$.

Sigui B_{2nc} una aproximació homològica de dimensió 2nc de B, és a dir, tenim $j:B_{2nc} \longrightarrow B$ tal que $H_i(B_{2nc})=0$ si $i>2nc$, $j_*:H_*(B_{2nc}) \longrightarrow H_*(B)$ és isomorfisme si $i \leq 2nc$. Aleshores, pel teorema dels coeficients universals i aplicant que, pel lema anterior, $H_{2nc}(B)$ no té p-torsió, obtenim que $H^*(B_{2nc};\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió 2n, truncada per $x^{c+1}=0$. Això segueix essent cert si substituïm $\mathbb{Z}_p$ per $\hat{\mathbb{Z}}_p$.

Resta ara construir el fibrat sobre B_{2nc}. Hem de construir una aplicació $B_{2nc} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}_{2n,p}$, on $\hat{\mathcal{B}}_{2n,p}$ és l'espai classificador de les fibracions de fibra l'esfera completada $\hat{S}_p^{2n-1}$ (cf. [30]). En virtut del que hem vist a la demostració de la proposició 2.3, resulta que

$$\pi_i\, \hat{\mathcal{B}}_{2n,p} = 0 \quad i < 2(p-1),\ i \neq 2n$$

$$\pi_{2n}\, \hat{\mathcal{B}}_{2n,p} = \hat{\mathbb{Z}}_p$$

A més, els grups d'homotopia de $\hat{\mathcal{B}}_{2n,p}$ són $\hat{\mathbb{Z}}_p$-mòduls finitament generats.

Aplicant ara el mateix raonament de la proposició 2.2, és immediat que, com que $2nc < 2(p-1)$, tenim

$$[B_{2nc}, \hat{\mathcal{B}}_{2n,p}] \cong H^{2n}(B_{2nc};\hat{\mathbb{Z}}_p),$$

és a dir, les fibracions de fibra $\hat{S}_p^{2n-1}$ sobre B_{2nc} estan classificades per la classe d'Euler. Sigui, doncs, $\hat{S}_p^{2n-1} \longrightarrow E \longrightarrow B_{2nc}$ un fibrat amb classe d'Euler x. Calculem $H^*(E;\mathbb{Z}_p)$ aplicant la successió exacta de Gysin. Resulta $H^*(E;\mathbb{Z}_p) \cong H^*(S^{2n(c+1)-1};\mathbb{Z}_p)$. D'altra banda, E és simplement connex i p-complet, per successió exacta d'homotopia d'una fibració. Això implica que $E = \hat{S}_p^{2n(c+1)-1}$

(veure [10]). Obtenim, per tant, fibrats del tipus I

$$\hat{S}_p^{2n-1} \longrightarrow \hat{S}_p^{2n(c+1)-1} \longrightarrow B(c)$$

per a tot $c < \frac{p-1}{n}$.

Possiblement pot realitzar-se alguna construcció anàloga per a esferes localitzades, però hi ha algun detall delicat.

3. Restriccions al cas $p\neq 2$

L'objectiu d'aquest capítol és veure que les condicions del teorema principal d'aquesta memòria (enunciat a la introducció) són necessàries en el cas $p\neq 2$. És a dir, suposarem que tenim un fibrat $S_p^r \longrightarrow S_p^m \longrightarrow B$, $p\neq 2$, o r m i demostrarem que (r,m,p) pertany a algun dels següents tipus admissibles:

I) $(2n-1, 2nt-1, p)$, $1 < t < p$;

II) $(2n-1, m, p)$, n divideix $p-1$, $m \geq 2n$;

III) $(2n-1, n(2c+1), p)$, $n=2k$, k divideix $p-1$, $1 \leq c < \frac{p-1}{n}$.

En primer lloc observem que S_p^r és contràctil a S_p^m. Aleshores, per un resultat ben conegut ([25]), S_p^r ha de ser un H-espai. Això implica immediatament que r ha de ser senar, $r=2n-1$.

No és restrictiu suposar que $n>1$ perquè en el cas $n=1$ el cas II cobreix tots els possibles fibrats.

3.1 Càlcul de la cohomologia mòdul p de B

Suposem que tenim un fibrat $S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^m \xrightarrow{p} B$ amb $2n-1 < m$. Designem per B' el con de p, $B' = B \cup_p e^{m+1}$. En aquest apartat calcularem la cohomologia de B i B' amb coeficients $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_{(p)}$, sense excloure el cas $p=2$. Les eines per fer aquest càlcul són la successió exacta de Gysin i l'isomorfisme de Thom.

A partir de la successió exacta d'homotopia d'un fibrat es dedueix que B és simplement connex. Per tant, la fibració $S_p^{2n-1} \longrightarrow S_p^m \longrightarrow B$ és orientable. Com que $H^*(S_p^{2n-1};\mathbb{Z}_p) \cong H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z}_p)$, podem aplicar la successió exacta de Gysin amb coeficients $\mathbb{Z}_p$:

$$\cdots \longrightarrow H^r(S_p^m,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{r-2n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\psi} H^{r+1}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^*} H^{r+1}(S_p^m;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow$$

on ψ és multiplicar per la classe d'Euler $x \in H^{2n}(B;\mathbb{Z}_p)$. Per tant, si $r \neq m, m-1$,

$$\psi : H^{r-2n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^{r+1}(B;\mathbb{Z}_p).$$

D'altra banda, tenim una successió exacta:

$$H^{m-2n}(B;\mathbb{Z}_p) \rightarrowtail H^m(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p \longrightarrow H^{m+1-2n}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\psi}\!\!\!\!\rightarrow H^{m+1}(B;\mathbb{Z}_p)$$

Com que $\mathbb{Z}_p$ no té subgrups propis no trivials, o bé p^* és epijectiu o bé $p^*=0$. Estudiem per separat cada un d'aquests casos:

A) Cas $p^*=0$.

En aquest cas la successió exacta de Gysin dóna:

$$\psi : H^{m-2n}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^m(B;\mathbb{Z}_p)$$

$$\mathbb{Z}_p \rightarrowtail H^{m+1-2n}(B;\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow H^{m+1}(B;\mathbb{Z}_p)$$

En particular, $H^{m-2n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \neq 0$, però

$$H^{m-2n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \cong H^{m-4n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \cong \cdots$$

per tant, ha de ser $m+1=2nt$, $m=2nt-1$. Aleshores, $H^{2nt}(B;\mathbb{Z}_p)=0$ i $H^i(B;\mathbb{Z}_p)=0$ si $i > 2nt$.

Resumint, en aquest cas $m=2nt-1$ i $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en una variable x de dimensió $2n$, truncada per $x^t=0$.

B) Cas p^* epijectiu.

En aquest cas la successió exacta de Gysin dóna:

$$\psi:\ H^{m-2n+1}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^{m+1}(B;\mathbb{Z}_p)$$

$$H^{m-2n}(B;\mathbb{Z}_p) \rightarrowtail^{\psi} H^{m}(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z}_p$$

Si m no és múltiple de $2n$, resulta que $H^{m-2n}(B;\mathbb{Z}_p)=0$ i $H^m(B;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ amb un generador y tal que $p^*y=\gamma$, el generador de $H^m(S^m_p;\mathbb{Z}_p)$.

Si m és múltiple de $2n$, aleshores $H^{m-2n}(B;\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p$, generat per un cert x^t. Aleshores, com que la successió exacta anterior és de $\mathbb{Z}_p$-espais vectorials, és escindida i

$$H^m(B;\mathbb{Z}_p) \cong x^{t+1}\mathbb{Z}_p \oplus y\mathbb{Z}_p$$

amb $p^*y=\gamma$, el generador de $H^m(S^m_p;\mathbb{Z}_p)$.

Resumint, en aquest cas $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ té una base com a $\mathbb{Z}_p$-espai vectorial formada pels monomis x^t, $t=0,1,\dots$, yx^t, $t=0,1,\dots$, amb $\dim x=2n$, $\dim y=m$ i $p^*y=\gamma$, el generador de $H^m(S^m_p;\mathbb{Z}_p)$.

Ja hem calculat la cohomologia mòdul p de B. Considerem ara $i:B \longrightarrow B'$ i calculem $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$. Pel teorema de l'isomorfisme de Thom, tenim isomorfismes

$$\phi:H^r(B;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^{r+2n}(M,S^m_p;\mathbb{Z}_p)$$

on $\mathfrak{M}$ és el cilindre d'aplicacions de p. ϕ actua de la següent manera: $\phi(z)=(p^*z)\smile U$, on U és la classe de Thom. Considerant que $H^*(M,S_p^m;\mathbb{Z}_p) \cong H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ i aplicant la relació que hi ha entre ϕ i ψ, és a dir, entre la classe de Thom i la classe d'Euler, no és difícil veure que $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ val:

A) Cas $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ àlgebra de polinomis truncada.

En aquest cas, $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador u de dimensió 2n, truncada per $u^{t+1}=o$. A més, $i^*u=x$.

B) Cas $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ generada per x,y.

En aquests cas, $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ té una base com a $\mathbb{Z}_p$-espai vectorial formada pels monomis u^t, vu^t, $t=o,1,\ldots$, amb dim $u=2n$, dim $v=m+2n$. A més, $i^*u=x$, $i^*v=yx$.

Podem resumir tot aquest càlcul en la següent:

<u>Proposició 3.1</u>: Sigui $S_p^r \longrightarrow S_p^m \xrightarrow{p} B$ un fibrat amb $m>r$. Designem per B' el con de p i per $i:B \longrightarrow B'$ la inclusió natural. Aleshores es compleix que $r=2n-1$ i una de les afirmacions següents és certa:

A) $m=2nt-1$; $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió 2n, truncada per $x^t=o$; $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador u de dimensió 2n, truncada per $u^{t+1}=o$; $i^*u=x$.

B) $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$ té una base com a $\mathbb{Z}_p$-espai vectorial formada pels monomis x^t, $t=o,1,\ldots$, yx^t, $t=o,1,\ldots$ amb $\dim x=2n$, $\dim y=m$; $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ té una base com a $\mathbb{Z}_p$-espai vectorial formada pels monomis u^t, $t=o,1,\ldots$, vu^t, $t=o,1,\ldots$, dim $u=2n$, dim $v=m+2n$, $i^*u=x$, $i^*v=yx$. ▯

Calcularem ara la cohomologia de B i B' amb coeficients a l'anell $\mathbb{Z}_{(p)}$. Com que $H^*(S^r_p;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^*(S^r;\mathbb{Z}_{(p)})$, podem realitzar tot el mateix càlcul anterior substituint $\mathbb{Z}_p$ per $\mathbb{Z}_{(p)}$. Fixem-nos només en els següents dos fets: a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ no conté subgrups p-locals propis no trivials; b) tota extensió de $\mathbb{Z}_{(p)}$ per $\mathbb{Z}_{(p)}$ és escindida. Tenim, per tant:

<u>Proposició 3.2</u>: L'enunciat de la proposició 3.1 segueix essent cert si substituim $\mathbb{Z}_p$ per $\mathbb{Z}_{(p)}$. ∎

Observem finalment que en el cas B), respecte al valor de y^2 es presenten tres possibilitats:

a) $y^2=0$, és a dir, $H^*(B;\mathbb{Z}_p)=P(x)\otimes E(y)$, el producte tensorial d'una àlgebra de polinomis en un generador x i una àlgebra exterior en un generador y;

b) $y^2=\mu x^r$, $\mu\neq 0$, per tant, m parell i n divideix m;

c) $y^2=\alpha x^r+\beta y x^s$, $\beta\neq 0$, per tant, m parell i 2n divideix m.

3.2 <u>Les condicions del teorema principal són necessàries en el cas $p\neq 2$.</u>

D'ençà d'ara suposarem $p\neq 2$. Suposem que tenim espais B,B' i una aplicació $i:B\to B'$ que compleixin les conclusions de la proposició 3.1. Volem demostrar que n,m,p compleixen les condicions del teorema principal, és a dir, volem demostrar que alguna de les següents afirmacions és certa:

a) $m=2nt-1$ i $1<t<p$;

b) n divideix p-1

c) $n=2k$, k divideix p-1, $m=n(2c+1)$, $1\leq c<\frac{p-1}{n}$.

No és restrictiu suposar $n>1$.

En primer lloc, suposem que estem en el cas A de la proposició 3.1. Tenim un espai B' tal que $H^*(B';\mathbb{Z}_p)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió $2n$, truncada per $x^{t+1}=o$. És un resultat clàssic (que no demostrarem però que és consequència immediata de o.1) que això implica que o bé n divideix $p-1$ o bé $t<p$. Per tant, en aquest cas ja hem acabat i podem suposar que estem en el cas B.

Si designem per $\mathcal{P}^i$ les potències reduides de Steenrod mòdul p, tenim que $\mathcal{P}^n x=x^p\neq o$, per tant, l'àlgebra de Steenrod mòdul p opera no trivialment sobre $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$. Aplicant o.1, resulta que o bé β (l'homomorfisme de Bockstein) o bé $\mathcal{P}^1$ operen no trivialment sobre $H^*(B;\mathbb{Z}_p)$. Distingirem diversos casos:

i) Cas $\beta x\neq o$.

Com que βx té dimensió $2n+1$ i $n>1$, necessàriament $2n+1=m$ i $\beta x=\lambda y$, $\lambda\neq o$. Considerem $i:B\longrightarrow B'$. Com que $\dim \beta u=2n+1$, tenim que $\beta u=o$. Però $i^*\beta u=\beta i^*u=\beta x=\lambda y$ i arribem a contradicció. Per tant, $\beta x=o$.

ii) Cas $\beta y\neq o$.

Com que $\dim\beta y=m+1$, resulta que $m+1=2nt$, $m=2nt-1$. Aleshores, n'hi ha prou amb demostrar que si $t\geq p$, aleshores n divideix $p-1$. Sigui B'_{m+1} una aproximació homològica de dimensió $m+1$ de B'. Tenim $j:B'_{m+1}\longrightarrow B'$ tal que $H_r(B'_{m+1})=o$ si $r>m+1$ i $j_*:H_r(B'_{m+1})\longrightarrow H_r(B')$ és un isomorfisme si $r\leq m+1$. Passant a cohomologia amb coeficients $\mathbb{Z}_p$, tenim que $H^r(B'_{m+1};\mathbb{Z}_p)=o$ si $r>m+2$ i $j^*:H^r(B';\mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^r(B'_{m+1};\mathbb{Z}_p)$ és isomorfisme si $r\leq m+1$. Aleshores, a B'_{m+1} tenim $\beta=o$. En canvi, $\mathcal{P}^n u=u^p\neq o$ perquè $\dim u^p=$

$2np \leq 2nt=m+1$. Per tant, $\mathcal{P}^1 u\neq o$ i d'aquí es dedueix immediatament que n ha de dividir $p-1$.

iii) Cas $\mathcal{P}^1 y\neq o$, $\mathcal{P}^1 x=o$.

Com que $\mathcal{P}^1 y$ té dimensió $m+2(p-1)$ i com que $H^i(B;\mathbb{Z}_p)=o$ si $i\not\equiv o,m \pmod{2n}$, hi ha dues possibilitats:

1) $m+2(p-1)=2nt$;

2) $m+2(p-1)=m+2nt$.

El cas 2) ens condueix a que n divideix $p-1$ i ja hem acabat. Situem-nos en el cas 1), és a dir, en el cas $\mathcal{P}^1 y=\lambda x^t$, $\lambda\neq o$. Recordem que respecte a y^2 es presenten les 3 possibilitats a), b) i c) citades després de la proposició 4.2. En el cas c) deduim també que n divideix $p-1$. En el cas a), aplicant $\mathcal{P}^1$ a ambdós costats de $y^2=o$ obtenim (observem que 1) implica que m és parell) $o=2y\,\mathcal{P}^1 y=2\lambda yx^t$ d'on, com que $p\neq 2$, resulta $\lambda=o$, contradicció. En el cas b), aplicant $\mathcal{P}^1$ a ambdós costats de $y^2=\mu x^r$, resulta $2y\,\mathcal{P}^1 y=\mu r x^{r-1}\,\mathcal{P}^1 x=o$ i, per tant, $\lambda=o$, contradicció.

iv) Cas $\mathcal{P}^1 x\neq o$.

Com que $\mathcal{P}^1 x$ té dimensió $2n+2(p-1)$ i com que $H^i(B;\mathbb{Z}_p)=o$ si $i\not\equiv o,m \pmod{2n}$, hi ha també dues possibilitats:

1) $2n+2(p-1)=2nt$;

2) $2n+2(p-1)=m+2nt$.

En el primer cas resulta que n divideix $p-1$ i hem acabat. Situem-nos en el cas 2), és a dir, en el cas $\mathcal{P}^1 x=\mu yx^t$, $\mu\neq o$. Respecte a y^2 tenim les possibilitats a),b),c) que ja hem indicat. En el cas c) arribem també a que n ha de dividir $p-1$ i hem acabat. Suposem que estem en el cas a), és a dir, suposem $y^2=0$. Observem que m és parell. Aplicant $\mathcal{P}^1$ a $y^2=0$ obtenim $2y\,\mathcal{P}^1y=0$ i, com que $p\neq 2$, tenim que $y\,\mathcal{P}^1y=0$. Per tant, o bé $\mathcal{P}^1y=0$ o bé $\mathcal{P}^1y=\rho yx^h$, $\rho\neq 0$. En aquest segon cas és $m+2(p-1)=m+2nh$ i n divideix $p-1$. Per tant, podem suposar $\mathcal{P}^1y=0$.

