Publ. Mat. U.A.B.
nº 6 des. 1977

ACERCA DE ALGUNAS VERSIONES CLASICAS DEL TEOREMA DE RIEMANN-ROCH.

E. Casas Alvero.

1.- La versión original de Riemann.

Conviene recordar en primer lugar que, en el lenguaje clásico, una función algebraica $y(x)$ de una variable compleja x, es una función multiforme cuyos valores se obtienen, para cada x, resolviendo una ecuación algebraica $P(x,y) = 0$; la función se dice irreducible si lo es el polinomio P.

Las funciones algebraicas y sus integrales (integrales abelianas) ocuparon a numerosos analistas, entre ellos Abel, Jacobi, Weierstrass y Riemann, a lo largo del pasado siglo. Riemann, en su conocida memoria de 1857 (1), sobre la teoría de las funciones abelianas, introduce nuevas y fecundas ideas sobre el tema; en particular, por lo que nos ocupa, a partir de una función algebraica irreducible $y(x)$ (definida por $P(x,y)=0$) a la que asocia la correspondiente superficie de Riemann T, considera las que llama "funciones del mismo tipo de ramificación de $y(x)$", que son las funciones algebraicas que resultan uniformes consideradas como funciones del punto de T: resultan ser de la forma $R(x,y(x))$ donde R es una expresión racional en x,y. Se ocupa Riemann en la determinación de las funciones algebraicas del mismo tipo de ramificación de $y(x)$ que son finitas en todo punto de T salvo en n puntos prefijados en los que se les admite un polo simple. En la expresión general de tales funciones figuran linealmente un cierto número, s, de parámetros y se verifica la desigualdad

---

(1) Theorie der Abelschen Functionen. J.f. Math. 1857.

$$s \geq n - p + 1$$

donde p es el género (topológico) de la superficie de Riemann T. Esta desigualdad, aportación de Riemann al teorema de Riemann-Roch, es igualdad, como veremos más adelante, salvo para determinados casos excepcionales. En 1865, Roch, alumno de Riemann, completa el teorema evaluando la diferencia $s-(n - p + 1)$ por medio de las integrales abelianas de primera especie (i.e., finitas en todo punto) de la superficie T.

Es importante señalar el punto de vista de Riemann acerca del teorema: para Riemann el teorema es relativo, más que a la función algebraica $y(x)$ (o a la relación $P(x,y) = 0$), a toda una clase de funciones de mismo tipo de ramificación de la que $y(x)$ es tan solo un representante: la clase de las funciones algebraicas uniformes sobre T. De este modo, la ecuación $P(x,y) = 0$, que daba lugar a la función $y(x)$, y por consiguiente a la clase de funciones, puede sustituirse por otra, $P_1(x_1,y_1) = 0$, deducida de la anterior por una sustitución racional de las variables, $x = x(x_1,y_1)$, $y = y(x_1,y_1)$ de manera que $P(x,y) = 0$ se deduzca también de esta última por otra sustitución racional, $x_1 = x_1(x,y)$, $y_1 = y_1(x,y)$, sin que se vea alterada la clase de funciones objeto del teorema. Se dice que las ecuaciones algebraicas así obtenidas están en una misma clase, clase de la que cualquier ecuación individúa la misma clase de funciones del mismo tipo de ramificación: es el llamado punto de vista intrínseco o de la equivalencia birracional, que se revelará de extraordinaria importancia en el posterior desarrollo de la geometría algebraica.

2.- La versión de Brill y Noether.

Las versiones algebraicas de la teoría de Riemann no tardaron en aparecer, en dos memorias fundamentales: la primera de Brill y Noether (1873) (2) y la segunda de Dedekind y Weber (1880) (3); en ambas, desde diversos puntos de vista, se establecen los principales resultados de la geometría sobre una curva. Brill y Noether emplean un tratamiento algebro-geométrico que fue continuado y perfeccionado por la escuela italiana de geometría algebraica, por obra entre otros, de C. Segre, Castelnuovo, Bertini, Enriques y Severi. El tratamiento de Dedekind- Weber, al que no nos referiremos aquí, es de tipo más aritmético, en un orden de ideas muy próximo a lo que hoy entendemos por álgebra abstracta.

