

UNA NOTA SOBRE

DUALIDAD DE KÖTHE Y FUNCIONES REPRESENTADAS POR SERIES
DE DIRICHLET

J. Prada Blanco

INTRODUCCION. En este trabajo, probamos que es posible identificar ciertos espacios de sucesiones asociadas a series de Dirichlet (con la topología normal) con determinados espacios de funciones holomorfas representadas por dichas series (con la topología compacto-abierta).

Como en [VI] y [VII] consideremos los espacios siguientes

$$H(\mathcal{R}_r) = \{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, z \in \mathcal{R}_r, (a_n) \in H(r), r \in \mathbb{R} \}$$

$$H(\mathbb{C}) = \{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, z \in \mathbb{C}, (a_n) \in H(-\infty) \}$$

siendo $\mathcal{R}_r = \{ z \in \mathbb{C} : \text{parte real de } z > r \}$,

$$H(r) = \{ (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n r'} < \infty, r' > r \}$$

$$H(-\infty) = \{ (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n r'} < \infty, r' \in \mathbb{R} \}$$

y λ_n una sucesión de números reales estrictamente creciente y tendiendo a infinito ($\lambda_0 > 0$).

$H(\mathcal{D}_p)$ (respectivamente $H(C)$) con la topología T definida por las seminormas $h_p(f(z)) = \sup \{|f(z)|, z = a+ib, a \geq p > r, b \in \mathbb{R}\}$ (respectivamente $p \in \mathbb{R}$) se identifica con $H(r)$ (respectivamente $H(-\infty)$) con la topología definida por las seminormas $h_p(a_n) = \sup\{|a_n| e^{-\lambda_n p}, n \in \mathbb{N}\}, p > r$ (respectivamente $p \in \mathbb{R}$), cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n/n > 0$ (finito o no) [VI y VII]. Veremos que en ciertos casos la topología compacto-abierta en $H(\mathcal{D}_p)$ (análogamente en $H(C)$) es la misma que la topología T ; por tanto, en esos casos $H(r)$ (respectivamente $H(-\infty)$) con la topología normal se identifica con $H(\mathcal{D}_p)$ (respectivamente $H(C)$) con la topología compacto-abierta.

NOTACIONES

$$D = \begin{cases} \overline{\lim} n/\lambda_n, n \geq 0, \lambda_0 > 0, \\ \overline{\lim} n/\lambda_n, n \geq 1, \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

$N(x) =$ número de λ_n tal que $\lambda_n < x, (x > 0)$. $\tilde{D}(x) = N(x)/x$.

$$\bar{D}(x) = (1/x) \int_0^x \tilde{D}(y) dy, \quad x > 0. \quad \bar{D} = \overline{\lim} \tilde{D}(x).$$

$$P_n = \begin{cases} \int_{\frac{m}{\lambda_n} > 0}^{\infty} |\lambda_n^2 - \lambda_m^2| / \lambda_m^2, n \geq 0, \lambda_0 > 0, \\ \int_{\frac{m}{\lambda_n} > 1}^{\infty} |\lambda_n^2 - \lambda_m^2| / \lambda_m^2, n \geq 1, \lambda_0 = 0. \end{cases} \quad \Lambda_n = \begin{cases} P_n^{-1}, n \geq 0, \lambda_0 > 0, \\ P_n^{-1}, n \geq 1, \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

1. Una desigualdad fundamental

Teorema 1. Sean $\lambda_0 > 0, 0 \leq D < \infty, z_0 \in \mathcal{R}$ (con su parte imaginaria igual a cero), $R > \bar{D}$ con $\overline{D(z_0, R)}$ contenido en \mathcal{R} y f un elemento de $H(\mathcal{R})$. Entonces

$|a_n| \leq AM(z_0) \Lambda_n e^{\lambda_n z_0}, n \geq 0$, donde A es una constante que sólo depende de R y $M(z_0) = \sup\{|f(z)|, z \in \overline{D(z_0, R)}\}$.

Sean $\lambda_0 = 0, z_0 \in \mathcal{R}$ (con su parte imaginaria igual a cero) y f un elemento de $H(\mathcal{R})$. Si $D = 0$ v R tal que $0 < R < 1$ con $\overline{D(z_0, R)}$ contenido en \mathcal{R} , entonces $|a_0| \leq AM(z_0)$

y $|a_n| \leq AM(z_0) e^{\lambda_n z_0} \lambda_n^{-1} \Lambda_n, n \geq 1$. Si D es tal que $0 < D < \infty$ y $R > \bar{D}$ con $\overline{D(z_0, R)}$ contenido en \mathcal{R} , entonces $|a_0| \leq ARM(z_0)$

y $|a_n| \leq AM(z_0) e^{\lambda_n z_0} \lambda_n^{-1} \Lambda_n, n \geq 1$. En ambos casos, A es una constante que sólo depende de R .