Tenim $\mathcal{P}^1x=\mu yx^t$, $\mu\neq 0$. Es compleix que $t\geq 1$ perquè si $\mathcal{P}^1x=\mu y$, considerem $i:B\longrightarrow B'$. Aleshores, $\mathcal{P}^1x=\mathcal{P}^1 i^*u=i^*\mathcal{P}^1u=0$ perquè i^* és zero en dimensió m. Per tant, $t\geq 1$. Aleshores, $2n+2(p-1)=m+2nt\geq m+2n\geq 2n+2n$. Per tant, $n\leq p-1$. En particular això implica que p no divideix r, $0\leq r\leq n$. Per tant, per les relacions d'Adem, $\mathcal{P}^n=\lambda(\mathcal{P}^1)^n$. D'altra banda tenim

$$(\mathcal{P}^1)^2x=\mathcal{P}^1(\mathcal{P}^1x)=\mathcal{P}^1(\mu yx^t)=\mu ytx^{t-1}\mathcal{P}^1x+\mu(\mathcal{P}^1y)x^t=0$$

perquè $y^2=0$ i $\mathcal{P}^1y=0$. Però $x^p=\mathcal{P}^nx=\lambda(\mathcal{P}^1)^nx\neq 0$ i això es contradiu amb $(\mathcal{P}^1)^2x=0$ i $n>1$.

Podem suposar que estem en el cas b), és a dir, que $y^2=\gamma x^h$, $\gamma\neq 0$. Contant dimensions obtenim $2m=m+2nh$, és a dir, m parell i n divideix m. Posem $m=nr$. També sabem que n divideix $2(p-1)$. Si n divideix $p-1$ ja hem acabat, per tant, podem suposar que n no divideix $p-1$. Això implica que $n=2k$, k divideix $p-1$ i $r=2c+1$. N'hi ha prou amb demostrar que $c<\frac{p-1}{n}$. En efecte, $2n+2(p-1)=m+2nt=nr+2nt\geq nr+2n$ i d'aquí es dedueix $c<(p-1)/n$.

4. Un teorema de finitud

Aquest capítol és eminentment tècnic. En ell obtindrem un resultat que utilitzarem al capítol següent, però que és pràcticament independent de la resta de la memòria. Es tracta d'un teorema que ens permetrà substituir un espai per un altre de finit, sense que canvii la cohomologia mòdul p.

<u>Proposició 4.1</u>: Sigui M un grup abelià p-local (i.e. un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul) tal que $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_{(p)})$ i $\mathrm{Ext}(M,\mathbb{Z}_{(p)})$ són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats. Aleshores M és també un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat.

Demostració: Sigui B un subgrup p-bàsic de M. Tenim $B \rightarrowtail M \twoheadrightarrow D$ i D és divisible perquè és p-divisible i M és p-local. Considerem la successió Hom-Ext associada a $\mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_{(p)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$:

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ext}(M,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(M,\mathbb{Z}_{(p)})$$

Aplicant el lema 1.1 resulta $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_p) \cong \prod \mathbb{Z}_p$. Per tant, com que $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_{(p)})$ i $\mathrm{Ext}(M,\mathbb{Z}_{(p)})$ són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats, de la successió exacta anterior es dedueix que $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_p)$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat. Per tant, B és un grup abelià finitament generat. Siguin $e_1,\dots,e_n$ generadors de B com a grup abelià. Demostrarem que $e_1,\dots,e_n$ generen M com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul. Considerem la successió exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(D,\mathbb{Z}_{(p)})$$

$$\mathrm{Ext}(M,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow 0$$

D és divisible, per tant, pel teorema d`estructura dels grups divisibles ([11], I p. 1o4), $D = \oplus \mathbb{Q} \oplus \oplus_q \mathbb{Z}_{q^\infty}$. Com que $\mathrm{Ext}(D,\mathbb{Z}_{(p)})$ ha de ser un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat i $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Q}^{\chi_c}$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}_{(p)}) = \hat{\mathbb{Z}}_p$, resulta que D és un grup de torsió sense p-torsió. Aleshores, si $a \in M$, considerem $\bar{a} \in D$. Tenim $q\bar{a}=0$ per a cert q no múltiple de p. Per tant, $qa \in B$, $qa = \sum r_i e_i$, d`on resulta $a = \sum (r_i/q) e_i$. ▯

<u>Proposició 4.2</u>: Sigui X un espai connex p-local. Les dues proposicions següents són equivalents:

i) $\tilde{H}_i X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i;

ii) $H^i(X;\mathbb{Z}_{(p)})$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i.

Demostració: Recordem que, com que $\mathbb{Z}_{(p)}$ és un anell principal, tot $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat és de la forma

$$\mathbb{Z}_{(p)} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_r}}.$$

Aleshores, la implicació i $\Rightarrow$ ii és evident per coeficients universals, mentre que la implicació ii $\Rightarrow$ i es dedueix de la proposició anterior i de coeficients universals. ▯

<u>Proposició 4.3</u>: Siguin F, E i B espais 1-connexos i $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ una fibració. Si dos d`entre els espais F, E, B són tals que la seva homologia reduïda entera consisteix en

$\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats, el mateix li passa al tercer d'ells.

Demostració: En primer lloc, dos dels espais F,E,B són p-locals, per tant, la successió exacta d'homotopia implica que també ho és el tercer. Aleshores, la proposició anterior permet transformar el problema a cohomologia amb coeficients $\mathbb{Z}_{(p)}$. A partir d'aquí la demostració és anàloga a la del teorema corresponent en teoria de Serre de classes de grups abelians. (veure [24], 9.6.12).∎

Proposició 4.4: Si A és un grup abelià p-local, finitament generat com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul, aleshores es compleix:

a) $\tilde{H}_i(A)$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat, per a tot i;

b) $\tilde{H}_i(K(A,m))$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i i tot m.

Demostració: a) A és isomorf al localitzat a p d'un grup finitament generat B, per tant, $\tilde{H}_*A$ és isomorf al localitzat de $\tilde{H}_*B$. Però $\tilde{H}_*B$ és un grup abelià finitament generat, per tant, $\tilde{H}_*A \cong \tilde{H}_*B_p$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat en cada dimensió.

b) Resulta de considerar la fibració

$$K(A,m-1) \longrightarrow * \longrightarrow K(A,m)$$

i aplicar inducció junt amb la proposició anterior.∎

Proposició 4.5: Sigui X un espai simplement connex. Són equivalents:

i) $\pi_i X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i;

ii) $\tilde{H}_i X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i.

Demostració: i $\Rightarrow$ ii. Sigui

$$\cdots \longrightarrow X_m \longrightarrow X_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2$$

una descomposició de Postnikov de X. Tenim fibracions

$$K(\pi_m X, m) \longrightarrow X_m \longrightarrow X_{m-1}.$$

Per hipòtesi d'inducció podem suposar que $\tilde{H}_i X_{m-1}$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i. Per la proposició anterior, també $\tilde{H}_i(K(\pi_m X, m))$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i. Això demostra que $\tilde{H}_i X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i, en virtut de la proposició 4.3.

ii $\Rightarrow$ i. Considerem una descomposició de Cartan-Whitehead de l'espai X:

$$\cdots \longrightarrow X_m \longrightarrow X_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 = X.$$

Tenim fibracions

$$K(\pi_m X, m-1) \longrightarrow X_{m+1} \longrightarrow X_m.$$

Per hipòtesi d'inducció podem suposar que $\tilde{H}_i X_m$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i. D'altra banda, $\pi_m X \cong \pi_m X_m \cong \tilde{H}_m X_m$, per tant, $\pi_m X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat. Per 4.4 i 4.3, $\tilde{H}_i X_{m+1}$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i. Per inducció, tots els X_r tenen homologia reduida finitament generada en cada dimensió, com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls. Com que $\pi_n X \cong H_n X_n$, obtenim i.∎

Observem que els grups abelians que són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats no formen una classe de Serre, però en canvi compleixen un "teorema de Hurewicz".

Designem per $\mathcal{C}$ la classe de Serre dels grups abelians de torsió amb p-component nul.la.

<u>Proposició 4.6</u>: Sigui $f:Y \longrightarrow X$ una aplicació entre espais simplement connexos. Considerem les proposicions:

i) $f_*:H_*Y \longrightarrow H_*X$ és un $\mathcal{C}$-isomorfisme;

ii) $f_*:\pi_*Y \longrightarrow \pi_*X$ és un $\mathcal{C}$-isomorfisme;

iii) $f^*:H^*(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$ és un isomorfisme;

iv) $f^*:H^*(X;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Z}_p)$ és un isomorfisme.

Les tres primeres són equivalents i impliquen la quarta.

Demostració: L'equivalència de i) i ii) prové del teorema de Whitehead mod $\mathcal{C}$, que es pot aplicar degut a que $\mathcal{C}$ és un "ideal acíclic" de grups, en la nomenclatura de [24].

i $\Rightarrow$iii. Pel teorema de coeficients universals, tenim un diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}(H_{i-1}Y,\mathbb{Z}_{(p)}) & \rightarrowtail & H^i(Y;\mathbb{Z}_{(p)}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(H_iY,\mathbb{Z}_{(p)}) \\
\uparrow \varphi & & \uparrow f^* & & \uparrow \psi \\
\mathrm{Ext}(H_{i-1}X,\mathbb{Z}_{(p)}) & \rightarrowtail & H^i(X;\mathbb{Z}_{(p)}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(H_iX,\mathbb{Z}_{(p)})
\end{array}$$

Hem de demostrar que φ i ψ són isomorfismes. Com que el nucli i el conucli de $f_*:H_*Y \longrightarrow H_*X$ són grups abelians de trosió amb p-component nul.la, n'hi ha prou amb veure que si A és un tal grup, aleshores $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_{(p)})=\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}_{(p)})=0$. La primera afirmació és trivial. Respecte a la segona, considerem la successió exacta $\mathbb{Z}_{(p)} \rightarrowtail \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Deduim $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}_{p^\infty})=0$.

iii $\Rightarrow$ i. Passant al cilindre d'aplicacions Z, obtenim $\mathrm{Hom}(H_*(Z,Y),\mathbb{Z}_{(p)})=\mathrm{Ext}(H_*(Z,Y),\mathbb{Z}_{(p)})=0$. Volem deduir que $H_*(Z,Y)$ pertany a $\mathcal{C}$. Si $H_*(Z,Y)$ contingués un element d'ordre infinit tindriem $\mathbb{Z} \rightarrowtail H_i(Z,Y) \twoheadrightarrow C$ i això donaria una successió exacta:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrowtail \mathrm{Ext}(C,\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_i(Z,Y),\mathbb{Z}_{(p)})=0$$

Per tant, $\mathrm{Ext}(C,\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Z}_{(p)}$ i $\mathbb{Z}_{(p)}$ seria un grup de cotorsió. Això és impossible perquè $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)})\neq 0$. Per tant, $H_i(Z,Y)$ és de torsió per a tot i. A més, no té p-torsió perquè, si contingués $\mathbb{Z}_p$, tindriem $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_{(p)})=0$, que és fals. Hem vist, doncs, que $H_*(Z,Y)\in\mathcal{C}$ i això implica i).

iii $\Rightarrow$ iv. Considerem la successió exacta $\mathbb{Z}_{(p)} \overset{p}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}_{(p)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$. Indueix una successió exacta llarga de cohomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^i(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^i(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^i(X;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow$$
$$H^{i+1}(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^{i+1}(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \cdots$$

La naturalitat d'aquesta successió exacta i el lema dels 5 resolen el problema.▯

Observem que la implicació iv $\Rightarrow$ i no és certa. En efecte, sigui $X=*$, $Y=M(\mathbb{Q},3)$, un espai de Moore de tipus $(\mathbb{Q},3)$. Aleshores $H^*(Y;\mathbb{Z}_p)=0$ però $H_*Y\notin\mathcal{C}$. Això demostra que l'última afirmació de la pàgina 310 del llibre d'en Hu ([14]) és incorrecta.

Teorema 4.7: Sigui X un espai 1-connex tal que $\tilde{H}_i X$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul finitament generat per a tot i. Existeix un espai Y amb esquelets finits i una aplicació $f:Y \longrightarrow X$ tal que

$$f^*:H^*(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$$

és un isomorfisme. A més, si X és n-connex, Y també.

Demostració: Per 4.5 sabem que els grups d'homotopia de X són $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòduls finitament generats. Construirem espais Y_n i aplicacions $f_n:Y_n \longrightarrow X$ tals que:

i) $Y_o = *$;

ii) Y_{n+1} s'obté a partir de Y_n adjuntant un nombre finit de (n+1)-cel.les;

iii) $f_n|_{Y_{n-1}} = f_{n-1}$

iv) $f_{n*}: \pi_i Y_n \longrightarrow \pi_i X$ és un monomorfisme si $i < n$ i un $\mathcal{C}$-epimorfisme si $i \leq n$.

Com que X és simplement connex, podem posar $Y_o = Y_1 = *$. Suposem per hipòtesi d'inducció que tenim construït Y_n i $f_n:Y_n \longrightarrow X$. Siguin $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ generadors de $\pi_{n+1}X$ com a $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul. Com que Y_n és un CW complex finit simplement connex, $\pi_n Y_n$ és finitament generat. Considerem $f_{n*}: \pi_n Y_n \longrightarrow \pi_n X$ i siguin $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ generadors de Ker f_n . Definim Y_{n+1} com l'espai obtingut a partir de Y_n adjuntant cel.les de dimensió n+1: $e_1^{n+1},\ldots,e_r^{n+1}$ a través de $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ i adjuntant cel.les de dimensió n+1: $e_1^{n+1},\ldots,e_k^{n+1}$ a través d'aplicacions constants. Sigui:

$$h: Y_n \vee S_1^{n+1} \vee \ldots \vee S_k^{n+1} \longrightarrow X$$

definida de manera que sobre Y_n coincideixi amb f_n i sobre S_j^{n+1} coincideixi amb λ_j. Com que $f_n \circ \alpha_i$ és homotopament trivial $i=1,\dots,r$, és clar que h estén a una aplicació $f_{n+1}: Y_{n+1} \longrightarrow X$. Hem de veure ara que es compleixen les propietats i) a iv). Només requereix comentari la part iv). Considerem el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_q X & & \\
\pi_{q+1}(Y_{n+1},Y_n) \arrow[r] & \pi_q Y_n \arrow[u, "f_{n*}"] \arrow[r, "i_*"] & \pi_q Y_{n+1} \arrow[ul, "f_{n+1*}"'] \arrow[r, "j_*"] & \pi_q(Y_{n+1},Y_n)
\end{tikzcd}$$

Volem demostrar que f_{n+1*} és monomorfisme si $q<n+1$ i $\mathcal{C}$-epimorfisme si $q\leq n+1$. Per hipòtesi d'inducció podem suposar que f_{n*} és injectiva si $q<n$ i $\mathcal{C}$-epijectiva si $q\leq n$. Com que Y_n és l'esquelet de dimensió n de Y_{n+1}, resulta que $\pi_q(Y_{n+1},Y_n)=0$ si $q\leq n$. Per tant, i_* és isomorfisme si $q<n$ i epimorfisme si $q=n$. Això implica que f_{n+1*} és injectiva si $q<n$ i $\mathcal{C}$-epijectiva si $q\leq n$. Com que hem adjuntat cel.les e_i^{n+1} a través de les aplicacions α_i, resulta que $\operatorname{Ker} f_{n*} \subset \operatorname{Ker} i_*$ en dimensió n. Donat que i_* és epijectiva en dimensió n, resulta que f_{n+1*} és injectiva si $q=n$. Resta només veure que f_{n+1*} és $\mathcal{C}$-epijectiva si $q=n+1$. Sigui $\gamma\in\pi_{n+1}X$. S'expressarà $\gamma=\sum r_j\lambda_j$ on $r_j\in\mathbb{Z}_{(p)}$. Aleshores, existeix un enter r, no múltiple de p, tal que $rr_j \in \mathbb{Z}$, $j=1,\dots,k$. Per tant, $r\gamma$ és una suma de $\pm\lambda_j$, $j=1,\dots,k$ i és clar que $r\gamma\in \operatorname{Im} f_{n+1*}$. Això demostra que f_{n+1*} és $\mathcal{C}$-epijectiva si $q=n+1$.

Considerem $Y=\cup Y_n$ amb la topologia feble. Tenim $f:Y\longrightarrow X$ que indueix $\mathcal{C}$-isomorfismes entre els grups d'homotopia. Per la proposició 4.6, resulta que

$$f^*: H^*(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$$

és isomorfisme. Com que, a més, $f_*: \pi Y \longrightarrow \pi X$ és injectiva, la segona part del teorema és obvia. ∎

5. El cas p=2

L'objectiu d'aquest capítol és demostrar que les condicions I, II, III i IV del teorema principal d'aquesta memòria són necessàries en el cas $p=2$. Un cop vist això, la demostració d'aquest teorema estarà completa.

Els mètodes utilitzats en el capítol 3 per al cas $p\neq 2$, és a dir, l'estudi de l'actuació de les operacions de Steenrod i de les operacions secundàries, no basten per a resoldre el cas $p=2$. Cal recórrer a la teoria K i a les operacions d'Adams. De fet, no deu ser difícil donar una demostració del cas $p\neq 2$ seguint aquestes mateixes línies.

Suposem que tenim un fibrat $S^r_2 \longrightarrow S^m_2 \longrightarrow B$, $o < r < m$. Demostrarem que o bé $r=1,3$ o bé $r=7$ i $m=15$.

Observem que S^r_2 és contràctil a S^m_2, per tant, per un teorema ben conegut ([25]), S^r_2 ha de ser un H-espai. Aplicant el teorema d'Adams sobre la no existència d'elements d'invariant de Hopf igual a u ([1]), resulta que $r=1,3,7$. Per tant, tot es redueix a demostrar que si tenim un fibrat $S^7_2 \to S^m_2 \longrightarrow B$, aleshores $m=15$. Designem per B' el con de $S^m_2 \longrightarrow B$ i sigui $i: B \longrightarrow B'$ la inclusió.