La teoría de Brill - Noether parte de la consideración de la curva algebraica plana irreducible de ecuación $P(x,y) = 0$ (4) cuyo punto genérico tendrá por coordenadas $(x,y(x))$. De acuerdo con las observaciones de Riemann, debe considerarse no sólo esta curva, sino la clase de todas las que se obtienen de ella por una sustitución racional y racionalmente invertible de las coordenadas: desde el punto de vista intrínseco se dice que la clase constituye una única curva de la que cada representante es un modelo proyectivo.

---

(2) Math. Annal.,7, 259.

(3) J. für Math. 92, 181.

(4) Desde luego la curva se considera en el plano proyectivo complejo; ello no obsta para que sigamos utilizando, por simplicidad, coordenadas afines.

Un modelo $P(x,y) = 0$ dela curva onsiderada puede (y en ocasiones debe) presentar puntos múltiples, puntos en los que cualquier recta del haz que determinan absorbe más de una intersección con el modelo. Tales puntos múltiples se consideran, desde el punto de vista intrínseco, como meros accidentes proyectivos del modelo utilizado ya que aparecen como superposición de puntos simples de otros modelos. Eligiendo convenientemente el modelo, éste no presenta más puntos múltiples que un número finito de nodos (puntos dobles con un par de tangentes distintas en cada uno de ellos)[5].

La noción fundamental en la teoría de Brill y Noether es la de serie lineal. Supongamos fijado un modelo $P(x,y) = 0$ y consideremos un haz de curvas $f + \lambda g = 0$ de las que ninguna contenga a $P(x,y) = 0$ como parte. Los grupos de puntos en los que las curvas del haz cortan a nuestro modelo se dice que constituyen una serie lineal simplemente infinita (i.e., de dimensión uno). Por el teorema de Bezout, el número de puntos de cada grupo de la serie (contados con la multiplicidad con que aparecen en la intersección) es constante, sea n: se emplea la notación g_n^1 para designar la serie lineal. Puede ocurrir que algunos de los puntos base del haz (i.e., puntos comunes a todas las curvas del haz) caiga sobre el modelo; en este caso tales puntos aparecen como fijos en todos los grupos de la serie y se conviene en admitir la posibilidad de excluir parte o la totalidad de dichos puntos fijos al definir la serie lineal g_n^1 (de este modo un mismo haz determina distintas g_n^1 según los puntos fijos que se convenga en excluir). Los

(5) La consideración de modelos no planos permite eliminar totalmente los puntos múltiples.

grupos de una g_n^1 vienen dados pues por las intersecciones del modelo con las curvas de un haz tras la exclusión de parte o la totalidad de puntos base del haz que caigan sobre el modelo.(6)

Se dice que dos grupos de puntos son linealmente equivalentes cuando ambos pueden formar parte de una misma g_n^1; obviamente para ello es necesario (y en general no suficiente) que consten del mismo número de puntos.

Repitiendo las consideraciones que llevan a la definición de una g_n^1, partiendo ahora de un sistema lineal de curvas de dimensión r, $f_0+\lambda_1 f_1+ \cdots + \lambda_r f_r = 0$ ninguna de las cuales contenga a $P(x,y) = 0$, se obtiene la definición de serie lineal de dimensión r, g_n^r . Los grupos de puntos se consideran como series de dimensión cero, g_n^0.

Una serie lineal g_n^r se dice completa si no es susceptible de ampliación a una g_n^{r+1} ; en tal caso cualquier grupo de la serie la determina como el conjunto de grupos de puntos linealmente equivalentes al dado(es obvio que todos los grupos de puntos de una g_n^r, completa o no, son linealmente equivalentes entre sí). Es de señalar el carácter intrínseco de las nociones introducidas hasta aquí: los correspondientes de los grupos de una g_n^r forman también, sobre cualquier otro modelo, una g_n^r que es completa si y sólo si lo es la inicial.

---

(6) La posibilidad de excluir dichos puntos base es fundamental: sin ello la noción de equivalencia lineal que ahora introduciremos queda sustancialmente alterada, perdiendo su carácter intrínseco (i.e., independiente del modelo).

En la versión de Brill-Noether, el teorema de Riemann-Roch determina la dimensión r de una serie lineal completa cualquiera g_n^r. Más adelante veremos como esta formulación equivale a la de Riemann y Roch.

