Caracterización de los ideales con nulidad vacía del álgebra de Lie de los automorfismos infinitesimales con soporte compacto de una estructura simpléctica.

por

Antonio Díaz Miranda

Introducción

En estos últimos años se han producido numerosos avances en el estudio de las álgebras de Lie correspondientes a los grupos que E. Cartan denominó "grupos infinitos transitivos simples".

Las cuatro "álgebras de Lie infinitas clásicas" son:

1) Algebra de Lie de los campos de vectores de una variedad diferenciable.

2) Algebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una estructura unimodular.

3) Algebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una estructura simpléctica.

4) Algebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una estructura de contacto.

Entre los trabajos a que hemos hecho referencia hay que citar los de Gelfand y Fuks. Rozenfeld, sobre la cohomología de estas álgebras de Lie en el caso de variedades compactas y en el caso general los de Arnold, Takens, Avez, Lichnerowicz, Morimoto y el autor sobre su estructura y derivaciones (lo que incluye en particular el estudio del primer grupo de cohomología a valores en el álgebra).

El presente trabajo se inserta en el estudio de los ideales de un álgebra de Lie del tipo 3. En él se caracteriza una familia de ideales de este álgebra de Lie que parece especialmente importante para la clasificación del conjunto de los ideales. La estructura de tal familia resulta depender fuertemente de las propiedades topológicas de la variedad, especialmente de su primer grupo de cohomología a valores reales.

1. Preliminares y notación

En lo sigue, M será una variedad diferenciable dotada de una estructura simpléctica de 2-forma fundamental ω.

Entonces ω es una 2-forma diferencial cerrada de rango máximo, lo que exige que M sea de dimensión par, 2n, y ω^n sea un elemento de volumen sobre M.

Si X es un campo de vectores sobre M denotaré por $L(X)$ la derivación de Lie respecto a X y por $i(X)$ el producto interior por X.

A será el conjunto de los automorfismos infinitesimales de la estructura, es decir, el conjunto de los campos de vectores, X, de M que cumplen $L(X)\omega = 0$ (lo que equivale a decir que $i(X)\omega$ es cerrada), A_0 será el subconjunto de A formado por los elementos, X, tales que $i(X)\omega$ es exacta, A_c será el subconjunto de A formado por los elementos con soporte compacto, $A_c^0 \equiv A_0 \cap A_c$, A_1 es el subconjunto formado por los $X \in A_c^0$ tales que existe $f \in C^\infty(M)$ con soporte compacto tal que $i(X)\omega = df$ y

$$\int f \cdot \omega^n = 0$$

A es una subálgebra de Lie de la de los campos de vectores de M. A_0, A_c, A_c^0 y A_1 son ideales de A.

Denotaremos por $\flat$ la aplicación lineal que a cada campo de vectores, X, hace corresponder la 1-forma diferencial $i(X)\omega$. El hecho de que ω sea de rango máximo implica que esta aplicación es un isomorfismo. Si α es una 1-forma diferencial denotaremos por $\alpha^{\#}$ es único campo de vectores que cumple $i(\alpha^{\#})\,\omega = \alpha$ y si $f \in C^{\infty}(M)$ denotaremos $f^{*} = (df)^{\#} \in A_0$.

2. Teorema fundamental

Sea I un ideal de A_c, denotaremos por $n(I)$ el conjunto de los $p \in M$ tales que $X(p) = 0$ para todo $X \in I$. Este cerrado será denominado nulidad de I.

LEMA 1.- Supongamos $n(I) = \phi$. Entonces:

a) Si M es compacta se tiene $I \cap A_c^0 = A_c^0$

b) Si M no es compacta se tiene $I \cap A_c^0 = A_1$ o bien $I \cap A_c^0 = A_c^0$.

Demostración.- **El corolario de** **[13] de A.Avez et al.** se puede enunciar asi: sea V un subespacio vectorial de A, tal que $[A_1, V] \subset V$ y para todo $m \in M$ exista $X \in V$ tal que $X(m) \neq 0$. Entonces $A_1 \subset V$.

Vemos pues que en nuestro caso se tiene $A_1 \subset I$ y por tanto $A_1 \subset I \cap A_c^0$.

Supongamos M compacta. Entonces $A_c^0 = A_1$ porque todos los elementos de A_c^0 son de la forma f^{*} con $f \in C^{\infty}(M)$ y

$$f^{*} = \left[f - \left(\int f\,\omega^n / \int \omega^n \right) \right]^{*} \in A_1$$

Sea ahora M no compacta. Si el complementario, K, de A_1 en $I \cap A_c^0$ no es vacío, sean $f^{*} \in K$ y $g^{*} \in A_c^0$ con f y g a soporte compacto y denotemos

$$l = g - \left(\int g\,\omega^n / \int f\,\omega^n\right) \cdot f$$

entonces se cumple $1^{*} \in A_1$ y $g^{*} = (1 + (cte)\cdot f)^{*} = 1^{*} + (cte)\cdot f^{*} \in I \cap A_c^0$ lo que implica por ser g^{*} arbitrario en A_c^0 que $A_c^0 \subset I \cap A_c^0$, luego

$$I \cap A_c^0 = A_c^0 \ .$$

Si K es vacío se tiene $I \cap A_c^0 = A^1$ ./.