Les proposicions 3.1 i 3.2 ens diuen quant valen les cohomologies de B i B' amb coeficients $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_{(2)}$. Hi ha dues possibilitats:

A) $m=8t-1$; $H^*(B;R)$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió 8, truncada per $x^t=o$; $H^*(B';R)$ és una àlgebra de polinomis en un generador u de dimensió 8, truncada per $u^{t+1}=o$, $i^*u=x$.

B) $H^*(B;R)$ té una base com a R-mòdul formada pels monomis x^t, yx^t, $t=o,1,\ldots$, amb $\dim x=8$, $\dim y=m$; $H^*(B';R)$ té una base com a R-mòdul formada pels monomis u^t, vu^t, $t=o,1,\ldots$, $\dim u=8$, $\dim v=m+8$; $i^*u=x$, $i^*v=yx$.

(R designa indistintament $\mathbb{Z}_2$ o bé $\mathbb{Z}_{(2)}$.)

Si estem en el cas A), és ben conegut que $t=2$ i, per tant, $m=15$. De fet, la demostració que donarem del cas B) pot adaptar-se molt fàcilment a la demostració d'aquest fet.

Sigui, doncs, $S_2^7 \longrightarrow S_2^m \longrightarrow B$ un fibrat del tipus B). Com que B' és 2-local i $H^i(B';\mathbb{Z}_{(2)})$ és un $\mathbb{Z}_{(2)}$-mòdul finitament generat per a tot i, per 4.2 i 4.7 existirà un espai Y amb esquelets finits i una aplicació $f:Y \longrightarrow B'$ tal que la aplicació induida $f^*:H^*(B';\mathbb{Z}_{(2)}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Z}_{(2)})$ és un isomorfisme.

Observem que H_*Y és lliure de 2-torsió. En efecte:

<u>Lema 5.1</u>: Si Y és un espai amb homologia finitament generada en cada dimensió tal que $H^*(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$ és lliure de torsió, aleshores H_*Y és lliure de p-torsió.

Demostració: Com que H_iY és finitament generat, si té p-torsió ha de contenir un sumand directe del tipus $\mathbb{Z}_p r$. Aleshores, $\mathrm{Ext}(H_iY,\mathbb{Z}_{(p)})$ conté un subgrup de la forma $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p r,\mathbb{Z}_{(p)})=\mathbb{Z}_p r$. Però $\mathrm{Ext}(H_iY,\mathbb{Z}_{(p)})$ és subgrup de $H^{i+1}(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$ que és lliure de torsió, contradicció.▯

Observem que la hipòtesi de que Y té homologia finitament generada en cada dimensió és necessària. En efecte, sigui Y un espai de Moore de tipus $(\mathbb{Z}_{p^\infty},3)$. És immediat que $H^*(Y;\mathbb{Z}_{(p)})$ és lliure de torsió.

Sigui Y' una aproximació homològica de dimensió 24 de Y. Tenim $j:Y'\longrightarrow Y$, $H_iY'=o$ si $i>24$, $j_*:H_iY'\longrightarrow H_iY$ isomorfisme si $i\leq 24$. Aleshores, com que H_*Y és lliure de 2-torsió, resulta que $H^i(Y';\mathbb{Z}_{(2)})=o$ si $i>24$ i $j^*:H^i(Y';\mathbb{Z}_{(2)})\longrightarrow H^i(Y;\mathbb{Z}_{(2)})\cong H^i(X;\mathbb{Z}_{(2)})$ és isomorfisme si $i\leqslant 24$. Podem suposar que Y' és un espai finit. En efecte, té homologia finitgenerada en cada dimensió i zero en dimensió prou gran i és simplement connex. Aleshores, per un resultat ben conegut, és homotopament equivalent a un complex finit.

Si $m>16$, aleshores dim $v=m+8>24$. Per tant, $H^*(Y';\mathbb{Z}_2)$ és una àlgebra de polinomis en un generador u de dimensió 8, truncada per $x^4=o$. Estem novament al cas A) i sabem ([16], p. 3o4) que un tal espai no pot existir. Per tant, podem suposar $16\leq$ dim $v\leq 24$.

La situació és la següent: Tenim un espai finit Y', l'homologia del qual no té 2-torsió i tal que $H^*(Y';\mathbb{Z}_{(2)})$ té generadors 1, u, u^2, u^3, v, amb dim $u=8$, dim $v=m'$, $16\leq m'\leq 24$. En el cas $m'=16$ apareix un altre generador uv. Volem arribar a contradicció a partir d'aquestes dades.

Treballarem amb teoria K complexa amb coeficients a $\mathbb{Z}_{(2)}$. Posem $K(X)$ per a designar-la. Recordem (veure o.6) que si X és un espai finit, $K(X)$ admet una filtració

$$K(X)=K_o\supset K_1\supset K_2\supset\ldots\supset K_n=o$$

on $K_i=\mathrm{Ker}\ (K(X)\longrightarrow K(X^{2i-1}))$. D'altra banda, si H_*X no té 2-torsió, hi ha un isomorfisme

$$H^{2i}(X;\mathbb{Z}_{(2)}) \doteq Gr_i K = K_i/K_{i+1}$$

i això ens permet calcular $K(X)$.

En el nostre cas, obtenim els següents resultats per al graduat associat a $K(Y')$:

a) Si m és senar, $GrK(Y')$ és una àlgebra de polinomis en un generador x de dimensió 8, truncada per $x^4=0$.

b) Si m és parell, $GrK(Y')$ és una àlgebra de polinomis en dos generadors: x de dimensió 8 i y de dimensió m', truncada en dimensions ≥ 25.

El pas de $GrK(Y')$ a $K(Y')$ es fa aplicant el lema o.2. Resulta que $K(Y') \cong GrK(Y')$. Aplicant les operacions d'Adams a teoria K, veurem que aquests valors de $K(Y')$ són impossibles. Distingirem dos casos, segons m sigui senar o parell.

a) Cas m senar.

En aquest cas hem vist que $K(Y')$ té generadors $1,x,x^2,x^3$. Estudiem l'actuació de les operacions d'Adams:

$$\psi^2 x = 2^4 x + ax^2 + bx^3$$
$$\psi^3 x = 3^4 x + cx^2 + dx^3, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}_{(2)}.$$

Calculem ara $\psi^6 x$:

$$\psi^6 x = \psi^2 \psi^3 x = 3^4 2^4 x + 3^4 ax^2 + 3^4 bx^3 + c2^8 x^2 + c2^5 ax^3 + d2^{12} x^3$$

$$\psi^6 x = \psi^3 \psi^2 x = 2^4 3^4 x + 2^4 cx^2 + 2^4 dx^3 + a3^8 x^2 + a23^4 cx^3 + b3^{12} x^3$$

Igualant coeficients resulta:

$$3^4a + c2^8 = 2^4c + a3^8;$$
$$d2^{12} + 3^4b + c2^5a = 2^4d + a2\,3^4c + b3^{12}.$$

Com que a és senar (per la propietat d) de les operacions d'Adams), de la primera equació resulta que c és també senar. Reduint la segona equació mòdul 2^4 obtenim

$$o \equiv 65.2.a.c \quad (2^4)$$

que és un absurd.

b) Cas m parell.

En aquest cas K(Y') té generadors 1, x, x^2, x^3, y i, en el cas m'=16, també té el generador yx. Posem m'=2k. L'actuació de les operacions d'Adams serà del tipus:

$$\Psi^2x = 2^4x + ax^2 + by + cx^3 + dyx;$$
$$\Psi^3x = 3^4x + ex^2 + fy + gx^3 + hyx;$$
$$\Psi^2y = 2^ky + \ell x^3 + ryx;$$
$$\Psi^3y = 3^ky + sx^3 + tyx;$$

amb a senar. Si calculem Ψ^6x i Ψ^6y de dues maneres diferents, obtenim:

$$\Psi^6x = \Psi^2\Psi^3x = 3^42^4x + 3^4ax^2 + 3^4by + 3^4cx^3 + 3^4dyx + e2^8x^2 + e2^5ax^3 + e2^5byx + f2^ky + f\ell x^3 + fryx + g2^{12}x^3 + h2^{k+4}yx.$$

$$\psi^6 x = \psi^3 \psi^2 x = 2^4 3^4 x + 2^4 e x^2 + 2^4 f y + 2^4 g x^3 + 2^4 k y x + a 3^8 x^2 + 2a3^4 e x^3 + 2a3^4 f y x + b 3^k y + b s x^3 + b t y x + c 3^{12} x^3 + d 3^{k+4} y x.$$

$$\psi^6 y = \psi^2 \psi^3 y = 3^k 2^k y + 3^k \ell x^3 + 3^k r y x + s 2^{12} x^3 + t 2^{k+4} y x.$$

$$\psi^6 y = \psi^3 \psi^2 y = 2^k 3^k y + 2^k s x^3 + 2^k t y x + 3^{12} x^3 + r 3^{k+4} y x.$$

Igualant coeficients obtenim les equacions:

i) $a(3^8-3^4) = e(2^8-2^4)$;
ii) $c(3^{12}-3^4) + 2a3^4 e + bs = e2^5 a + f\ell + g(2^{12}-2^4)$;
iii) $b3^4(3^{k-4}-1) = f\, 2^4(2^{k-4}-1)$;
iv) $s2^k(2^{12-k}-1) = \ell 3^k(3^{12-k}-1)$.

De i) es segueix que e és senar. Com que $K_{13}=o$, la propietat e) de les operacions d'Adams implica que $\ell \equiv o \quad (2^{2k-12})$. Per tant, si reduim ii) mòdul 4 obtenim

$$o \equiv 2a3^4 e + bs \qquad (4).$$

Com que a i e són senars, n'hi ha prou amb veure que $bs \equiv o$ mòdul 4. Considerem per separat cada un dels possibles valors de k. Si k=9,11, l'equació iii) implica que $b \equiv o \quad (4)$ i per tant ja hem acabat. En el cas k=12, la propietat c) de les operacions d'Adams implica que s=o i també hem acabat. Si k=1o, l'equació iv) dóna $s2^{10}3=\ell 3^{10}2^3$. Com que, en aquest cas, $\ell \equiv o \quad (2^8)$, obtenim que s és parell i novament $bs \equiv o$ (4). Resta només considerar el cas k=8.

Si k=8, hi ha elements $x_i \in K_i$, i=8,...,12 tals que

$$\psi^2 y = 2^8 x_8 + 2^7 x_9 + 2^6 x_{10} + 2^5 x_{11} + 2^4 x_{12}.$$

A més, si $x_{12} = \lambda x^3 + \mu yx$, aleshores a $H^*(Y;\mathbb{Z}_2)$ es compleix $Sq^8 v = \lambda u^3 + \mu vu$. Demostrarem que $\lambda = o$. Suposem-ho fet. Aleshores, $\ell \equiv o$ (2^5). L'equació iv) diu $s2^8(2^4-1) = 3^8 2^4 5$, per tant, s és parell. Substituint a $o \equiv 2a3^4 e + bs$ (4), arribem a contradicció. Per tant, tot es redueix a demostrar que si $Sq^8 v = \lambda u^3 + \mu vu$, aleshores $\lambda = o$.

Si $v^2 = o$, aleshores

$$o = Sq^{16} v^2 = Sq^8 v \; Sq^8 v = \lambda^2 u^6 + 2\lambda\mu \, vu^4$$

i $\lambda = o$. Si $v^2 = u^4$, aleshores

$$Sq^{16} v^2 = \lambda^2 u^6 + 2\lambda\mu \, vu^4 + \mu^2 u^6;$$
$$Sq^{16} u^4 = Sq^8 u^2 \; Sq^8 u^2 = o$$

i novament obtenim $\lambda = o$. Finalment, si $v^2 = vx^2$, aleshores

$$Sq^{16} v^2 = \lambda^2 u^6 + 2\lambda\mu \, vu^4 + \mu^2 u^6;$$
$$Sq^{16} vu^2 = v \; Sq^{16} u^2 + Sq^8 v \; Sq^8 u^2 + Sq^{16} v \; u^2 = o$$

i també arribem a $\lambda = o$.

Això acaba la demoatració del teorema principal d'aquesta memòria, enunciat a la introducció. ▮

. . .

Referències

1. Adams, J.F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one. Ann. of Math. 72 (1960), 20-104.

2. Adams, J.F.: The sphere, considered as an H-space mod p. Quart. J. Math. Oxford (2), 12 (1961), 52-60.

3. Adem, J.: Relations on iterated reduced powers. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 636-638.

4. Aguadé, J.: Fiberings of spaces and localization. RAME. 1977.

5. Arkowitz, M.; Ewing, J.; Schiffman, S.: H-structures on localized and completed spheres. Quart. J. Mat. Oxford (3) 26 (1975), 295-307.

6. Atiyah, M.: K-Theory. Benjamin. 1967.

7. Atiyah, M.; Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. of symposia in pure math. vol. 3. Amer. Math. Soc. 1961.

8. Bousfield, A.K.; Kan, D.M.: Homotopy limits, completions and localizations. Lecture Notes in Math. 304. Springer 1972.

9. Clark, A.; Ewing, J.: The realization of polynomial algebras as cohomology rings. Pacific J. Math. 50 (1974), 425-434.

10. Ewing, J.: Some examples of sphere bundles over spheres wich are loop spaces mod p. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 935-938.

11. Fuchs, L.: Infinite Abelian Groups. Academic Press. 197o

12. Hilton, P.: Homotopy Theory and Duality. Notes on Math. and its applications. Nelson. 1965.

13. Hilton, P.; Mislin, G.; Roitberg, J.: Localization of nilpotent groups and spaces. Mathematics Studies 15. North-Holland. 1975.

14. Hu, S.-T.: Homotopy Theory. Academic Press. 1959.

15. Hubbuck, J.R.: Generalized cohomology operations and H-spaces of low rank. Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), 335-36o.

16. Husemoller, D.: Fibre Bundles. Graduate Texts in Math. Springer 1966.

17. Husseini, S.I.: When is a complex fibered by a subcomplex. Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 249-291.

18. Liulevicius, A.: The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations. Mem. Amer. Math. Soc. 42 (1962).

19. Massey, W.S.: Some problems in Algebraic Topology and the theory of fibre bundles. Ann. of Math. 62 (1955), 327-359.

2o. Nakagawa, R.; Ochiai, S.: On the dimensions of generators of a polynomial algebra over the mod p Steenrod algebra. Proc. J. Acad. 43 (1967), 932-936.

21. Serre, J.P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. 58 (1953), 258-294.

22. Shephard, G.C.; Todd, J.A.: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math. 6 (1954), 274-3o4.

23. Shimada, N.: Triviality of the mod p Hopf invariants. Proc. J. Acad. 36 (196o), 68-69.

24. Spanier, E.: Algebraic Topology. MacGraw-Hill. 1966.

25. Spanier, E.; Whitehead, J.H.C.: On fibre spaces in which the fibre is contractible. Comm. Math. Helv. 29 (1955), 1-8.

26. Stasheff, J.D.: Homotopy associativity of H-spaces, I. Trans. Amer. Math. Soc. 1o8 (1963), 275-292.

27. Stasheff, J.D.: Homotopy associativity of H-spaces, II. Trans. Amer. Math. Soc. 1o8 (1963), 293-312.

28. Steenrod, N.E.; Epstein, D.B.A.: Cohomology Operations. Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press. 1962.

29. Steenrod, N.E.; Whitehead, J.H.C.: Vector field on the n-sphere. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), 58-63.

3o. Sullivan, D.: Geometric Topology, part I: Localization, periodicity and Galois symmetry. M.I.T. 197o

31. Sullivan, D.: Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture. Ann. of Math. 1oo (1974), 1-79.

32. Sugawara, M.: On a condition that a space is an H-space. Math. J. Okayama Univ. 6 (1957), 1o9-129.

33. Sugawara, M.: A condition that a space is group-like. Math. J. Okayama Univ. 7 (1957), 123-144.

34. Wada, H.: Note on the fiberings of an (n-1)-connected space by spheres. Proc. J. Acad. 29 (1953) 8, 415-417.

Publ. Mat. UAB
Nº 16, Desembre 1979

ÀLGEBRES DEL TIPUS $H^{\infty} + L^{\infty}_{E}$

Josep M. Burgués i Badia

Memòria presentada per
optar al greu de Llicenciat
en Ciències Matemàtiques

Director: Julià Cufí i Sobregrau

INDEX

PRÒLEG

En la teoria dels processos estocàstics estacionaris, apareixen situacions que fan cap a problemes com el de caracteritzar les funcions de $L^\infty(T)$ que són límits uniformes de sumes finites de funcions de l'àlgebra del disc A, i polinòmis trigonomètrics a T. (al conjunt d'aquests li direm P).

A aquests problemes estan associats els noms de Yaglom, Szegö, Devinatz, etc.

La solució d'aquest problema fou donada l'any 1967 per Helson i Sarason [1] , els quals van demostrar que $H^\infty + C$ (la suma, com a espais de Banach, de H^∞ i $C = \mathcal{C}(T)$) és la clausura uniforme de l'àlgebra generada (a L^∞) per A i P. (i com a conseqüència que és àlgebra uniforme), fent servir que

$$C/_A \hookrightarrow L^\infty/_{H^\infty} \quad \text{isomètricament.}$$

D'altra banda, l'estudi dels operadors de Toeplitz i de Wienner-Hopf, $T_\Phi - \lambda$ on $\Phi \in H^\infty + C$ presenta resultats com (Douglas 1968) :

"Si $\Phi \in H^\infty + C$, $T_\Phi - \lambda$ és un operador de Fredholm si i només si, $\Phi - \lambda$ és invertible a $H^\infty + C$" (Veure [2]).

En aquest mateix treball, Douglas va donar una caracterització de les funcions invertibles a $H^\infty + C$, mitjançant llur extensió de Poisson a l'interior del disc obert U.

L'any següent (1969) i en relació també amb l'estudi dels operadors de Toeplitz i de Wienner-Hopf, Douglas va estudiar algunes classes d'àlgebres entre H^∞ i L^∞, plantejant el següent problema:

"Sigui B una subàlgebra tancada de L^∞ que conté H^∞, si B_I és la subàlgebra de L^∞ generada per H^∞ i les complexes conjugades de les funcions internes invertibles a B, llavors $B = B_I$ ".