Supongamos elegido un modelo proyectivo, $P(x,y) = 0$, de orden m, sin más singularidades que un número finito (posiblemente nulo) de nodos. Se llaman adjuntas de orden l a las curvas algebraicas, $\varphi_l(x,y) = 0$, de orden l, sujetas a contener todos los nodos de $P(x,y) = 0$: tales curvas forman obviamente un sistema lineal. El punto fundamental de la demostración de Brill-Noether lo constituye el llamado teorema del resto (Restsatz) que se enuncia de la siguiente forma:

Las curvas adjuntas de un orden dado, l, sujetas a pasar por un grupo de puntos G de $P(x,y) = 0$, cortan sobre la curva, fuera de G y los nodos, una serie lineal completa que no se ve modificada si se sustituye G por un grupo linealmente equivalente.

Como han señalado diversos autores, en al teorema del resto, enunciado de esta forma, se hallan dos afirmaciones de distinto caracter:

a) Una afirmación de carácter proyectivo, referida al modelo $P(x,y) = 0$, que permite la construcción de la serie lineal completa determinada por un grupo G: basta para ello considerar una adjunta de orden l, suficientemente elevada, que contenga a G; su intersección con el modelo, fuera de G y los nodos, será un segundo grupo G'; considerando ahora las adjuntas de orden l por G', éstas cortan, fuera de G' y los nodos, una serie lineal completa uno de cuyos grupos es G.

b) Una afirmación de carácter intrínseco que puede formularse de la siguiente manera: dado un grupo G y una serie lineal completa g_n^r, la parte variable de los grupos de la g_n^r que contiene a G constituye una serie lineal completa que no varía si se sustituye G por otro grupo linealmente equivalente. Dicha serie, que sólo tiene existencia efectiva si algún grupo de la g_n^r contiene a G, es la denominada diferencia entre la g_n^r y la serie lineal completa determinada por G.

Especial importancia tiene la serie lineal cortada (fuera de los nodos) por las adjuntas de orden m-3, donde m es el orden de P(x,y) = 0. Dicha serie, completa por el teorema del resto, se denomina serie canónica y tiene carácter intrínseco (es decir, la serie canónica definida a partir de otro modelo dotado sólo de nodos, a través de las correspondientes adjuntas, es la misma).

El cálculo de la dimensión de una g_n^r completa se reconduce, por el teorema del resto, al de la dimensión de una serie cortada por adjuntas y se obtiene, en primer lugar

$$r \geq n - p$$

donde p, que en la versión de Riemann era el género topológico de T, es el llamado género de la curva y admite distintas definiciones en el marco de la teoría de Brill-Noether: puede tomarse p-1 como la dimensión dela serie canónica, 2p-2 como el número de puntos de un grupo de la serie canónica o , con Weierstrass y Severi, p + 1 es el mínimo número de puntos que fijados arbitrariamente, determinan una serie lineal completa de dimensión no nula[7].

(7) De la segunda definición del género resulta fácilmente la igualdad $p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d$ donde d es el número de nodos.

La series g_n^r para las que $r > n-p$ se denominan especiales; se prueba que las series especiales son las que tienen sus grupos contenidos en grupos de la serie canónica y que, si G es un grupo de una serie especial completa g_n^r, tomando i como el número de grupos de la serie canónica linealmente independientes que contienen a G, resulta

$$r = n - p + i.$$

Obviamente para series no especiales se toma $i = 0$ y la igualdad anterior, válida en cualquier caso, es el teorema de Riemann-Roch en la versión de Brill-Noether.

A i se le llama índice de especialidad de la serie: obsérvese que por definición $i-1$ es la dimensión de la serie diferencia entre la canónica y la g_n^r, entendiendo, para series no especiales, que la dimensión de una serie inexistente es -1. Se advierte inmediatamente que, al ser la serie canónica una g_{2p-2}^{p-1}, cualquier g_n^r con $n > 2p-2$ o $r > p-1$ es necesariamente no especial.

3.-La conexión con la versión de Riemann.

Partiendo de un modelo cualquiera, $P(x,y) = 0$, se llaman funciones racionales del punto de la curva a las restricciones al modelo de las funciones racionales de x,y no idénticamente infinitas sobre el modelo. Tales funciones forman un cuerpo, independiente del modelo elegido; dicho cuerpo no es más que la clase de funciones de mismo tipo de ramificación considerada por Riemann a partir de la función algebraica y(x) definida por $P(x,y) = 0$.