Sea F(resp. H) el conjunto de las 1-formas cerradas (resp. exactas) de M y F_c (resp. H_c) el subconjunto de F (resp. H) formado por los elementos que tienen soporte compacto.

Consideremos la forma bilineal sobre F_c :

$$\sigma : F_c \times F_c \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\sigma(\alpha,\beta) = \int \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-1}$$

La integral existe porque el integrando tiene soporte compacto.

Denotemos por P el subconjunto de F_c formado por los $\alpha \in F_c$ tales que $\sigma(\alpha,\beta) = 0$ para todo $\beta \in F_c$ y $P^{\#}$ el conjunto de los $X \in A_c$ tales que $i(X)\omega \in P$. Se tiene evidentemente $H_c \subset P$ luego $A_c^0 \subset P^{\#}$. P y $P^{\#}$ son subespacios vectoriales de F_c y A_c respectivamente.

LEMA 2.- Sea M no compacta y $I \cap A_c^0 = A_1$. Entonces $I \subset P^{\#}$.

Demostración.- Sean X e Y campos de vectores sobre M.

Se tiene:

$$i(Y)\,\omega \wedge \omega^n = 0$$

luego

$$i(X)\,(i(Y)\,\omega \wedge \omega^n) = 0$$

pero

$$i(X)\,(i(Y)\omega \wedge \omega^n) = ((i(X)\,i(Y)\,\omega)\omega^n - i(Y)\,\omega \wedge i(X)\,\omega^n$$

y por tanto

$$(i(X)\,i(Y)\,\omega)\,\omega^n = i(Y)\,\omega \wedge (n\ i(X)\,\omega \wedge \omega^{n-1}) = -n\ i(X)\,\omega \wedge i(Y)\,\omega \wedge \omega^{n-1}$$

Entonces si $X \in \bar{I}$ y $\beta \in F_c$ se tiene:

$$\int i(X)\omega \wedge \beta \wedge \omega^{n-1} = \int i(X)\omega \wedge i(\beta^{\#})\omega \wedge \omega^{n-1} = (-\frac{1}{n})\int (i(X)\, i(\beta\ )\omega)\omega^{n}$$

Por otra parte si $X,Y \in A$ se tiene:

$$i([X,Y])\omega = (L(X)\,i(Y) - i(Y)\,L(X))\omega = L(X)\,i(Y)\omega =$$

$$= di(X)\,i(Y)\omega + i(X)\;di(Y)\omega = di(X)\,i(Y)\omega + i(X)\,L(Y)\omega =$$

$$= di(X)\,i(Y)\,\omega$$

lo que implica en particular $[A,A] \subset A_0$ y $[A_c,A] \subset A_c^0$. Además si $X \in I$, $\beta \in F_c$ se tiene $[X,\beta^{\#}] \in I \cap A_c^0 = A_1$ y $i(X)\,i(\beta^{\#})\omega$ es la única función con soporte compacto que cumple

$$(i(X)\,i(\beta^{\#})\omega)^{\#} = [X,\beta^{\#}] \quad , \text{ luego}$$

$$\int (i(X)\,i(\beta^{\#})\omega)\omega^{n} = 0$$

y por tanto $i(X)\omega \in P$, es decir, $X \in P^{\#}$./.

LEMA 3.- $[P^{\#},P^{\#}] = [P^{\#},A_c] = A_1$. En particular $P^{\#}$ es un ideal de A.

Demostración.- $P^{\#}$ contiene a A_c^0, luego a A_1. Por otra parte la proposición 2 del apartado 12 de [2] implica $[A_1,A_1] = A_1$, luego:

$$A_1 \subset [P^{\#},P^{\#}] \subset [P^{\#},A_c]$$

Sean $k \in P^{\#}$ y $X \in A_c$. Entonces

$$i([K,X])\,\omega = d\,i(K)\;i(X)\omega$$

pero

$$\int i(K)\,i(X)\omega = -n\int (i(K)\omega)\wedge(i(X)\omega)\wedge\omega^{n-1}$$

y esta integral es nula ya que $i(K)\omega \in P$ y $i(X)\omega \in F_c$ luego $[K,X] \in A_1$ ./.

El siguiente teorema caracteriza los ideales de A_c con nulidad vacia.

TEOREMA.- Los ideales de A_c con nulidad vacía son los subespacios vectoriales de A_c que contienen a A_c^0 y los subespacios vectoriales de $P^{\#}$ que contienen a A_1.

Demostración.- Sea I un ideal de A_c con nulidad vacía. Si $I \cap A_c^0 = A_c^0$, I es un subespacio vectorial de A_c que contiene a A_c^0.

Si $I \cap A_c^0 = A_1$ estamos, según el lema 1, en el caso de M no compacta y, según el lema 2, I es un subespacio vectorial de $P^{\#}$.