El resultat és obvi per H^∞ i $H^\infty + C$.

L'evolució del problema fou la següent:

L'any 1969, Douglas i Rudin [5] van veure que el resultat es vàlid per L^∞.

La generalització d'aquests problemes al cas en què l'àlgebra està generada per H^∞ i les funcions essencialment afitades a T, i contínues a un subconjunt qualsevol prefixat E, fou estudiada l'any 1973 per Davie, Gamelin i Garnett [3] al cas, també més general, de U un obert qualsevol de $\mathbb{C}$, motivats per problemes com el d'aproximar uniformement funcions de $H^\infty_E(U)$ per funcions de $H^\infty(U)$ que estenen analíticament a través de E.

Els esmentats autors van demostrar que, per a aquestes àlgebres, la conjectura de Douglas té resposta afirmativa.

L'any 1972, Sarason, volent donar-ne un contraexemple va arribar a que l'àlgebra generada per H^∞ i les funcions contínues a $T \sim \{1\}$ i amb límits laterals per a valors de l'argument tendint a 1, és un àlgebra de Douglas. (És a dir, el problema de Douglas té, per ella, resposta afirmativa).

La solució final del problema, (al disc), van donar-la Chang i Marshall l'any 1975 seguint una idea de Sarason [6] .

Sung-Yang A.Chang va demostrar, primerament, que si B, B_1 son subàlgebres de L^∞ que contenen H^∞ ,una d'elles de Douglas, i si Sp B = Sp B_1, llavors B = B_1. [7] .

Finalment, Marshall [8] , va veure que per B i B_I formada a partir de B, segons la conjectura de Douglas, es té Sp B = Sp B_I .

Com que òbviament B_I es un àlgebra de Douglas, es conclou que B = B_I.

El present treball es dedica a l'estudi de les àlgebres $H^\infty + L_E^\infty$, estudiades ja per Davie, Gamelin, Garnett a [3], i comença amb una demostració reduïda, seguint [3],del fet que $H^\infty + L_E^\infty$ es un àlgebra de Banach, en el cas que E sigui compacte i pel cas del disc.

En segon lloc, es tractarà paral.lelament a Douglas, la caracterització de les funcions invertibles a $H^\infty + L_E^\infty$ mitjançant llur extensió de Poisson a D.

Aquesta demostració està basada precisament en el fet que $H^\infty + L_E^\infty$ és un àlgebra de Douglas.

En tercer lloc s'estudia l'espectre d'aquestes àlgebres, la representació de caràcters per mesures i la res tricció de l'àlgebra a les fibres, tot extraient-ne conseqüències sobre el comportament de les funcions de $H^{\infty} + L_E^{\infty}$ en general, i els productes de Blaschke en particular, a l'espectre.

Només em resta mostrar el meu agraïment al Dr. J.Cufí, per l'eficaç ajuda i l'entusiasme mostrat en la direcció d'aquest treball, i al Dr.J.Cerda i a J.del Castillo amb els quals he discutit alguns punts del capitol 1 i 2 respectivament, així com també a totes les persones que d'alguna manera ò altra l'han fet possible.

CAPITOL 1

L'ALGEBRA $H^{\infty} + L^{\infty}_E$

Dedicarem aquest capítol a l'estudi de les propietats de $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ que depenen més directament de la seva estructura d'àlgebra que del seu espectre.

Més concretament, veurem que $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ és un espai de Banach, i com a conseqüència, que és una àlgebra, i donarem una caracterització dels seus elements invertibles.

Com ja hem dit al pròleg, la primera qüestió ha estat tractada amb força més generalitat, per Davie, Gamelin, i Garnett a [3] .

Com que l'objecte del present treball són àlgebres de funcions definides sobre el disc, que és, en molts aspectes un domini senzill, donarem una demostració simplificada (Seguint Helson i Sarason [1] , i Davie, Gamelin i Garnett [3]) .

I - Introducció

L'únic objecte d'aquest apartat és el d'exposar i clarificar, tant la notació com els resultats de tipus més general i la forma en què es faràn servir al llarg d'aquest capítol. Els altres apareixeràn en el moment mateix de fer-los servir.

Els diferents apartats agrupen temes més o menys afins.

i) Si R és un àlgebra de Banach (1), amb Sp R = M, notarem $\mathcal{G}: A \longrightarrow \mathcal{C}(M)$ la transformació de Guelfand,

$$a \longrightarrow \mathcal{G}(a) = \hat{a}$$

i també V_{χ_0} ; ε ; $\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n$ entorn bàsic de $\chi_0 \in M$, per la topologia de Guelfand, definit per ε i les funcions $\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n$.

Si $\varphi: R \longrightarrow R'$ és un morfisme d'àlgebres de Banach direm Sp φ a l'aplicació transposta.

R és àlgebra uniforme si i només si la transformada de Guelfand és una isometría

ii) D serà el disc obert del pla complex, $\mathbb{C}$, amb $\partial D = T$ i $E \subset T$ un subconjunt qualsevol.

$\mathcal{C}^b(D)$ serà l'àlgebra de les funcions contínues i afitades a D. Igualment $\mathcal{C}^b(D \cup E)$ és la subàlgebra de les funcions de $\mathcal{C}^b(D)$ que estenen contínuament a E.

Posarem Sp $\mathcal{C}^b(D) = \mathcal{M}$ Sp $\mathcal{C}^b(D \cup E) = \mathcal{M}^E$. LLavors $\mathcal{C}^b(D) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{M})$; $\mathcal{C}^b(D \cup E) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{M}^E)$. A més D es submergeix de manera natural a $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^E$, i la funció $\hat{z} \in \mathcal{C}^b(D \cup E)$ fa $\hat{z}: \mathcal{M} \longrightarrow \bar{D}$ exhaustiva, i el mateix per $\mathcal{M}^E$

(1) Mentre no diguem res en contra, àlgebra de Banach vol dir també commutativa i unitària.

Si $\alpha \in \bar{D}$, direm $\mathcal{M}_\alpha = \hat{z}^{-1}(\alpha)$, la fibra de $\mathcal{M}$ al punt α i $\mathcal{M}_\alpha^E$ per $\mathcal{M}^E$; i es té que $\mathcal{M}_\alpha = \{\alpha\}, \forall \alpha \in D$, i $\mathcal{M}_\alpha^E = \{\alpha\}\ \forall \alpha \in D \cup E$.

A més $\mathcal{C}^b(D \cup E) \xrightarrow{j} \mathcal{C}^b(D)$ i $\mathrm{Sp}\ j = \pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^E$ transforma fibres en fibres.

iii) m serà la mesura de Lebesgue a T.(normalitzada).

L^∞ voldrà dir (si no s'especifica altra cosa) $L^\infty(T, dm)$.

Si $f \in L^\infty$, la transformada de Poisson $\tilde{f} = P[f]$ (1) és una funció harmònica a D, i el seu límit radial:
$f^*(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r \to 1} f(r e^{i\theta})$ és $f^* = f$ q.pt. $\theta \in T$ (2).

Finalment $\tilde{f}_r(\theta) = P[f](re^{i\theta})$.

iv) L^∞ és una àlgebra uniforme amb la norma del suprem essencial $\|\ \|_\infty$. Direm $X = \mathrm{Sp}\ L^\infty$, Llavors $L^\infty \simeq \mathcal{C}(X)$

Tenim: $\hat{z}: X \longrightarrow T$ és contínua i exhaustiva, i direm $X_\alpha = \hat{z}^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in T$.

$f \in L^\infty$ és invertible a L^∞ si i només si f esta essencialment afitada inferiorment, per sobre del 0, a T.

(1) En algûns casos $\tilde{f}$ voldrà dir la classe de f (en un quocient) i no la transformació de Poisson f. De totes maneres no hi haurà lloc a confusió en aquest aspecte.
(2) Si $S \subset T$, direm indistintament $e^{i\theta} \in S$ o bé $\in S$.

$L^{\infty}_E = \left\{ f \in L^{\infty} : \hat{f}_{|X_{\alpha}} = ct. \quad \forall \alpha \in E \right\}$ és una subàlgebra uniforme de L^{∞} i posarem Sp $L^{\infty}_E = X^E$. Es té $L^{\infty}_E \simeq \mathcal{C}(X^E)$ i tenim que X^E_{α} (definit com sempre) és $\{\alpha\}$ si $\alpha \in E$ i X_{α} si $\alpha \in \bar{E}^c$.

(En general, una funció de L^{∞} és de L^{∞}_E si la seva transformada de Poisson estén contínuament a E).

A més, cal fer notar que $L^{\infty}_T = \mathcal{C}(T) = C$

Si B és una subàlgebra uniforme de L^{∞} , es diu que el nucli de Poisson és asimptòticament multiplicatiu, per B, a E si i només si per a tota parella de funcions f, g $\in$ B es té:

$$\lim_{r \longrightarrow 1} \left\| \tilde{f}\, \tilde{g}\,(re^{i\theta}) - \widetilde{f\,g}\,(re^{i\theta}) \right\|_{\infty,\ E}' = 0$$

v) H^p voldrà dir l'espai de Hardy, d'índex p, a D.

H^{∞} és l'àlgebra (uniforme) de les funcions analítiques i afitades a D. Es identificable (mitjançant el límit radial) amb una subàlgebra uniforme de L^{∞} . El nucli de Poisson és asimptòticament multiplicatiu per H^{∞} a tot T.

H^{∞}_E és la subàlgebra de les funcions de H^{∞} que estenen contínuament a E.

$$H^{\infty}_E = \left\{ f \in H^{\infty} : \hat{f}_{|X_{\alpha}} = ct, \alpha \in E \right\}$$

A és l'àlgebra del disc, $A = H^{\infty} \cap \mathcal{C}(T)$.

En resum:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{\infty} \arrow[r] & L^{\infty} \arrow[r, hook] & \mathcal{C}^{b} \quad (D) \\
A \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & \\
 & H^{\infty}_{E} \arrow[uu, hook, dashed] \arrow[r] & L^{\infty}_{E} \arrow[uu, hook] \arrow[r, hook] & \mathcal{C}^{b} \quad (D \cup E). \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

vi) Si $B \hookrightarrow L \hookrightarrow H^{\infty}$; B, L subàlgebres uniformes, direm que B és puntual afitadament densa a L, si cada $f \in L$ es límit puntual a D, d'una successió afitada de funcions de B.

L'àlgebra del disc, A, és puntual afitadament densa a H^{∞}. Per tant, també H^{∞}_{E}

La forma per a nosaltres més convenient d'aquest fet és la següent: (Veure [12]).

"H^{∞}_{E} és puntual afitadament densa a $H^{\infty} \Longleftrightarrow \forall f \in H^{\infty}\ \exists f_n \in H^{\infty}_{E}$, successió afitada que convergeix cap a f uniformement sobre els subconjunts de D a distància positiva de E."

vii) Finalment:

Si $B \subset L$ espais de Banach, i $h \in L$, direm

$$d\,(h,B) = \inf_{g \in B} \|g - h\|$$

Si μ és una mesura sobre Θ ,(e.t.loc.comp.) i $S \subset \Theta$, tancat, direm $\mu^{S} = \mu_{|S}$ (la restricció a S de la mesura μ).

Si τ és una topologia sobre un conjunt Θ , i f_α , f funcions sobre Θ , $f_\alpha \xrightarrow[\tau]{} f$ vol dir que f_α convergeix cap a f amb la topologia τ (a Θ). Si $Y \subset \Theta$ i $f_\alpha \underset{Y}{\Longrightarrow} f$

vol dir convergència uniforme a Y, cap a f, sobre els subconjunts compactes de Y

Si $M \subset S \subset \Theta$, $(\overline{M})_S$ és l'adherència de M a X.

II - $H^\infty + L^\infty_E$ és tancat

Ho veurem en el cas de $E \subsetneq T$, compacte (Cas pel qual hem trobat una simplificació). Per casos més generals, en particular el cas de E, qualsevol, veure [3]

Procedirem a la demostració en successives etapes.

1 - Seguint Helson i Sarason [1], el problema quedarà resolt si veiem que $d(h, H^\infty) = d(h, H^\infty_E)$ $\forall h \in L^\infty_E$, ja que llavors tindrem que $L^\infty_E/_{H^\infty_E} \xhookrightarrow{j} L^\infty/_{H^\infty}$ isomètricament, o sigui que $j(L^\infty_E/_{H^\infty_E})$ és tancat a $L^\infty/_{H^\infty}$, i si p és la projecció canònica $p: L^\infty \longrightarrow L^\infty/_{H^\infty}$, resulta que $p^{-1}(j(L^\infty_E/_{H^\infty_E})) = H^\infty + L^\infty_E$, i amb això estarà vist que és tancat.

2 - Òbviament $d(h, H^\infty) = \inf_{f \in H^\infty} \|f - h\|_\infty \leq \inf_{g \in H^\infty_E} \|g - h\|_\infty =$

$= d(h, H^\infty_E)$ $\forall h \in L^\infty_E$.

La resta d'aquest apartat consistirà en la demostració de la desigualtat contrària, és a dir: $d(h, H^\infty_E) \leq$ $\leq d(h, H^\infty)$ Si $h \in L^\infty_E$.

En realitat ho veurem més en general, quan $h \in \mathcal{C}^b(D \cup E)$ (Puix que $L^\infty_E \hookrightarrow \mathcal{C}^b(D \cup E)$ isomètricament).

3 - Com que $d(h, H^\infty) = \inf \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \mid B_\rho(h) \cap H^\infty \neq \emptyset \right\}$ (i el mateix per a H_E^∞), tindrem:

Sigui $N = N_{h,\xi} = \left\{ f \in \mathcal{C}^b (D \cup E) \mid \quad \|f - h\| < \xi \right\}$.
Cal demostrar que $N \cap H^\infty \neq \emptyset \Longrightarrow N \cap H_E^\infty \neq \emptyset$.

La clau de la demostració està en el fet que H_E^∞ és puntual afitadament densa a H^∞ (o sigui que les funcions de H^∞ són aproximables per funcions de H_E^∞ uniformement sobre els subconjunts de D a distància positiva de E), i en el lema de separació que veurem tot seguit.

<u>Lema de separació</u>:

Sigui B un espai de Banach real, i $S \subset B$ un subespai tancat.

Sigui Ω un subconjunt obert, convex i afitat de B; $\omega \in S'$, real; i $\varepsilon > 0$.
Suposem que $a \in \mathbb{R}$ satisfà que $\omega(y) < a \quad \forall y \in \Omega_\varepsilon \cap S$ (1)
Llavors existeix $\Psi \in B'$, real i tal que $\Psi|_S = \omega$ i
$\Psi(x) < a \quad \forall x \in \Omega$.

<u>Dem</u>: Podem suposar, en primer lloc, que dim S =1, ja que sinó podem fer $S/_{\mathrm{Ker}\,\omega} \subset B/_{\mathrm{Ker}\,\omega}$ amb dim $S/_{\mathrm{Ker}\,\omega} = 1$, i si $\pi : B \longrightarrow B/_{\mathrm{Ker}\,\omega}$ és la projecció canònica, tenim que $\pi(\Omega)$ és obert, convex i afitat.

Ara, considerarem dos casos:

1) Si $\overline{\Omega_{\varepsilon/2}} \cap S \neq \emptyset$, llavors $\exists x_0 \in S : \omega(x_0) = a$ (Estem també suposant que $\omega \neq 0$, si $\omega \equiv 0$ el lema és totalment trivial),

(1) $\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in B \quad \inf\limits_{y \in \Omega} \|x-y\| < \varepsilon \right\}$

Òbviament $x_0 \in \Omega_{\varepsilon/2}$, llavors tenim, com a conseqüència del teorema de separació de Hahn-Banach, que $\exists\ \theta \in B'$, real, i tal que $\theta(x_0) > \sup\{\theta(x) : x \in \overline{\Omega}_{\varepsilon/2}\}$ (*)

Posem $t = \theta(x_0) \neq 0$ (ja que sinó $\theta(x) = 0\ \forall x \in S$ cosa que, com que $\overline{\Omega}_{\varepsilon/2} \cap S \neq \emptyset$, està en contradicció amb la desigualtat (*)).

LLavors, si $c = \frac{a}{t}$, tenim que $c\,\theta(x_0) = \frac{a}{t}\,\theta(x_0) = a = \omega(x_0)$. Per tant, com que dim $S = 1$, resulta que $c\,\theta_{|S} = \omega$.

A més, com que $c > 0$ (ja que si no, $c\,\theta(x_0) < c\,\theta(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}_{\varepsilon/2} \cap S \Rightarrow a < \omega(x)$. Contradicció !!) tenim que $\psi = c\,\theta$, ho compleix.

2) Si $\overline{\Omega}_{\varepsilon/2} \cap S = \emptyset$, tenim : $\exists\ \theta \in B'$: $S \subset \operatorname{Ker}\theta$ i $\theta_{|\Omega} < -1$ (1).

Si $\overline{\omega}$ és una extensió de Hahn-Banach de ω a B, tenim que, com que Ω és afitat, $\exists\ b \in \mathbb{R}$: $\overline{\omega}_{|\Omega} < a + b$, per tant, podem definir $\psi(y) = (\overline{\omega} + b\,\theta)(y)$, i si $y \in \Omega$

$\psi(y) = \overline{\omega}(y) + b\,\theta(y) < a + b - b = a$.

Finalment, si $y \in S$ $\psi(y) = \overline{\omega}(y) + b\,\theta(y) = \omega(y)$.