Si se considera una serie lineal simplemente infinita g_n^1, cortada por el haz $f + \lambda g = 0$, sus grupos son los grupos de nivel constante de la función racional del punto de la curva $t = f/g$. Se observa que los puntos base del haz $f + \lambda g = 0$ situados sobre el modelo son los puntos de indeterminación de t y como tales pueden considerarse o no incluidos en cada uno de los grupos de nivel, según se había advertido al definir las g_n^1. En particular el grupo de puntos cortado por $f = 0$ es el de nivel (8) cero y el cortado por $g = 0$ el de nivel infinito. Una sustitución homográfica, $t' = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, permite construir una nueva función racional cuyos grupos de nivel siguen siendo los de la g_n^1 inicial y cuyos grupos de niveles cero e infinito pueden elegirse arbitrariamente en la g_n^1. Se deduce que dos grupos de puntos son linealmente equivalentes si y sólo si son, respectivamente, los grupos de ceros y polos de una función racional del punto de la curva.

Fijado un grupo G de n puntos de la curva, éstos corresponden a n puntos de la superficie de Riemann T, y los ceros de las funciones que los tienen por polos simples describen una g_n^r completa. Teniendo en cuenta que los ceros y polos determinan la función salvo contante, el número de parámetros calculado en la versión de Riemann es $s = r + 1$. Si la g_n^r viene cortada por el sistema lineal $f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$, y suponemos que G viene cortado por $f_0 = 0$, la expresión general de las funciones con polos en G es

$$\frac{\lambda (f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r)}{f_0} = \mu_0 + \frac{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r}{f_0}$$

(8) Excluyendo o no, en ambos casos, los puntos de indeterminación.

Las adjuntas de orden m-3 se obtienen por derivación de las integrales abelianas de primera especie de T; en efecto, éstas tienen la forma

$$\int_0^x \frac{\varphi_{m-3}(x,y)}{P'_y}\, dx$$

donde $\varphi_{m-3}(x,y) = 0$ es una adjunta de orden m-3. De ahí y de la relación entre el género topológico de T y el número de integrales de primera especie, puede deducirse la coincidencia del género de Brill-Noether con el género topológico de T. Se observa también la relación entre las integrales abelianas de primera especie y la serie canónica; en particular aparece la relación entre el índice de especialidad de Brill-Noether y la determinación por Roch de la diferencia s-(n-p+1) en términos de integrales abelianas de primera especie.

4.- La extensión del teorema a superficie.

La extensión del teorema de Riemann-Roch a las superficies algebraicas (o a funciones algebraicas de dos variables) fue intentada por el propio Noether que en 1886 dió una demostración incompleta . Quiero exponer aquí la línea de la demostración de Noether, no sólo para evidenciar la admirable simplicidad del razonamiento sino porque tal razonamiento es la base de la primera demostración completa del teorema, conseguida por Castelnuovo en 1896-97 (9).

La curva algebraica se ve ahora sustituida por una superficie algebraica, P(x,y,z) = 0, del espacio, considerada también desde el punto de vista intrínseco, i.e., salvo sustituciones racionales y racionalmente invertibles de las variables.

(9) Memorie Scelte, XXII y XXIII.

Suele elegirse un modelo de la superficie cuyas singularidades se reducen a una curva nodal (doble) sobre la que se hallan un número finito de puntos triples, modelo que se obtiene por proyección genérica de un modelo no singular de un espacio de dimensión cinco.

Los sistemas lineales de curvas reemplazan a las series lineales: un sistema lineal de curvas viene cortado sobre la superficie por un sistema lineal de superficies del espacio, eventualmente suprimidas las partes fijas. Se tiene ahora una noción de equivalencia lineal entre curvas y, al igual que para las series, se definen los sistemas lineales completos. El número de puntos de un grupo de una serie lineal se ve sustituido por el grado del sistema lineal, número de puntos de intersección de dos curvas genéricas del sistema. (Supuesto éste sin partes fijas y de dimensión no nula).