Demostración. Vease III, pag. 26 (caso particular $C(s_0, \pi R) = C(L, \pi R), s_0 = z_0$). Cuando $\lambda_0 = 0$, las funciones $\Lambda_n(z), n \geq 0$, son las siguientes:

$$\Lambda_0(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_m^2), \quad \Lambda_n(z) = z \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_m^2), n \geq 1$$

$$\text{y } A(z) = z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_m^2).$$

Nota. Si tomamos $f \in H(C)$, obtenemos los mismos resultados.

2. En este apartado damos los resultados del trabajo.

Teorema 2. Sean $D=0, \lambda_0 \geq 0$ y λ_n tal que $\lim \lambda_n / \Lambda_n > 0$ (finito o no). Entonces, en $H(\mathcal{R}_0)$ la topología compactoabierta es igual a la topología T.

Demostración. Tenemos que ver que la topología compactoabierta es más fina que la topología T.

Sea $V = \{ f(z) \in H(\mathcal{R}_0) : \sup |f(z)| \leq \varepsilon, z = a + ib, a \geq p > r, b \in \mathbb{R} \}$

Consideremos $r < z_0 < p_1 < p$ y $R > 0$ tal que $\overline{D(z_0, R)}$ contenido en \mathcal{R}_0 ; tomemos V' tal que

$V' = \{ f(z) : f(z) \in H(\mathcal{R}_0) : \sup |f(z)| \leq \varepsilon', z \in \overline{D(z_0, R)} \}$ siendo $\varepsilon' \leq \varepsilon_1 A^{-1} e^{\lambda_n(p_1 - z_0) / \Lambda_n}, n \geq 0$ y $\varepsilon_1 \leq \varepsilon / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(p - p_1)}$

si $\lambda_0 > 0$. Si $\lambda_0 = 0$ tomamos R tal que $0 < R < 1$ y ε_1 de la misma forma, siendo $\varepsilon' < (\varepsilon_1 / A, \varepsilon_1 A^{-1} e^{\lambda_n(p_1 - z_0) / \Lambda_n}, n \geq 1)$.

Nota. Si $h = \lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, tenemos $\lim \lambda_n / \Lambda_n = \infty$, con lo que estamos en las condiciones del teorema anterior.

Teorema 3. Sean D tal que $0 \leq D < \infty, \lambda_0 \geq 0$ y λ_n tal que $\lim \lambda_n / \Lambda_n > 0$ (finito o no). Entonces, en $H(\mathbb{C})$ la topología compactoabierta es igual a la topología T.

Demostración. Es similar a la anterior.

Nota. No podemos aplicar el mismo método en $H(\mathcal{R}_0)$ cuando D es tal que $0 < D < \infty$. De hecho, dado $p > r$ tal que $p - r < \bar{D}$, no es posible encontrar $r < z_0 < p_1 < p$ tal que $\overline{D(z_0, R)}$ esté contenido en \mathcal{R}_0 , siendo $R > \bar{D}$.

BIBLIOGRAFIA

- I.-KÖTHER, G. "Topological Vector Spaces I". Springer-Verlag. Berlín. Heidelberg. New York. 1969.
- II.-MANDELBROJT, S. "Sur les séries de Dirichlet dont les exposants possèdent quelques propriétés arithmétiques". Bull. Soc. Math. de France t, 60. 1932.
- III.-MANDELBROJT, S. "Séries de Dirichlet. Principes et méthodes". Gauthiers-Villars. 1969.
- IV.-MANDELBROJT, S. "Séries adhérentes. Régularisations des suites. Applications". Gauthiers-Villars. 1952.
- V.-PIETSCH, A. "Nuclear Locally Convex Spaces". Springer-Verlag. Berlín. Heidelberg. New York. 1972.
- VI.-PRADA BLANCO, J. "Series de Dirichlet consideradas como espacios de sucesiones". Collectanea Mathematica, volumen XXVIII, 63-94. 1977.
- VII.-PRADA BLANCO, J. "Espacios de Köthe y series de Dirichlet". Publicacions de la Secció de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona, número 6, 79-95. 1977.