4 - Passem, finalment, a veure que $\tilde{N} \cap H^{\infty} \neq \emptyset \Longrightarrow N \cap H^{\infty}_E \neq \emptyset$, per N entorn de $h \in \mathcal{C}^b(D \cup E)$ en $\mathcal{C}^b(D \cup E)$,

Procedirem per reducció a l'absurd:

(1) Com que S és de dimensió finita i Ω afitat, si fem $\Pi : B \longrightarrow B/_S$ tenim que, com que $\overline{\Omega} \cap S = \emptyset$ llavors $\tilde{0} \notin \overline{\Pi(\Omega)}$, i aplicant al quocient la versió original, de [14], del teorema de separació de Hahn-Banach, obtenim θ.

Suposem que $\exists r > 0$ tal que $N = N_{h,r}$ es $\bar{N} \cap H^{\infty} \neq \emptyset$ i $\bar{N} \cap H^{\infty}_{E} = \emptyset$.

a) Prenem $\mathrm{Re}\ ev_0 : \mathcal{C}^b(D \cup E) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \longrightarrow \mathrm{Re}\ g(0)$, i considerem $\mu: H^{\infty}_{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ la restricció de $\mathrm{Re}\ ev_0$ a H^{∞}_{E} .

Pel lema anterior es té (per un N_r convenient)
$\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists \nu_a$, extensió de μ à $\mathcal{C}^b(D \cup E)$ tal que
$\int g \, d\nu_a < a \quad \forall g \in \bar{N}$.

De manera que ν_a compleix: $\nu_a - \mu \perp H^{\infty}_{E}$.

b) Sigui ara $\mathcal{E}_a = \mathcal{C}^b(\mathcal{M}^E \setminus E) \oplus L^{\infty}(E, d|\nu^E_a|)$
(On $|\nu^E_a| = |\nu_{a|_E}|$) .

Considerem a $\mathcal{E}_a$ la topologia τ_a, de la convergència uniforme sobre els compactes de $\mathcal{M}^E \setminus E$ i feble à $L^{\infty}(\mathcal{M}^E, d|\nu_a|)$. És a dir: Si $\{f_\alpha\}$ és una xarxa de $\mathcal{E}_a$, $f_\alpha \xrightarrow[\tau_a]{} f$ si i només si $f_\alpha \underset{\mathcal{M}^E \setminus E}{\rightrightarrows} f$, i $\forall \varepsilon > 0$ i $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^1(\mathcal{M}^E, d|\nu_a|)$, $\exists \alpha_0$: $\forall \alpha > \alpha_0$ $\int |(f_\alpha - f)\varphi_i| \, d|\nu_a| < \varepsilon$.

Òbviament $H^{\infty}_{E} \subset \mathcal{C}^b(D \cup E) \subset \mathcal{E}_a \subset L^{\infty}(\mathcal{M}^E, d|\nu_a|)$
(O sigui que ν_a està també definida sobre $\mathcal{E}_a$).

c) Direm $\mathcal{F}_a = \overline{(H^{\infty}_{E})}^{(\mathcal{E}_a, \tau_a)}$

Proposició: 1) $\mathcal{F}_a$ és una subàlgebra tancada (per τ_a) de $\mathcal{E}_a$.

2) $\nu_a - \mu \perp \mathcal{F}_a$.

Dem.:

1) $\mathcal{F}_a$ és òbviament, tancat.

Si $f, g \in \mathcal{F}_a$, tenim que $f\,g \in L^{\infty}(\mathcal{M}^E, d|\nu_a|)$ i existeixen xarxes $\{f_\alpha\}$, $\{g_\alpha\}$ a H_E^∞ tals que:

$f_\alpha \xrightarrow[\tau_a]{} f$, $g_\alpha \xrightarrow[\tau_a]{} g$.

Els productes $f_\alpha g_\alpha \in H_E^\infty$, i $f_\alpha g_\alpha \xrightarrow[\mathfrak{M}^E - E]{} fg$.

Sigui, ara $V = V_{fg\,;\,\varepsilon\,;\,\varphi_1,\dots,\varphi_n}$, on $\varphi_i \in L^1(\mathfrak{M}^E, d|\nu_a|)$, un entorn (feble) de fg en $L^\infty(\mathfrak{M}^E, d|\nu_a|)$. LLavors $V \cap H_E^\infty \neq \emptyset$:

Com que $g \in \mathcal{F}_a$, tenim que, per $\varepsilon/2$ i $f\varphi_1,\dots,f\varphi_n$ $\exists F_2 \in H_E^\infty$:

$$\int |(F_2 - g)\, f\, \varphi_i| \; d|\nu_a| < \varepsilon/2 .$$

Com que $f \in \mathcal{F}_a$, per $\varepsilon/2$; $F_2\varphi_1,\dots,F_2\varphi_n$ tenim $F_1 \in H_E^\infty$ amb

$$\int |(F_1 - f)\, F_2\, \varphi_i| \; d|\nu_a| < \varepsilon/2 .$$

O sigui que $F_1F_2 \in H_E^\infty$ i :

$$\int |(F_1F_2 - fg)\,\varphi_i| \; d|\nu_a| \leqslant \int |(F_1 - f)\, F_2\,\varphi_i|\, d|\nu_a| + \int |(F_2 - g)\, f\,\varphi_i| \; d|\nu_a| < \varepsilon .$$

2) Cal demostrar que si $\varphi \in \mathcal{F}_a$, $\int \varphi \, d(\nu_a - \mu) = 0$.

Si φ_α és una xarxa de H_E^∞ : $\varphi_\alpha \xrightarrow[\tau_a]{} \varphi$, llavors és obvi que $\int \varphi_\alpha \, d\nu_a \longrightarrow \int \varphi \, d\nu_a$ i $\operatorname{Re}\varphi_\alpha(0) \longrightarrow \operatorname{Re}\varphi(0)$.

Per tant:

$$\int \varphi \, d(\mu - \nu_a) = \lim_\alpha \int \varphi_\alpha \, d\nu_a - \int \varphi \, d\mu =$$

$$= \lim_\alpha \int \varphi_\alpha \, d\nu_a - \lim_\alpha \operatorname{Re}\varphi_\alpha(0) = \lim_\alpha \int \varphi_\alpha \, d(\nu_a - \mu) = 0$$

ja que $\nu_a - \mu \perp H_E^\infty$.

d) Definim $\rho_a : \mathcal{E}_a \longrightarrow \mathcal{C}^b(D)$

$$f \longrightarrow \rho_a(f) = f_{|D}$$

Clarament, ρ_a és exhaustiva.

A més, $\rho_a(\mathcal{F}_a) \subset H^\infty$ (la convergència uniforme sobre els compactes de $\mathcal{M}^E \sim E$ implica convergència uniforme sobre els compactes de D, i això suposa l'analiticitat del límit), i és també una subàlgebra tancada,(amb la norma $\| \quad \|_\infty$).

Proposició: $\rho_{a|\mathcal{F}_a}$ és injectiva.

Dem.: Sigui $f \in \mathcal{F}_a$ tal que $\rho_a(f) = 0$, o sigui que $f_{|D} \equiv 0$.

Posem $d\zeta = f\, d\nu_a$. LLavors sup $(\mu) \subset E$ (Si $g \in \mathcal{C}(\mathcal{M}^E)$: sup $(g) \subset E^c$, es té que $g_{|E} \equiv 0 \Longrightarrow \int fg\, d\nu_a = 0$).

Com que sup ζ és un subconjunt propi de T (està contingut a E), el teorema de maximalitat de Wermer(Veure [10] , pàg. (2) assegura que $A_{|\sup \zeta}$ és uniformement densa a $\mathcal{C}(\sup \zeta)$, i per tant $\int_{\sup\zeta} f.1\, d\nu_a = \int_{\mathcal{M}^E} f.1\, d\mu =$

$= \mathrm{Re}\, f.1\,(0) = 0$ (ja que $A \subset \mathcal{F}_a$, que és àlgebra, i $\mu - \nu_a \perp \mathcal{F}_a$).

e) Direm $\mathcal{A}_a = \rho_a^{-1}(H^\infty) \cap \mathcal{F}_a$.

Proposició: $\mathcal{A}_a$ és una àlgebra, que amb la norma del suprem essencial a $\mathcal{M}^E$, per la mesura ν_a ($\| \quad \|_{\infty,\nu_a}$), resulta ésser de Banach.

Dem.: Donada $\{g_n\}$, $\| \ \|_{\infty, \mu_a}$ - de Cauchy, tenim que per a cada n $\exists \{f^n_\alpha\} \subset H^\infty_E$ (xarxa), amb $f^n_\alpha \xrightarrow[\tau_a]{} g_n$. O sigui que, donat ε; $K \subset \mathcal{M}^E \setminus E$ compacte; $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^1(\mathcal{M}^E, d\mu_a)$ tenim que $\exists \alpha_{0,n}$ si $\alpha > \alpha_{0,n}$ $\|f^n_\alpha - g_n\|_K < \varepsilon$ i $\int |(f^n_\alpha - g_n)\varphi_i| \, d|\mu_a| < \varepsilon$. És a dir que

$$\|f^n_\alpha - g\|_K \leqslant \|g_n - g\|_K + \|f^n_\alpha - g_n\|_K < \varepsilon.$$

(si $n > n_0$) i també: $\int |(f^n_\alpha - g)\varphi_i| \, d|\mu_a| \leqslant$

$$\leqslant \int |(f^n_\alpha - g_n)\varphi_i| \, d|\mu_a| + \int |(g_n - g)\varphi_i| \, d|\mu_a| < \varepsilon$$

El que acabem de dir, juntament amb el fet que $\rho_a|_{\mathcal{F}_a}$ sigui injectiva, ens porta immediatament al següent teorema:

Teorema: $\rho_a : \mathcal{A}_a \longrightarrow H^\infty$ és un isomorfisme isomètric.

Dem:

Es obvi que ρ_a és morfisme, i la proposició anterior assegura que és injectiu.

Vegem que és exhaustiu.

Si $f \in H^\infty$ $\exists \{f_n\} \subset H^\infty_E$ afitada : $f_n \longrightarrow f$ uniformement sobre els conjunts a distància positiva de E.

Com que f_n és afitada, està continguda en una bola de $L^\infty(\mathcal{M}^E, d|\mu_a|)$, que és feblement compacta (T.de Banach Alaoglu), o sigui que en podem extreure una parcial convergent feblement (i, és clar, uniformement sobre els compactes de $\mathcal{M}^E \setminus E$). Per tant, com que convergeix uniformement sobre els compactes de D cap a f, tenim que la restricció a D del seu límit per τ_a coincideix amb f.

És a dir que ρ_a aplica isomòrficament (isomorfisme d'àlgebres) $\rho^{-1}(H^\infty) \cap \mathcal{F}_a$ a H^∞. Òbviament $\|\rho_a(\varphi)\|_\infty =$
$= \|f_{|D}\|_D \leqslant \|f\|_{\mathcal{M}^E}$ i això dóna que ρ_a és contínua, i com que la gràfica és tancada, és un isomorfisme topològic, que en ser-ho d'àlgebres uniformes és una isometria.

Ara, tornant al principi de 4, com que $N \cap H^\infty \neq$
$\neq \emptyset$, podem prendre $f \in H^\infty$ amb $\|f - h\|_\infty < r$, i hi ha una única $\varphi \in \mathcal{A}_a$: $\rho_a(\varphi) = f$, i tenim que $\|\varphi - h\|_{L^\infty(E, d|\nu_a^E|)} < r$

<u>Dem</u>:

Quedarà demostrat, si veiem que $\phi \in \mathrm{Sp}\, L^\infty(E, d|\nu_a^E|)$ es compleix que $|\phi(h - \varphi)| < r$.

Si $\phi \in \mathrm{Sp}\, L^\infty(E, d|\nu_a^E|)$, tal que $\phi(z) = \lambda$, tenim, com que h és contínua a E:

$$|\phi(h - \varphi)| = |\phi(\varphi) - \phi(h)| = |\phi(\varphi - h(\lambda))| = (*)$$

Ara, $\varphi - h(\lambda) \in \mathcal{A}_a$, i si $\tilde{\phi} = \mathrm{Sp}\, \rho_a^{-1}(\phi) =$
$= \phi \circ \rho_a^{-1} \in \mathrm{Sp}\, H^\infty$, llavors $(*) = |\tilde{\phi}(f - h(\lambda))| \leqslant$
$\leqslant \|f - h(\lambda)\|_\infty \leqslant \|f - h\|_\infty < r$ c.v.d.

I finalment, veurem, com a conseqüència de tot el que s'ha dit, una propietat de φ que és fonamental pels nostres propòsits.

<u>Teorema</u>: $\varphi \in \overline{(N)}_{\tau_a}$

<u>Dem</u>:

Sigui $\delta > 0$ tal que $2\delta < r - \|f - h\|_{\infty}$.

Com que $\hat{h}$ és contínua a $\mathcal{M}^E$, $\forall \chi \in \mathcal{M}^E$ $\exists W_\chi$ on l'oscil.lació de $\hat{h}$ és més petita que δ, i obtenim així un recobriment de $\mathcal{M}^E$ pels W_χ , del qual n'extreurem un subrecobriment finit: $W_{\chi_1}, \ldots, W_{\chi_k}$.

Si prenem a $\mathbb{C}$ els discs $D_i = D_r\ (\hat{h}\ (\chi_i)\ )$, tenim conjunts convexos de $\mathbb{C}$ en els quals:

• $\varphi(\chi) \in D_i$ si $\chi \in W_i \setminus E$, ja que φ coincideix amb $\hat{f}$ a $\mathcal{M}^E \setminus E$ i $|\varphi(\chi) - \hat{h}(\chi_i)| \leqslant |\hat{f}(\chi) - \hat{h}(\chi)| + |\hat{h}(\chi) - \hat{h}(\chi_i)| \leqslant \|f - h\|_{\infty} + \delta < r.$

• $\varphi(\chi) \in D_i$ $|\mu_a|$ - quasi per tot $\chi \in W_i \cap E$, ja que $\|\varphi - h\|_{L^\infty(E,\, d|\mu_a^E|)} < r$.

Veiem, ara, que $\exists \psi_{\alpha,i} \in \mathcal{C}^b(D \cup E)$, $i = 1,\ldots,k$ de manera que $\psi_{\alpha,i} \underset{W_i \setminus E}{\Longrightarrow} \varphi$, $\psi_{\alpha,i} \longrightarrow \varphi$ $|\mu_a|$--quasi per tot $\chi \in W_i \cap E$, i tal que $\{\psi_{\alpha,i}\}$ afitada; i $\forall n$ $\psi_{\alpha,i}(\chi) \in D_i$ si $\chi \in W_i \setminus E$, i $|\mu_a|$-quasi per tot $\chi \in W_i \cap E$.

Com que $\varphi \in L^\infty(E, d|\mu_a^E|)$ $\exists \varphi \in L^1(E, d|\mu_a^E|)$ o sigui que $g_n \in \mathcal{C}(E)$, $g_n \longrightarrow \varphi$ en E $|\mu_a|$ -quasi pertot.

Prenent a $W_i \cap E$ una xarxa exhaustiva de compactes K_α , i el mateix a $W_i \setminus E$, K'_α , i entorns respectius

$\mathcal{U}_{X_\alpha}$, $\mathcal{V}_{X'_\alpha}$, amb intersecció no buida, tenim una partició de la unitat $\eta_2^{X'_\alpha}$, $\eta_1^{X_\alpha}$, subordinada a ells.

LLavors $\psi_{i,\alpha} = \varphi\eta_2^{X'_\alpha} + g_s\eta_1^{X_\alpha}$ (per S escollit convenientment), compleix les condicions de convergència, i a més, aplica W_i en D_i , perquè és una combinació convexa de funcions a valors en D_i.

Prenem, ara una partició de la unitat $\{\zeta_i\}_{i=1,\ldots k}$; subordinada al recobriment W_i .

Posant $\psi_\alpha = \sum_{j=1}^{k} \zeta_j \psi_{\alpha,j}$, tenim que $\psi_\alpha \in \mathcal{C}^b(D \cup E)$, a més, com que ψ_α és una combinació convexa de $\psi_{\alpha,j}$, tenim que $\forall X \in \mathcal{M}^E$ $\psi_\alpha(X) \in D_i$ si $X \in W_i$, i

$$|\psi(X) - \hat{h}(X)| \leqslant |\psi_\alpha(X) - \hat{h}(X_i)| + |\hat{h}(X_i) - \hat{h}(X)|$$

$$\|\psi_\alpha - h\|_{W_i} + \delta < r'$$,per un α prou avançat, comú per a tots els entorns.

LLavors $\psi_\alpha \xrightarrow[\mathcal{M}^E - E]{} \varphi$ (es inmediat), i $\psi_\alpha \longrightarrow \varphi$ $|\mu_a^E|$-feblement, ja que $\psi_\alpha \longrightarrow \varphi$ puntualment, i ψ_α afitades uniformement. El teorema de la convergència dominada assegura la $|\mu_a^E|$ -convergència.

1- bis) Finalment, hem suposat que $\exists f \in H^\infty$, $f \in N$ i $N \cap H_E^\infty \neq \emptyset$. LLavors, $\forall a \in \mathbb{R}$ podem construir la μ_a, com ja s'ha vist, i de manera que $\mu_a(g) < a$ $\forall g \in N$.

Com que μ_a és contínua per la topologia τ_a, resulta que per l'unica $\varphi \in \mathcal{F}_a \cap \rho_a^{-1}(H^\infty)$ tal que $\rho_a(\varphi) = f$,tenim que $\int \varphi \, d\mu_a \leqslant a$ en esser $\varphi \in \overline{(N)}_{\tau_a}$.

Per tant $\int \varphi \, d \, \nu_a = \int \varphi \, d\mu = \int f \, d\mu \leqslant a$ ja que $\nu_a - \mu \perp \mathcal{F}_a$, però, com que $\int f \, d\mu = \mathrm{Re} f(0) \leqslant a$, i la desigualtat es certa per a tot $a \in \mathbb{R}$, arribem a contradicció.

III - $H^\infty + L^\infty_E$ es àlgebra:

És en realitat, una conseqüència d'ésser $H^\infty + L^\infty_E$ tancat (seguint [3]).