El problema de Riemann-Roch es ahora la determinación de la dimensión del sistema lineal completo $|C|$ determinado por una curva C, determinación equivalente a la del número de parámetros de los que depende una función racional del punto de la superficie con C como curva polar. Un análogo de la serie canónica, el sistema canónico, se obtiene al considerar el sistema lineal determinado por las superficies de orden m-4 que contienen a la curva nodal, llamadas superficies adjuntas de orden m-4 (m orden del modelo).

Se llama género geométrico de la superficie, p_g , al número de adjuntas de orden m-4 linealmente independientes, esto es, a la dimensión del sistema canónico aumentada en una unidad. La serie canónica, y con ella el género geométrico, tienen carácter intrínseco. Podemos examinar a continuación los puntos esenciales de la demostración de Noether; sea C una curva irre ducible elegida genéricamente en un sistema lineal de dimensión no nula $|C|$:

Se observa en primer lugar que, dado sobre la superficie un sistema lineal $|L|$ de dimensión l, del que las curvas que contienen a C forman un sistema de dimensión h-1, las curvas de $|L|$ cortan sobre C una serie lineal de dimensión l-h. En particular, puede tomarse $|L| = |C|$; la serie cortada por $|C|$ sobre C se denomina serie característica y es una g_n^{r-1} si $r = \dim |C|$ y $n = gr|C|$.

Por otra parte se prueba que al reunir un grupo cortado sobre C por una curva K del sistema canónico con un grupo de la serie característica, se obtiene un grupo de la serie canónica de C, i.e., simbólicamente

$$K_c = K \cdot C + C \cdot C$$

Noether aplica el teorema de Riemann-Roch a la serie característica, calculando

$$\dim |C| = r = 1 + n - p + i \qquad \text{(I)}$$

donde p es el género de C e i el índice de especialidad de la serie característica. Este último, en virtud de la relación observada entre la traza sobre C del sistema canónico y las series canónica y característica de C es

$$i = 1 + \dim |K \cdot C|$$

donde $|K \cdot C|$ es la serie lineal completa determinada por la intersección de C con una curva del sistema canónico. En la hipótesis de que la $|K-C|$ completa venga cortada por el sistema canónico K,

$$i = 1 + \dim |K\cdot C| = 1 + \dim|K| - j = P_g - j \quad \text{(II)}$$

donde j, llamado índice de especialidad de $|C|$, es el número de curvas del sistema canónico linealmente independientes que contienen a C.

Resulta pues de (I) y (II)

$$r = n - p + p_g - j + 1 \qquad \text{(III)} .$$

Sin embargo el razonamiento presenta dos puntos no justificados: al establecer la (I) se ha supuesto que la serie característica es completa y ello puede ser falso a pesar de que $|C|$ sea un sistema lineal completo; en general la dimensión de la serie lineal completa determinada por la característica será $r - 1 + \delta$ donde $\delta (\geq 0)$ es la llamada deficiencia de la serie característica. Así la (I) debería ser·

$$r = 1 + n - p + i - \delta$$

Algo parecido ocurre con la (II), el sistema canónico no corta, en general, una serie lineal completa sobre C de manera que el índice de especialidad es

$$i = 1 + \dim |K| - j + \eta = p_g - j + \eta$$

donde $\eta (\geq 0)$ es la diferencia entre la dimensión de la serie completa determinada por un grupo intersección de una curva de $|K|$ con C y la de la serie cortada por $|K|$ que era la calculada en (II). La (III) se cnvierte en

$$r = n - p + p_g - j + 1 - \delta + \eta \qquad \text{(IV)}$$

igualdad en la que aparecen dos términos desconocidos de signos contrarios que impiden establecer ni siquiera una desigualdad. La eliminación de δ y η en esta última igualdad y con ello el establecimiento del teorema de Riemann-Roch requiere, como veremos, la consideración de un nuevo género.

5.- El género aritmético.

Tras la definición, por Noether, del género geométrico como el número de adjuntas φ_{m-4}, aparece inmediatamente la posibilidad de calcularlo en función de los caracteres de la curva doble por medio de la fórmula de postulación de Cayley: esta fórmula proporciona el número de superficies independientes de un orden dado que contienen a una curva dada del espacio, si el orden de las superficies es suficientemente elevado. La aplicación de la fórmula de postulación al cálculo del número de adjuntas φ_{m-4} no proporciona siempre el resultado correcto: el género que se obtiene de dicho cálculo es el llamado género aritmético de la superficie, corrientemente designado por p_a. El propio Cayley puso en evidencia casos en los que $p_a < 0$ (superficies regladas) mientras, por su propia definición, siempre es $p_g \geq 0$. Zeuthen probó el caracter invariante de p_a de modo que para una superficie se disponía de dos géneros, p_g y p_a, obtenidos, respectivamente, por vía geométrica y aritmética; en opinión de Noether se trataba de un único invariante con dos definiciones, de las que la aritmética le permitía adquirir valores negativos, prolongando y completando la definición geométrica.

La presunción de Noether de que debía ser $p_a = p_g$ para $p_a \geq 0$ se reveló infundada al aparecer los primeros ejemplos de superficies con $0 \leq p_a < p_g$ (Castellnuovo 1891). En sus trabajos de los años 1893-96, Enriques da un significado geométrico a la diferencia $p_g - p_a$, la llamada irregularidad de la superficie que permite establecer la invariancia de p_a a partir de la de p_g, logra deducir de (IV) una desigualdad para las superficies de irregularidad nula probando que en este caso $\delta = 0$. Sin embargo, el resultado decisivo lo obtiene Castellnuovo en sus memorias de 1896-97: la irregularidad $p_g - p_a$ es el máximo alcanzado por las deficiencias de las series características de los diversos sistemas lineales de la superficie: en cualquier caso $\delta \leq p_g - p_a$ con igualdad en determinados casos. De (IV) se obtiene ahora, al ser $\eta \geq 0$:

$$r \geq n - p + p_a - j + 1$$

teorema de Riemann-Roch para las superficies algebraicas que posteriormente se verá liberado de algunas hipótesis introducidas en esta vía de demostración (dim $|C| \geq 3$, C irreducible) extendiendose al caso de curvas reducibles, con partes múltiples, curvas virtuales, etc.. La demostración de Castellnuovo, en extremo dificultosa, se vio mejorada por las posteriores demostraciones de Severi y Enriques.

6.- Algunas indicaciones bibliográficas.

Para el tratamiento clásico del teorema de Riemann-Roch en el caso de las curvas, pueden consultarse:

Enriques,F. Chisini,O. Teoria geométrica della ecuazioni. N. Zanichelli, Bologna, 1915-24(especialmente el volumen tercero).

Severi,F. Tratatto di geometria algebraica. N. Zanichelli, Bologna,1926.

En ambos se hallan notas históricas e indicaciones bibliográficas acerca de las memorias originales.

El teorema para superficies se halla en:

Enriques,F. Le superficie algebriche, N. Zanichelli, Bologna, 1949.

o en versión más actual:

Mumford,D. Lectures on curves on an algebraic surface. Ann. of Math. Studies,59, Princeton University Press, 1966.

Una exposición histórica acerca de las sucesivas versiones del teorema, con abundantes indicaciones bibliográficas, es:

Severi,F. Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietá. Cuestioni collegate. Springer-Verlag, Berlin, 1956.

Versiones actuales del teorema referidas a variedades de dimensión arbitraria son las de

Hirzebruch,F. Neue topologishe Metoden in der Algebraischen Geometrie. Erg. Math. Springer-Verlag,Berlin, 1956.

Borel,A. Serre,J.-P."Le théorème de Riemann-Roch" Bull. Soc. Math. France, 86 (1958)

Se hace necesario advertir que existen algunas discordancias entre la nomenclatura clásica y la de algunos tratados actuales: en particular los autores modernos suelen llamar género aritmético al que se llamaba género aritmético virtual (Severi, Il teorema di Riemann-Roch... ya citado, pag. 69 y sig.), que no tiene caracter invariante y no coincide con el género aritmético clásico más que en el caso de variedades no singulares. Asimismo, en el marco de la teoría de esquemas, es corriente emplear nociones más restrictivas de equivalencia lineal, no invariantes, que coinciden con la clásica en el caso de variedades no singulares: véase por ejemplo, en la obra citada de Mumford, la equivalencia de divisores de Cartier o en los "Groupes algebriques.." de Serre, un "teorema de Riemann-Roch" para curvas singulares que en apariencia contradice el punto de vista intrínseco de Riemann.