Ens restringirem, com a l'apartat anterior, al cas de $E \subset T$ compacte.

0) Direm $X = \mathrm{Sp}\, L^\infty$; $X^E = \mathrm{Sp}\, L^\infty_E$. LLavors $L^\infty \simeq \mathcal{C}(X)$, i $L^\infty_E \simeq \mathcal{C}(X^E)$.

Si A és l'àlgebra del disc, com que $A \hookrightarrow \mathcal{C}(T) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow L^\infty_E \hookrightarrow L^\infty$, tenim $X \xrightarrow{\Pi} X^E \xrightarrow{\hat{z}} T \longrightarrow \bar{D}$ amb $\Pi : X \longrightarrow X^E$ i $\hat{z} : X^E \longrightarrow T$ exhaustives. Direm, si $\alpha \in T$, $X_\alpha = \hat{z}^{-1}(\alpha)$ (ja que $\hat{z} \circ \Pi = \hat{z}$), i el mateix per $(X^E)_\alpha$.

LLavors, com que E és compacte, es té:
$(X^E)_\alpha = \{\alpha\}$ si $\alpha \in E$, i $(X^E)_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \in E^c$.

1) Com a conseqüència de tot el que s'ha dit fins ara: $L^\infty_E = \left\{ f \in \mathcal{C}(X) \;\middle|\; f_{|X_\alpha} = \mathrm{ct}, \quad \forall \alpha \in E \right\}$

LLavors tenim:

$$H^\infty + L^\infty_E \subset \left\{ f \in \mathcal{C}(X) \;\middle|\; f_{|X_\alpha} \in \widehat{H^\infty_{|X_\alpha}} \; \forall \alpha \in E \right\} =$$
$$= \widehat{H^\infty + C}_{|z^{-1}(E)}$$

Òbviament, $H^\infty + C_{z^{-1}(E)}$ es una subàlgebra tancada de $\mathcal{C}(z^{-1}(E))$ ja que hi han funcions de $\mathcal{C}(T)$ que valen 1 a E i son estrictament més petites a E^C

Demostrarem que $H^\infty + L^\infty_E = \widehat{H^\infty + C}_{|z^{-1}(E)}$ La demostració gira a l'entorn del següent teorema general:

<u>Teorema</u>: Sigui K espai topològic compacte, Q una àlgebra uniforme sobre K, i $F \subset \mathcal{C}(K)$ un subespai tancat que és un Q-mòdul.

Si $h \in \mathcal{C}(K)$ i $h_{|E} \in F_{|E}$, $\forall E$ conjunt maximal d'antisimetria de Q, llavors $h \in F$.

<u>Dem</u>: Veure [9] , pàg 61.

Sigui $B = \widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|\hat{z}^{-1}(E)} = \widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|\bigcup_{\alpha \in E} X}$

<u>Proposició</u>: B és un $\mathcal{C}(E)$ -mòdul

Dem: Si $f \in B$ i $g \in \mathcal{C}(E)$, tenim que $\exists h \in H^\infty$, $\varphi \in L^\infty_E$, amb $\hat{h} + \hat{\varphi}_{|\hat{z}^{-1}(E)} = f$, i si g' és una extensió de g a $\mathcal{C}(X)$, llavors $g'.\varphi \in \mathcal{C}(X)$ i és constant a X_α, $\forall \alpha \in E \Longrightarrow \varphi.g \in B$.

Com que $A_{|E}$ és densa en $\mathcal{C}(E)$ (teorema de maximalitat de Wermer, si suposem $E \subsetneq T$), si $\ell \in A$, $h.\ell \in H^\infty$ implica $h.\ell_{|X_\alpha} \in \widehat{H^\infty}_{|X_\alpha}$ $\forall \alpha \in E$, i com que $\widehat{H^\infty}_{|X_\alpha}$ és una subàlgebra tancada de $\mathcal{C}(X_\alpha)$, es té que $hg \in \widehat{H^\infty}_{|X_\alpha}$ $\forall \alpha \in E$. Per tant $f.g_{\,z^{-1}(E)} \in \widehat{H^\infty + C}_{|z^{-1}(E)}$ c.v.d.

Ara, apliquem el teorema:

$\mathcal{C}(E)$ és un àlgebra uniforme a $\hat{z}^{-1}(E)$,

$B \subset \mathcal{C}(\hat{z}^{-1}(E))$ és un $\mathcal{C}(E)$ -mòdul, i els conjunts d'antisimetria de $\mathcal{C}(E)$ a $\hat{z}^{-1}(E)$ són les fibres X_α $\alpha \in E$.

Per tant, si $f_{|\hat{z}^{-1}(E)} \in B_{|\hat{z}^{-1}(E)}$, llavors $f \in B$ O sigui que $B = \widehat{H^\infty + C}_{|z^{-1}(E)}$ i per tant, és àlgebra.

Finalment, $H^\infty + L^\infty_E$ és una àlgebra uniforme.

Es dedueix directament de la següent proposició general:

<u>Propos</u>: Si R és un àlgebra uniforme i $R' \hookrightarrow R$ subàlgebra de Banach amb $\|f\|_{R'} = \|f\|_R \quad \forall f \in R'$. llavors R' és un àlgebra uniforme.

<u>Dem</u>: Es té $\mathrm{Sp}\, R \longrightarrow \mathrm{Sp}\, R'$ de manera que

$\phi \longrightarrow X$

$\forall f \in B \quad \chi(f) = \phi(f)$ llavors $\|\hat{f}\|_{\mathrm{Sp}\, R'} \leqslant \|\hat{f}\|_{R'}$

A més $\|\hat{f}\|_{\mathrm{Sp}\, R'} = \sup\limits_{\chi \in \mathrm{Sp}\, R'} |\chi(f)| \geqslant \sup\limits_{\phi \in \mathrm{Sp}\, R} |\phi(f)| =$

$= \|f\|_R = \|f\|_{R'}$ i demostrat.

<u>IV - Caracterització dels elements invertibles:</u>

Les funcions de L^∞, que en principi són funcions definides a T, estenen a funcions harmòniques a D via el nucli de Poisson, i és ben coneguda la caracterització de les funcions invertibles a $H^\infty + C$ en termes de la dita extensió:

" $f \in H^\infty + C \subset L^\infty(T)$ és invertible a $H^\infty + C$

si i només si $\exists\, r_0$, $0< r_0<1$, de manera que P [f] està afitada inferiorment (en mòdul) per sobre de 0, en la corona $\Lambda_{r_0} = \{ z \in D \mid r_0 < |z| < 1 \}$ " (Veure, per exemple, Sarason [6]).

És natural demanar-se per una caracterització semblant que valgui per a les àlgebres $H^\infty + L^\infty_E$, i que, donada la importància del paper que juguen en la demostració, tant la compacitat de T, com el fet que el nucli de Poisson és asimptòticament multiplicatiu a T, per $H^\infty + C$ es pot plantejar en els termes del teorema que donarem a continuació.

Ara E serà un subconjunt de T no necessàriament compacte, i si $K \subset E$ compacte, direm

$$\Lambda_{r_0, K} = \left\{ re^{i\theta} \in D \;\middle|\; r_0 < r \;,\; e^{i\theta} \in K \right\} \subset D$$

<u>Teorema</u>: La condició necessària i suficient per tal que una funció $f \in H^\infty + L^\infty_E$ sigui invertible a $H^\infty + L^\infty_E$ és que f ho sigui a L^∞ , i que $\forall K \subset E$ compacte, $\exists\, \delta_K > 0$ i $r_K \in (0,1)$ tal que, si $re^{i\theta} \in \Lambda_{r_K, K}$ $\left| \tilde{f}\,(re^{i\theta}) \right| > \delta_K$

(És a dir, que les funcions invertibles a $H^\infty + L^\infty_E$ estàn inferiorment afitades, per sobre de 0, en sectors de corona centrats en els compactes de E).

a) Que la condició és necessària és una conseqüència del fet que el nucli de Poisson sigui, per $H^\infty + L^\infty_E$ asimptòticament multiplicatiu sobre els subconjunts compactes de E, com ara veurem.

<u>Lema 1</u> : Si $f \in L^{\infty}_{E}$ i $g \in L^{\infty}$, llavors $\forall K \subset E$ compacte, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$: si $1 - r < \delta$, llavors

$$\left\| \tilde{f}_r \tilde{g}_r - (\widetilde{fg})_r \right\|_{\infty, K} < \varepsilon .$$

<u>Dem:</u> En primer lloc, $\forall r \in [0,1)$:

$$\left\| \tilde{f}_r \tilde{g}_r - (\widetilde{fg})_r \right\|_{\infty, K} \leqslant \left\| \tilde{f}_r \tilde{g}_r - f \tilde{g}_r \right\|_{\infty, K} +$$

$$+ \left\| f \tilde{g}_r - (\widetilde{f g})_r \right\|_{\infty, K} = \left\| \tilde{g}_r \right\|_{\infty, K} \left\| \tilde{f}_r - f \right\|_{\infty, K} +$$

$$+ \sup_{\theta \in [0,2\pi]} . \left| f (\theta) \int P_r (\theta - t) g (t) dm (t) - \right.$$

$$\left. - \int P_r (\theta - t) f (t) g (t) dm (t) \right|$$

El primer terme de la suma es pot majorar per $\left\| \tilde{g}_r \right\|_{\infty} \left\| \tilde{f}_r - f \right\|_{\infty, K}$, i com que $f_{|K}$ és contínua, $\tilde{f}$ és contínua uniformement a $\Lambda_{0,K}$, o sigui que $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists \delta : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow \left| \tilde{f} (z) - \tilde{f} (z_0) \right| < \varepsilon'$. Per tant, si $1-r < \delta$ tenim que $\left| re^{i\theta} - e^{i\theta} \right| < \delta \Longrightarrow \left| \tilde{f}(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) \right| < \varepsilon'$.

Pel segon terme, la majoració és:

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \int_0^{2\pi} P_r (\theta - t) \left| f (\theta) - f(t) \right| \left| g (t) \right| dm (t) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left\| g \right\|_{\infty} \int_0^{2\pi} P_r (\theta - t) \left| f(\theta) - f(t) \right| dm(t)$$

i per a aquesta última integral es té:

$$\int_{t \in (\theta - \delta, \theta + \delta)} P_r (\theta - t) \left| f (\theta) - f (t) \right| dm (t) + \int_{t \notin (\theta - \delta, \theta + \delta)} P_r (\theta - t) \left| f(\theta) - \right.$$

$$\left. - f (t) \right| dm (t) .$$

Per la continuïtat uniforme de f a K, si $|t - \theta| < \delta$ es té $\left| f (t) - f (\theta) \right| < \varepsilon'$, és a dir:

El primer terme de la suma és estrictament més petit que $\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t)\,\varepsilon'\,dm(t) \leqslant \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\,\varepsilon'\,dm(t) = \varepsilon'$

i el segon està afitat per:

$$\| f(\theta) - f \|_\infty \cdot \int_{(\theta-\delta,\,\theta+\delta)} P_r(\theta-t)\,dm(t) = \| f(\theta) - f \|_\infty < \varepsilon''$$

Si $r > r_0$, ja que el nucli de Poisson està afitat a T, fora d'un entorn del pol i per $r > r_0$.

Ara només cal prendre $\varepsilon' = \varepsilon / 3\|g\|_\infty$, i $\varepsilon'' = \varepsilon / 3\|f - f(\theta)\|_\infty \|g\|_\infty$ i demostrat.

<u>Lema 2</u>: Si f, g $\in H^\infty + L^\infty_E$, $\lim_{r\to 1} \|\tilde f_r \tilde g_r - (\widetilde{fg})_r\|_{\infty,K} = 0$.

<u>Dem:</u> Si $f = \psi + u$, $g = \varphi + v$ on $\varphi, \psi \in H^\infty$, i $u, v \in L^\infty_E$, llavors:

$$\|\tilde f_r \tilde g_r - (\widetilde{fg})_r\|_{\infty,K} = \|(\psi_r + \tilde u_r)(\varphi_r + \tilde v_r) - [\widetilde{(\psi+u)(\varphi+v)}]_r\|_{\infty,K} = \|\psi_r\varphi_r + \tilde u_r\varphi_r +$$
$$+ \psi_r\tilde v_r + \tilde u_r\tilde v_r - (\varphi\psi)_r - (\widetilde{\psi v})_r - (\widetilde{\varphi u})_r - (\widetilde{uv})_r\|_{\infty,K} \leqslant$$
$$\|\psi_r\varphi_r - (\psi\varphi)_r\|_{\infty,K} + \|\varphi_r\tilde u_r - (\widetilde{\varphi u})_r\|_{\infty,K} +$$
$$+ \|\psi_r\tilde v_r - (\widetilde{\psi v})_r\|_{\infty,K} + \|\tilde u_r\tilde v_r - (\widetilde{uv})_r\|_{\infty,K} \longrightarrow 0$$

ja que el nucli de Poisson és multiplicatiu a H^∞, i Lema 1 (últims termes de la suma).

Com a corol.lari tenim la <u>demostració de la condició necessària</u>:

Si $f \in H^\infty + L^\infty_E$ és invertible, $\exists g \in H^\infty + L^\infty_E$ amb $f\,g = 1$, i llavors:

$$\lim_{r \to 1} \left\| \tilde{f}_r \, \tilde{g}_r - 1 \right\|_{\infty, K} = 0$$

Prenent $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists\, r_0$: si $r > r_0$ $\left\| \tilde{f}_r \, \tilde{g}_r - 1 \right\|_{\infty, K} <$ $< \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - \left\| \tilde{f}_r \right\|_{\infty, K} \left\| \tilde{g}_r \right\|_{\infty, K} < \frac{1}{2} \Longrightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{2 \| g \|_{\infty}} < \left\| \tilde{f}_r \right\|_{\infty, K}$, i això acaba la demostració.

b) Veure que la condició és suficient, és una mica més delicat i ens caldrà considerar primerament el cas que E és compacte (cas relativament senzill) per a poder, més tard, generalitzar-ho.

Una peça clau en tota la demostració és el teorema de Marshall i Chang (o problema de Douglas. Veure [7] i [8]), que combinat amb el teorema de [11] , pàg. 175, vé a dir:

"Tota subàlgebra B de L^{∞} (T) que conté H^{∞} està generada per H^{∞} i els conjugats dels productes de Blaschke invertibles a B".(Cal dir que Davie, Gamelin i Garnett ja donen una demostració d'aquest fet per les àlgebres $H^{\infty} + C$ a [3]).

<u>Cas de E compacte:</u>

En primer lloc, comprovarem el teorema per a funcions de H^{∞} , invertibles a $H^{\infty} + L^{\infty}_{E}$.

És ben conegut ([15] , cap.17 i [11] cap.5) que si $f \in H^{\infty}$, existeixen: B producte de Blaschke, S funció singular i F funció externa tals que f = B.S.F.

El producte de Blaschke (determinat pels zeros de f a D) és continu a T excepte en els punts d'acumulació dels zeros de f (on B^* val 0) i dels inversos dels seus conjugats.

La funció singular està determinada per una mesura positiva a T, singular respecte de m, i és contínua a T excepte en el suport de mesura.

Tant B com S són funcions internes (de mòdul 1 q.p.t. $\theta \in T$)

F és tal que $|F^*| = |f^*|$; i si $h \in H^1$ amb $|h^*| \leqslant \leqslant |F^*|$ q.p.t. , llavors $|f(z)| \leqslant |F(z)| \quad \forall z \in D$.

Lema 3: Si $f \in H^\infty$ és tal que $\exists \delta > 0$: $|f(re^{i\theta})| > \delta$ per a $r > r_0$, $\theta \in E$ i és invertible a L^∞ , llavors f és invertible a $H^\infty + L^\infty_E$.

Dem: Si f = B.S.F. , tenim que $|f(re^{i\theta})| > \delta$ si $r \in \Lambda_{r_0, E}$ implica que els zeros de B no s'acumulen a E, i que si μ és la mesura corresponent a S, $\operatorname{sup}\mu \cap E = \emptyset$.

O sigui que, tant B com S estàn essencialment afitades inferiorment a T, i són contínues a E. Per tant són invertibles a L^∞_E .

Com que f és invertible a L^∞ està essencialment afitada inferiorment a T, o sigui que F és invertible a H^∞. c.v.d.

Això ens permet de posar

Teorema: Si $f \in H^\infty + L^\infty_E$ és invertible a L^∞ i $\exists \delta > 0$: $|\tilde{f}(re^{i\theta})| > \delta$ si $r > r_0$, $\theta \in E \Longrightarrow$ f és invertible a $H^\infty + L^\infty_E$.

<u>Dem</u>: Siguin $f_n \in H^\infty$ i b_n productes de Blaschke invertibles a $H^\infty + L^\infty_E$ (o sigui continus a E) i de manera que $f_n \bar{b}_n \longrightarrow f$ uniformement (T.de Chang Marshall o també Davie, Gamelin i Garnett).

Si n_0 és tal que, per $n > n_0$ $\|f - \bar{b}_n f_n\|_\infty < \delta/2$, llavors $\|f\|_\infty - \delta/2 < \|f_n\|_\infty$. O sigui que si $re^{i\theta} \in \Lambda_{r_0, E}$, es té: $|\tilde{f}(re^{i\theta})| > \delta/2 > 0 \Longrightarrow$ De n_0 en endevant, les f_n són invertibles a $H^\infty + L^\infty_E$ (lema 3).

Això ens ajudarà a veure que f és invertible, és a dir: $\forall \chi \in \mathrm{Sp}\, H^\infty + L^\infty_E$, $|\chi(f)| > 0$.

Com que f és invertible a L^∞ , $\exists M > 0$ amb $|f| \geq M$ q.p.t. $\theta \in T$.

$\forall \varepsilon > 0$ tal que $M - 2\varepsilon > 0$, $\exists n_0'$: si $n > n_0'$ $\|f_n \bar{b}_n - f\|_\infty < \varepsilon$, per tant $|f_n^*| > |f| - \varepsilon \geq M - \varepsilon = M' > 0$.

I com que per a un n prou avançat, f_n és invertible a $H^\infty + L^\infty_E$:

$$\chi(f_n) \neq 0 \quad \forall \chi \in \mathrm{Sp}\, H^\infty + L^\infty_E , \text{ i } \frac{1}{|f_n^*|} \leq \frac{1}{M'} \Rightarrow$$

$$\left\|\frac{1}{f_n}\right\|_\infty \leq \frac{1}{M'} \quad \text{Per tant } \left|\chi\left(\frac{1}{f_n}\right)\right| = \frac{1}{|\chi(f_n)|} \leq \frac{1}{M'} \Rightarrow$$

$$|\chi(f_n)| \geq M' .$$

Com que els b_n són tots invertibles (d'invers $\bar{b}_n$) i amb $\|b_n\|_\infty = \|\bar{b}_n\|_\infty = 1$ es té que $0 < |\chi(b_n)| < 1$, i $\chi(b_n) \cdot \chi(\bar{b}_n) = 1$

Per tant $|\chi(b_n)| = \dfrac{1}{|\chi(\bar{b}_n)|} \geqslant 1$, això implica que $|\chi(b_n)| = |\chi(\bar{b}_n)| = 1$.

Finalment, per n prou avançat, tenim:

$$|\chi(f_n)\ \chi(\bar{b}_n) - \chi(f)| \leqslant \| f_n \bar{b}_n - f \|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow |\chi(f)| \geqslant |\chi(f_n)| . |\chi(\bar{b}_n)| - \varepsilon \geqslant M' - \varepsilon =$$
$$= M - 2\varepsilon > 0, \quad \forall \chi \in \mathrm{Sp}\, H^\infty + L^\infty_E .$$

Aquest teorema, juntament amb la següent proposició (que dóna el pas de $H^\infty + L^\infty_K$, K compacte a $H^\infty + L^\infty_E$, E qualsevol) condueixen a la demostració general de la condició suficient.

<u>Proposició</u>: Si $E \subset T$, qualsevol, $H^\infty + L^\infty_E = \bigcap_{\substack{K \subset E \\ K \text{ comp.}}} H^\infty + L^\infty_K$

<u>Dem:</u> $\bigcap_K H^\infty + L^\infty_K$ és un tancat de L^∞, i a més és àlgebra (és intersecció de tancats i d'àlgebres).

A més $H^\infty + L^\infty_E \subset \bigcap_{K \subset E} H^\infty + L^\infty_K$ òbviament.

Vegem que tenen els mateixos generadors:

Si W és un producte de Blaschke invertible a $H^\infty + L^\infty_E$, els seus zeros no s'acumulen a E, i per tant tampoc a cap dels seus subconjunts compactes.(1) Això implica que W és invertible a $H^\infty + L^\infty_K$ $\forall K \subset E$ compacte i per tant $\bar{W} = W^{-1} \in \bigcap_K H^\infty + L^\infty_K$.

(1) L'invers és el mateix a tots ja que els subconjunts compactes de E formen un reticle distributiu complert.

Si W és un producte de Blaschke invertible a $\bigcap_k H^\infty + L_k^\infty$, els seus zeros no s'acumulen a cap $K \subset E$ (ja que és invertible a cada $H^\infty + L_k^\infty$) o sigui que W és continu a E, i per tant, invertible a $H^\infty + L_E^\infty$, amb invers $\tilde{W}$.

Per tant (T. de Chang - Marschall), $H^\infty + L_E^\infty = \bigcap_k H^\infty + L_k^\infty$.

Conclusió: Si $f \in H^\infty + L_E^\infty$ és invertible a L^∞ i és tal que $\forall K \subset E$ $\exists \delta_k > 0$ i $r_k < 1$ amb $|\tilde{f}(re^{i\theta})| > \delta_k$ si $re^{i\theta} \in \Lambda_{r_k,K}$, llavors f és invertible a $H^\infty + L_k^\infty$ $\forall K$, i per tant a $H^\infty + L_E^\infty$.

CAPÍTOL $2^{on.}$

L'ESPECTRE DE $H^{\infty} + L^{\infty}_E$:

L'estudi que farem a continuació de l'espectre de $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ està inspirat en el que fa Hoffman per H^{∞} ([11] , cap. 10), i es basa, principalment en la caracterització de les fibres i de les mesures representatives de caràcters. Aquest serà el nostre principal objectiu.

S'inclou també un apartat dedicat a l'estudi de la mesura de Lebesgue a l'espectre de L^{∞}_E . El motiu d'incloure's en aquest treball és la seva relació amb H^{∞}_E i amb les sumes de H^{∞} i subespais de L^{∞} tancats i invariants pel "Shift operator". La relació no serà posada de manifest aquí.

I - Introducció:

L'únic objecte d'aquest apartat és el de completar I, del primer capítol, en vistes als nostres propòsits La notació és una continuació de la que es feia allí.

Direm $Y = \mathrm{Sp}\, H^{\infty}$. LLavors, com que $z \in H^{\infty}$ i $\hat{z} : Y \longrightarrow \bar{D}$ és exhaustiva, direm $Y_{\alpha} = \hat{z}^{-1}(\alpha)$.

Tenim: $\forall \alpha \in D \quad \hat{z}^{-1}(\alpha) = \{\alpha\}$.

Totes les fibres $Y_{\alpha} \quad \alpha \in T$ són homeomorfes, i es pot definir:

$$W_1^- = \left\{ \chi \in Y \ : \ \mathrm{Im}\ \hat{z}\ (\chi) \geqslant 0 \right\}$$

$$W_1^+ = \left\{ \chi \in Y \ : \ \mathrm{Im}\ \hat{z}\ (\chi) \leqslant 0 \right\}$$

Resulta que $Y_1^+ = Y_1 \cap \overline{W}_1^+ \neq \emptyset$ $Y_1^- = Y_1 \cap \overline{W_1^-} \neq \emptyset$ i $Y_1^0 = Y_1 \setminus (Y_1^+ \cup Y_1^-) \neq \emptyset$ són disjunts i donen una descomposició de Y que val per qualsevol Y_α , $\alpha \in T$, (Redefinint tot mitjançant la corresponent translació.)

$X = \mathrm{Sp}\ L^\infty$ és la frontera de Shilov de H^∞ i es pot caracteritzar així el rang de les funcions sobre ella .

Si $f \in L^\infty$ $\quad \chi \in X_\alpha \quad \chi(f) = \zeta \iff \forall\ \varepsilon > 0,$ V_α (entorn de α a T) $\exists$ un conjunt de mesura positiva a V_α tal que $\left| f_{|V_\alpha} - \zeta \right| < \varepsilon$. A més $X_\alpha \subset Y_\alpha \quad \forall \alpha \in T$.

H^∞ és logmodular a X, per tant cada $\chi \in Y$ està representat per una única mesura a X, i si $\chi \in Y_\alpha$ sup $\mu \subset X_\alpha$.

$H^\infty + C = H^\infty + L_T^\infty$ (Veure Sarason [6] i Hoffman [11] cap. 10 per l'estudi d'aquesta àlgebra).

És un àlgebra tancada a L^∞ , i minimal entre les que contenen H^∞ .

El seu espectre: $\mathrm{Sp}\ H^\infty + C = Y_T = \bigcup_{\alpha \in T} Y_\alpha$

Tenim: $X \longrightarrow Y_T \longrightarrow Y$ immersions.

Finalment, tota funció interna és de mòdul 1 sobre X

<u>T.de Chang</u>: Si dues àlgebres entre H^∞ i L^∞ tenen el mateix espectre, i una d'elles és de Douglas, les àl-

gebres coincideixen.

II - L'espectre de $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ i propietats relacionades amb ell:

En primer lloc, tenim que

$H^{\infty} \longrightarrow H^{\infty} + C \hookrightarrow H^{\infty} + L^{\infty}_E \hookrightarrow L^{\infty}$ i, si $Z = Sp(H^{\infty} + L^{\infty}_E)$, és sabut que $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y_T \longrightarrow Y$ és una immersió per tant $X \longrightarrow Z$ es injectiva.

Proposició: L'aplicació $Z \longrightarrow Y$ és també injectiva.

Dem: Si $\phi, \phi' \in Z$ sòn tals que $\phi(f) = \phi'(f)$ $\forall f \in H^{\infty}$, es té que si $g \in H^{\infty} + L^{\infty}_E$, $\exists g_n \in H^{\infty}$, w_n productes de Blaschke contínus a E i tals que $g = \lim_{n\to\infty} g_n \bar{w}_n$

$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \phi(g_n \bar{w}_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(g_n) \overline{\phi(w_n)}$$

$$\phi'(g) = \lim_{n\to\infty} \phi'(g_n \bar{w}_n) = \lim_{n\to\infty} \phi'(g_n) \overline{\phi'(w_n)}$$ i la injectivitat és clara, c.v.d.

Per tant, com que $X \longrightarrow Y$ és una immersió, i $X \longrightarrow Z$ i $Z \longrightarrow Y$ injectives, és senzill veure que, tan $X \longrightarrow Z$ com $Z \longrightarrow Y$ són immersions.

També es dedueix que $\hat{z}: Z \longrightarrow T$ és exhaustiva, i que $Z \longrightarrow Y_T$ commuta amb la formació de fibres, és a dir: $\hat{z}^{-1}(\alpha) = Z_\alpha \subset Y_\alpha$.

Com que H^{∞} és logmodular a X, també ho és $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ i per tant, la frontera de Shilov de $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ es X, i a més, tot caràcter de Z està representat per una única mesura a X.

Passarem, tot seguit, a donar una descripció de les fibres Z_α .

<u>Proposició 2</u>: $Z_\alpha = Y_\alpha$ si $\alpha \in E$

$Z_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin \bar{E}$

<u>Dem</u>: $\forall \alpha \in T$, X_α és un conjunt de pic per $H^\infty + L^\infty_E$ (considerada com a àlgebra uniforme sobre X), ja que $f(z) = \frac{1}{2}(1 + \bar{\alpha} z)$ val 1 a X_α i $|f| < 1$ a $X \setminus X_\alpha$, o sigui que:

$$\frac{H^\infty + L^\infty_E}{\bigcap_{\chi \in X_\alpha} \operatorname{Ker} \chi} \simeq \widehat{H^\infty + L^\infty_{E}}_{|X_\alpha}$$, subàlgebra tancada de $\mathcal{C}(X_\alpha)$.

A més, si $\alpha \in E$ i $g \in L^\infty_E$ $g_{|X_\alpha} =$ ct. per tant $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|X_\alpha} = \widehat{H^\infty}_{|X_\alpha}$.

Si $\alpha \notin \bar{E}$, $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|X_\alpha} = \widehat{L^\infty}_{|X_\alpha} = \mathcal{C}(X_\alpha)$.

I com que $Sp\ \widehat{H^\infty}_{|X_\alpha} = Y_\alpha$ i $Sp\ \widehat{L^\infty}_{|X_\alpha} = X_\alpha$, tenim que $Z_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin \bar{E}$ i $Z_\alpha = Y_\alpha$ si $\alpha \in E$.

<u>Corol.lari</u>: Si E compacte $Z_\alpha = Y_\alpha$ $\forall \alpha \in E$, $Z_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin E$.

La dificultad principal per la caracterització total de Z resideix en les fibres corresponents als punts frontera de E i que no són de E. Hom pot pensar que si $\alpha \in \partial E \setminus E$, Z_α no és exactament Y_α sinó que es un reflex de les fibres situades a dreta i esquerra de α.

Veurem que així és exactament.

Sigui $\alpha \in \partial E \setminus E$. Suposarem, en primer lloc, que $E \neq T\setminus\{\alpha\}^{(1)}$. LLavors es pot trobar β en T, diferent de α.

Si diem φ_1 la funció característica d'un arc de T que uneix α amb β i φ_2 la del seu complementari, tindrem:

$\varphi_1\, \varphi_2 \in L_E^\infty$; $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ i $\varphi_1 . \varphi_2 = 0$, per tant $\forall \chi \in Z_\alpha$, $\chi(\varphi_1) = 0$ o bé $\chi(\varphi_1) = 1$.

Direm $Z_\alpha^+ = \hat{\varphi}_1^{-1}(0) \cap Z_\alpha = \hat{\varphi}_2^{-1}(1) \cap Z_\alpha$, i $Z_\alpha^- = \hat{\varphi}_1^{-1}(1) \cap Z_\alpha$.

Òbviament, tant Z_α^+ com Z_α^- són no buits, ja que el fet que φ_1 prengui tant el valor 0 com el valor 1 en conjunts de mesura positiva al voltant de α, fa que φ_1 prengui els valors 0 i 1, tots dos a X_α .

Direm també $X_\alpha^{+1} = \hat{\varphi}_1^{-1}(0) \cap X_\alpha$ i $X_\alpha^- = \hat{\varphi}_1^{-1}(1) \cap X_\alpha$

Òbviament $X_\alpha^+ \subset Z_\alpha^+$ i $X_\alpha^- \subset Z_\alpha^-$

<u>Proposició 3</u>: $Z_\alpha^+ \subset Y_\alpha^+$ i $Z_\alpha^- \subset Y_\alpha^-$

<u>Dem</u>: $Z_\alpha^- \subset \overline{(\mathfrak{X}^{-1}(E))}_Z \subset \overline{(\mathfrak{X}^{-1}(E))}_Y$ (ja que $Z \to Y$ es inmersió). Per tant $Z_\alpha^+ \subset \overline{W_\alpha^+} \Rightarrow Z_\alpha^+ \subset Y_\alpha^+$.

La demostració és idèntica per Z_α^- .

Cal observar, ara, que els elements de Y^0 mai estenen multiplicativament a $H^\infty + L_E^\infty$ excepte si $\alpha \in E$.

Finalment, passem a caracteritzar Z_α^+ i Z_α^- . No sempre és fàcil donar-ne una descripció, ja que depenen de la forma de E al voltant de α, com veurem seguidament

(1) Per $H^\infty + L_{T\setminus\{1\}}^\infty$ també és cert, com es veurà quan tractem aquest cas.

Estudiarem Z_α^- (l'estudi per l'altra es idèntic).

Proposició 4: Si $\exists \mathcal{E}>0 : (\alpha - \mathcal{E}, \alpha) \cap E = \emptyset$ (1) llavors $Z_\alpha^- = X_\alpha^-$.

Dem: Sigui $\chi \in Z_\alpha^+$. Vejem que esten multiplicativament a L^∞.

Com que $\forall f \in L^\infty$, $f\varphi_2 \in L_E^\infty$ (és 0 a E), podem posar $\tilde{\chi}(f) = \chi(f\varphi_2)$ $\forall f \in L^\infty$.

Si $f \in L_E^\infty$ $\tilde{\chi}(f) = \chi(f\varphi_2) = \chi(f).\chi(\varphi_2) = = \chi(f)$, ja que $\chi(\varphi_2) = 1$.

Pel mateix motiu, $\tilde{\chi} \neq 0$.

Òbviament $\tilde{\chi}$ és lineal i contínu, i com que φ_2 és idempotent, $\tilde{\chi}$ és multiplicatiu.

Proposició 5: Si $\exists \varepsilon > 0$ amb $(\alpha - \varepsilon, \alpha) \subset E$, llavors $Z_\alpha^- = Y_\alpha^-$.

Dem: Si $\exists\ \chi \in Y_\alpha^-$ tal que $\chi \notin Z_\alpha^-$, llavors $\chi \notin \mathfrak{z}^{-1}((\alpha - \varepsilon, \alpha)) \subset \mathfrak{z}^{-1}(E)$.

Per tant, existeix un entorn de χ, V_χ en Y tal que $V_\chi \cap \mathfrak{z}^{-1}(E) = \emptyset \Longrightarrow V_\chi \cap \bigcup_{\beta \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)} Y_\beta = \emptyset$ i si $\{\chi_\rho\}$ és una xarxa en W_α^- a la qual χ és adherent, (que podem considerar continguda a V_χ), es té que

$\{\chi_\rho\} \cap \mathfrak{z}^{-1}((\alpha - \varepsilon, \alpha)) = \emptyset \Longrightarrow \alpha \notin \mathfrak{z}(\{\chi_\rho\})$ i això contradiu el fet que χ sigui adherent a $\{\chi_\rho\}$.

En el cas que $E = T \sim \{\alpha\}$, tenim que X_α és, òbviament, un conjunt de pic per aquesta àlgebra. A més:

(1) $(\alpha - \mathcal{E}, \alpha) = (\alpha - e^{i\mathcal{E}}, \alpha)$ s'enten entorn per l'esquerra.

Proposició 6: Per un ε petit, tenim:

$$\widehat{H^{\infty} + L^{\infty}_{T\setminus\{\alpha\}}} \,\Big|\, X_{\alpha} = \widehat{H^{\infty} + L^{\infty}}_{[\alpha-\varepsilon,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\varepsilon]} \,\Big|\, X_{\alpha}$$

Dem: Com que $[\alpha-\varepsilon,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\varepsilon]$ és tancat a $T\setminus\{\alpha\}$, que és un espai topològic normal, el lema de Tietze ens permet de trobar extensions de les funcions contínues a $[\alpha-\varepsilon,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\varepsilon]$ a funcions contínues a $T\setminus\{1\}$. L'altra inclusió és òbvia.

Teorema: $Z_{\alpha} = Y^{+}_{\alpha} \cup Y^{-}_{\alpha}$

Dem: Com es dedueix de la proposició 5 d'aquest capítol $\operatorname{Sp} H^{\infty} + L^{\infty}_{[\alpha-\varepsilon,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\varepsilon]} \cap \hat{z}^{-1}(\alpha) = Y^{+}_{\alpha} \cup Y^{-}_{\alpha}$.

I per la proposició anterior, es té la igualtat entre espectres.

Corol.lari 1 : Tota funció contínua i afitada a $(0,2\pi)$ es pot aproximar, uniformement a $L^{\infty}(T)$ per combinacions polinòmiques de funcions de $H^{\infty}(T)$ i funcions contínues a $[0,2\pi]$.

Dem: Si B és la subàlgebra de $L^{\infty}(T)$ generada per H^{∞} i les funcions contínues a $T\setminus\{1\}$ i amb límits laterals a 1, és fàcil de veure (fent servir conjunts de pic) que el seu espectre és precisament, $\bigcup_{\alpha \in T\setminus\{1\}} Y_{\alpha} \cup Y^{+}_{1} \cup Y^{-}_{1}$, que coincideix amb l'espectre de $H^{\infty} + L^{\infty}_{T\setminus\{1\}}$, (Veure,per exemple, Sarason [4]).

Pel teorema de Chang (enunciat en la introducció), les àlgebres coincideixen, perquè són àlgebres de Douglas i tenen el mateix espectre.

Corol.lari 2 : Si b és un producte de Blaschke continu a $T\setminus\{\alpha\}$, b no pot valer 0 a Y_α^+ ni tampoc a Y_α^-

Dem: Es desprén òbviament del que hem dit.

És clar que els únics caràcters on un producte de Blaschke continu a E pot valer 0 són els de Y_α^0 .

Com a cas més general, si $\alpha\in\partial E\setminus E$ no compleix el requisit de la proposició 5, és a dir: Si $\exists\alpha_n\in E$: $\alpha_n\longrightarrow\alpha^-$, però també existeix $\beta_n\longrightarrow\alpha^-$, $\beta_n\in E^c$, llavors Z_α^- és un conjunt intermedientre X_α^- i Y_α^- en el sentit següent:

Proposició: Sigui $\alpha\in\partial E\setminus E$.

a) Si $\exists\alpha_n\in E:\alpha_n\longrightarrow\alpha$ per l'esquerra,llavors $X_\alpha^-\subsetneq Z_\alpha^-$.

b) Si $\exists\beta_n\in E^c:\beta_n\longrightarrow\alpha$ per l'esquerra,llavors $Z_\alpha^-\subsetneq Y_\alpha^-$.

Dem: a) Es pot trobar un producte de Blaschke b tal que els seus zeros s'acumulen $\alpha_n\ \forall n$

LLavors $\hat{b}^{-1}(0)\cap\overline{\hat{z}^{-1}(\{\alpha_n\})}\neq\emptyset$, es projecta, per $\hat{z}$, a $\{\alpha_n\}\cup\{\alpha\}$, per tant, $\exists\chi\in Z_\alpha$ adherent a $\hat{z}^{-1}\{\alpha_n\}$ i tal que $\hat{b}(\chi)=0$. Aquest χ és de Z_α^- , i no pot ésser de X_α^- ja que $|\hat{b}|_{|X_\alpha}=1$.

b) Si $\exists\beta_n\in E^c$ amb $\beta_n\longrightarrow\alpha$ per l'esquerra, es té que $\exists\chi\in Z_\alpha^-\setminus X_\alpha^-$, b producte de Blaschke amb zeros que s'acumulen exclusivament a $\{\beta_n\}\cup\{\alpha\}$, i tal que $\chi(b)=0$

O sigui que b és continu a E (o sigui invertible a $H^\infty + L^\infty_E$) i $\exists\, \chi \in Y^-_\alpha - X^-_\alpha$: $\chi(b) = 0 \Longrightarrow \chi \notin Z^-_\alpha$.

Per tant $Y^-_\alpha \supsetneq Z^-_\alpha$.

Nota: Un resultat aparegut al llarg d'aquest estudi com a conseqüència d'una qüestió marginal relacionada amb el que s'ha fet és el següent:

Sigui $\mathcal{C}^b(0,1)$ el conjunt de les funcions contínues acotades a $(0,1)$.

El seu espectre, $\mathcal{M}$ és connex i es composa de fibres situades sobre cada punt de $[0,1]$ i amb $\mathcal{M}_x = \{x\}$, si $x \in (0,1)$.

A més $(0,1)$ és dens a $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}_1$ és la fibra de $\mathcal{C}^b(0,1)$ al punt 1, i X_1 és la fibra de $L^\infty([0,1], dx)$ en el punt 1, és clar que $X_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha$ és exhaustiva. No obstant, no és injectiva.

Si ho fos, en ésser $\mathcal{M}_\alpha$ compacte, l'aplicació $X_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha$ seria un homeomorfisme, o sigui que en $\mathcal{M}_\alpha$ hi hauria conjunts oberts i tancats, i per tant, la funció característica d'un d'ells, (posem φ) prendria només els valors 0 i 1 a $\mathcal{M}_\alpha$, o sigui que existiria $f \in \mathcal{C}^b(0,1)$ que només prendría els valors 0 i 1 a $\mathcal{M}_\alpha$.

És a dir que hi hauria dos oberts de $\mathcal{M}_\alpha$, disjunts i de manera que en un d'ells f seria més petit que ε i en l'altre més gran que $1 - \varepsilon$.

Com que els dos oberts estàn centrats en punts de $\mathcal{M}_\alpha$ si existissin, tallarien a $[0,1]$ en entorns de 1. En els punts de intersecció f pendria sempre el valor 0 i el valor 1 a la vegada. Absurd.

III - Mesures representatives de caràcters

Finalment, dedicarem una mirada a les mesures representatives de caràcters.

La caracterització que donarem, reforça la idea que la fibra Z_α^- (si α és adherent a E per l'esquerra) depèn essencialment de la forma de E, en relacionar les mesures representatives dels caràcters de $H^\infty + L_E^\infty$ amb la fibra de L_E^∞ a α (Més concretament $(X^E)_\alpha^-$, que coincideix amb la fibra de $\mathcal{C}^b$ (E) a α).

Com ja és sabut, si $\chi \in Y_\alpha$ i μ és l'única mesura sobre X que el representa, llavors $\operatorname{sup}\mu \subset X_\alpha$.

Més precisament:

<u>Lema</u>: Si $\chi \in Y_\alpha$, $\chi \in Y_\alpha^+$ si i només si $\operatorname{sup}\mu \subset X_\alpha^+$ (I el mateix per Y_α^-) .

<u>Dem:</u> Com ja s'ha vist, l'espectre de $\widehat{H^\infty + L^\infty_{T\sim\{\alpha\}}}\big|_{X_\alpha^+}$ és Y_α^+ , i la seva frontera de Shilov X_α^+ .

Si $\chi \in Y_\alpha^+$, χ és un caràcter sobre $\widehat{H^\infty + L^\infty_{T\sim\{1\}}}\big|_{X_\alpha^+}$ i està representat per una mesura μ, suportada per X_α^+ .

A més, per a tota funció f de H^∞ $\chi(f) = \chi(\hat{f}_{|X_\alpha^+}) = \int_{X_\alpha^+} \hat{f}\, d\mu$.

O sigui que, com que la mesura representativa és única, $\mu = \nu$.

Al revés, si sup $\mu \subset X_\alpha^+$, estén a $\widehat{H^\infty + L_{T\setminus\{\alpha\}}}|_{X_\alpha^+}$ i per tant, és de Y_α^+.

Corol.lari: Si $\chi \in Y_\alpha^0$, sup $\mu \cap X_\alpha^+ \neq \emptyset$ i sup $\mu \cap X_\alpha^- \neq \emptyset$.

Com ja hem dit, $H^\infty + L_E^\infty$ és logmodular a X, i per tant, cada caràcter de $H^\infty + L_E^\infty$ està representat per una única mesura sobre X, que, evidentment, coincideix amb la que representa la restricció del dit caràcter a H^∞.

A més, l'aplicació τ : Sp $L^\infty \longrightarrow$ Sp L_E^∞ és exhaustiva, i també Sp $H^\infty + L_E^\infty \longrightarrow$ Sp L_E^∞, i aixo suggereix:

Teorema: Si $\chi \in Y$ i $\mu \in \mathcal{M}(X)$ representa χ, llavors χ estén a $H^\infty + L_E^\infty$ sí i només si sup $\mu \subset \{\phi \in X : \tau(\phi) = \chi\}$.

Dem: Si sup $\mu \subset \{\phi \in X : \tau(\phi) = \chi\}$, llavors estén multiplicativament a $H^\infty + L_E^\infty$:

Si $f \in H^\infty$, $g \in L_E^\infty$, com que si $\tau(\phi) = \chi \Longrightarrow \phi(g) = \chi(g)$: $\chi(f.g) = \int_{\sup\mu} \hat{f}.\hat{g}\, d\mu = \int_{\sup\mu} \chi(g)\, \hat{f}\, d\mu = \chi(g) \int \hat{f}\, d\mu = \chi(g)\cdot\chi(f)$.

Ara, si $\chi \in X^E$ es pot prendre $f \in L_E^\infty$, real, : $\hat{f}(\chi) = 1$ i f estrictament més petita a $X^E \setminus \{\chi\}$.

Aquesta funció fa de $\tau^{-1}(\chi)$ un conjunt de pic per $H^\infty + L_E^\infty$, o sigui que $\widehat{H^\infty + L_E^\infty}|_{\tau^{-1}(\chi)}$ és una subàlgebra tancada de $\widehat{L^\infty}|_{\tau^{-1}(\chi)}$, que, com que $\widehat{L_E^\infty}|_{\tau^{-1}(\chi)} = \mathbb{C}$, tenim que $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{\tau^{-1}(\chi)} = \widehat{H^\infty}_{\tau^{-1}(\chi)}$, i la seva frontera de Shilov és $\tau^{-1}(\chi)$.

Si χ és un caràcter de H^∞ que estén a $H^\infty + L^\infty_E$, hi ha un $\lambda \in \mathfrak{M}^E$: χ no és idènticament 0 a $\mathcal{C}(\tau^{-1}(\lambda))$ (ja que la reunió dels $\tau^{-1}(\lambda)$ recobreix X), per tant χ és de Sp $\widehat{H^\infty}_{|\tau^{-1}(\lambda)}$, i per tant hi ha una mesura suportada per $\tau^{-1}(\lambda)$ que el representa. Per unicitat, sup $\mu \subset \tau^{-1}(\lambda)$.

Cal fer notar també que, si $\alpha \in \bar{E}$, $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|X_\alpha}$ no és de Dirichlet, ja que sinó, Sp $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|X_\alpha}$ seria X_α i ja hem vist que no és veritat.

Per tant, es poden trobar mesures reals i diferents de la mesura 0 a X_α , ortogonals a $\widehat{H^\infty + L^\infty_E}_{|X_\alpha}$.

<u>IV - La mesura de Lebesgue a L^∞_E :</u>

A manera d'apèndix farem algunes consideracions sobre la mesura de Lebesgue a X^E .

Si $f \in L^\infty_E$ l'aplicació: $L^\infty_E \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f \longrightarrow f\ (0) =$$

$$= \int_0^2 P_r\ (0 - t)\ f(t)\ dm\ (t) = \int_{\mathbb{T}} f\ dm$$ és una forma lineal contínua i positiva, o sigui que pel teorema de representació de Riesz, existeix $\nu_E \in \mathcal{M}^+(X^E)$ tal que $f\ (0) = \int_{X^E} \hat{f}\ d\,\nu_E$. El mateix teorema de Riesz ens diu que ν_E és única.

De ν_E se'n diu la <u>mesura de Lebesgue de X^E</u>.

<u>Proposició</u>: El suport de ν_E interseca totes les fibres de X^E .

<u>Dem:</u> Si $\exists\, \alpha \in T$: $\sup\mu \cap (X^E)_\alpha = \emptyset$, llavors hi ha un entorn de $(X^E)_\alpha$, posem V , que no talla el suport de μ, i es pot trobar $f \in L^\infty_E$ que valgui 1 a $(X^E)_\alpha$ i 0 fora de V .

Com que $\hat{f}_{|\sup \nu_E} \equiv 0$, $\int_{X^E} \hat{f}\, d\nu_E = 0 \Longrightarrow$ $\Rightarrow \int_T f\, dm = 0$. Això és fals, ja que $\hat{f}_{|(X^E)_\alpha} \equiv 1$ implica $\hat{f}_{|X_\alpha} \equiv 1$ i per tant hi ha conjunts de mesura positiva a T en els quals f està afitada inferiorment (gràcies a la descripció que tenim a 2-I dels caràcters de L^∞).

<u>Proposició</u>: Les fibres són de mesura ν_E nul·la,

<u>Dem:</u> $\forall \alpha \in T$, és senzill de veure que la funció característica de $(X^E)_\alpha$, φ, (que és ν_E -integrable) és límit puntual de les funcions φ_r que valen 1 a un entorn de α a T i 0 a la resta, funcions que són de L^∞ , i per tant ν_E - integrables i es té (t. de la convergència dominada):

$$\int_{X^E} \varphi \; d\nu_E = \lim_r \int_{X^E} \varphi_r \; d\nu_E = \lim_r \int_T \varphi_r \; dm =$$
$$= \int_T \lim_r \varphi_r \quad dm = 0.$$

El que venen a dir aquestes dues proposicions, és que el comportament de ν_E respecte de les fibres de X^E

és el mateix que el de $\mathfrak{m}$ respecte dels punts de T.

El següent resultat acaba d'arrodonir aquesta afirmació .

Proposició: La restricció de ν_E a E coincideix amb la restricció de m a E.

Dem: Si f es contínua a E i amb suport compacte f es pot estendre contínuament per zeros a tot T, i resulta que

$$\int_{\sup \nu_E} \hat{f}\, d\,\nu_E = \int_{X^E} \hat{f}\, d\,\nu_E = \int_T f\, dm = \int_E f\, dm.$$

De la mateixa manera com hem construït ν_E com a representant de $ev_0 \in (L_E^\infty)'$, per a cada $z \in D$ es pot definir una mesura (també única) sobre X^E que representi l' evaluació de $f \in L_E^\infty$ al punt, z,

La mesura que en resulta és absolutament contínua respecte de ν_E, ja que si $f \in L_E^\infty$:

$$\int_{X^E} \hat{f}\, d\mu_z = P[f](z) = \int P_z f\, dm = \int \hat{P}_z \hat{f}\, d\nu_E \text{ , o}$$

sigui que $d\mu_z = \widehat{P}_z\, d\nu_E$. (P_z vol dir,ací, el nucli de Poisson pel punt z. És continu a T).

Com a última qüestió, veurem que, malgrat que ν_E és única i es comporta com m a E i de forma "semblant" a $T \setminus E$, no és l' única mesura sobre X^E que a T es comporta com m:

$$\text{Tenim } \hat{z} : X^E \longrightarrow T \text{ que indueix: } \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathcal{C}(X^E)$$
$$\chi \longmapsto \hat{z}(\chi) \qquad\qquad f \longmapsto f \circ \hat{z}$$

i es té $\hat{z} : \mathcal{M}(X^E) \longrightarrow \mathcal{M}(T)$

$$\mu \longrightarrow \int f \circ \hat{z} \, d\mu = \hat{z}(\mu)(f)$$

<u>Proposició:</u> $\hat{z} : \mathcal{M}(X^E) \longrightarrow \mathcal{M}(T)$ no és injectiva

<u>Dem:</u> És obvi que si $E \neq T$, $\overline{(\mathcal{C}(T))}_{\|\|_\infty} \neq$ $\neq L^\infty_E(T)$, o sigui que $\exists f \in L^\infty_E(T)$, $r > 0$ amb $B^{\infty}_r(f) \cap \mathcal{C}(T) = \emptyset$.

El t. de Hahn-Banach assegura l'existència de $\omega \in (L^\infty_E)'$ tal que $\omega(f) = 1$ i $\omega \perp \mathcal{C}(T)$.

O sigui que $\exists \mu \in \mathcal{M}(X^E)$ tal que $\mu \neq 0$ i $\mu \perp \mathcal{C}(T)$.

BIBLIOGRAFIA

. [1] - H.Helson and D.Sarason "Past and Future" Math.Scand. 21 (1967) 5-16 M.R. 38# 5282

. [2] - R.G.Douglas "Toeplitz and Wienner-Hopf operators in $H^{\infty} + C$" Bull.Amer. Math.Soc 74 (1968) 895-899, M.R. 37# 4648.

. [3] - A.M.Davie, T.W. Gamelin and J.Garnett, "Distance estimates and pointwise bounded density" Trans.Amer. Math. Soc. 175 (1973) 37-68.

. [4] - D.Sarason "Aproximation of picewise continuons functions by quotients of bounded analytic functions" Can. J.Math.Vol XXIV, N° 4, 1972, p.p.642-657.

. [5] - R.G. Douglas and W.Rudin "Aproximation by inner functions" Pacific Journal of Mathematics.Vol.31 n°2 1969.

. [6] - D.Sarason "Algebras of functions on the unit circle". Bull.Amer.Math. Joc. Vol.73, n°2, March 1973 p.p.286-299.

. [7] - Sung-Yang A.Chang "A Characterization of Douglas subalgebras". Acta Math. 137 (1976) pp. 81-89.

. [8] - D.Marshall "Subalgebras of L^{∞} containing H^{∞}". Acta Math. 137 (1976) 91-98.

. [9] - Theodore W.Gamelin : Uniform Algebras, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs N.J.

. [10] - Gerald M.Leibowitz: Lectures on Complex Function Algebras. Scott. Foresmann and Cy. Glenview,Illinois 60025.

. [11] - K.Hoffman: Banach Spaces of Analytic Functions.Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs., N.J.

. [12] - A.Stray. "Aproximation and Interpolation" Pac.Journal of Mathematics. Vol.40 n°2 1972 Pag 463-475.

. [13] - W.Rudin: Real and complex analysis Mcgraw-Hill.

. [14] - I.Suciu: Function algebras . Noordhoff. Int.Publishing. Leyden 1975.

. [15] - W.Rudin. Functional Analysis Mc.Graw-Hill.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autónoma de Barcelona
Desembre de 1978.