Sea I un subespacio vectorial de A_c que contiene a A_c^0, entonces la relación $[A_c, A_c] \subset A_c^0$ implica que I es un ideal de A_c. Si I es un subespacio vectorial de $P^{\#}$ que contiene a A_1, la relación $[P^{\#}, A_c] = A_1$ implica que I es un ideal de A_c./.

3. Casos particulares

Caso de variedades compactas.- Si M es compacta se tiene $A_c = A$ y todos los subespacios vectoriales de $P^{\#}$ que contienen a A_1 son subespacios de A que contienen a $A_0 = A_c^0 = A_1$. En consecuencia los ideales de A con nulidad vacía son los subespacios vectoriales de A que contienen a A_0. Estos subespacios vectoriales están en correspondencia biunívoca, mediante la aplicación $\flat : X \in A \to i(X)\omega \in F$, con los subespacios vectoriales de F que contienen a H. Denotemos por $\pi : F \to F/H$ la proyección canónica; los subespacios vectoriales de F que contienen a H están en correspondencia biunívoca por medio de π con los subespacios vectoriales de F/H.

Vemos pues que si M es compacta los ideales de A con nulidad vacía son los subconjuntos de la forma $\#(\pi^{-1}(V)) = \{X \in A : \pi(i(X)\omega) \in V\}$ siendo V un subespacio vectorial arbitrario del primer grupo de cohomología real de M.

Caso de variedades simplemente conexas.- En este caso la forma bilineal σ es nula, luego $P^{\#} = A_c = A_c^0$ y por tanto los únicos ideales con nulidad vacía de A_c son A_c^0 y A_1.

Si M es además compacta $A_c^0 = A_1$ y sólo hay un ideal del tipo considerado.

Caso en que la forma simpléctica es exacta y $n > 1$.- También en este caso se tiene $\sigma = 0$, luego $P^{\#} = A_c$ y por tanto los ideales son los subespacios vectoriales A_c que contienen a A_1.

Denotemos por H_1 el subespacio vectorial de H_c formado por las 1-formas diferenciales de la forma df con $f \in C^{\infty}(M)$ de soporte compacto que cumple $\int f\,\omega^n = 0$.

Mediante la aplicación $\flat$ los subespacios vectoriales de A_c que contienen a A_1 se transforman en subespacios vectoriales de F_c que contienen a H_1. Denotemos por $t : F_c \to F_c/H_1$ la proyección canónica, entonces los ideales de A_c considerados son los subconjuntos de la forma $(t^{-1}(V)) = \{X \in A_c : t(i(X)\omega) \in V\}$ donde V es un subespacio vectorial arbitrario de F_c/H_1.

4. Observaciones.

Los mismos procedimientos utilizados permiten caracterizar los ideales de A_c de la forma $J \cap A_c$ donde J es un ideal de A con nulidad vacía.

Todos estos ideales son de los caracterizados en el teorema, ya que $A_1 \subset J$ y $A_1 \subset A_c$ implica $n(J \cap A_c) = \emptyset$, pero no todos los allí caracterizados son de esta forma, algunos de ellos no serán, en general, ideales de A.

Se puede demostrar que los ideales de A de la forma $J \cap A_c$ con J ideal de A nulidad vacía son los subespacios vectoriales de A_c que contienen a A_c^0 y los subespacios vectoriales de $Q^{\#}$ que contienen a A_1, donde Q se define de la manera siguiente:

Consideremos la aplicación bilineal

$$\sigma' : F_c \times F \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\sigma'(\alpha,\beta) = \int \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-1}$$

y sea $Q = \{ \alpha \in F_c : \sigma'(\alpha,\beta) = 0 \ \forall \beta \in F \}$. Definimos $Q^{\#} = \{ X \in A_c : i(X)\omega \in Q \}$. Es inmediato que Q y $Q^{\#}$ son subespacios vectoriales y que $A_c^0 \subset Q^{\#} \subset P^{\#}$.

El lema 1 es aplicable también en este caso a $I = J \cap A_c$, el lema 2 se puede mejorar en este caso hasta demostrar que si M no es compacta y $(J \cap A_c) \cap A_c^0 = A_1$ se tiene $J \cap A_c \subset Q^{\#}$ (basta tomar β arbitrario en F, en lugar de $\beta \in F_c$ y observar que $[x,\beta^{\#}] \in (J \cap A_c) \cap A_c^0 = A_1$ ya que $J \cap A_c$ es ideal de A) y el lema 3 se mejora demostrando que $[Q^{\#},Q^{\#}] = [Q^{\#},A_c] = [Q^{\#},A] = A_1$. Entonces razonamientos similares a los utilizados en la demostración del teorema demuestran lo enunciado en este paragrafo.

Este resultado es equivalente al siguiente: entre los ideales de A_c caracterizados en el teorema de la sección 2 sólo son ideales de A los que contienen a A_c^0 y los que están contenidos en $Q^{\#}$.

Bibliografía

V. I. Arnold.- Funk. Anal. i Priloz 3,(1969) 77-78.

A.Avez, A. Lichnerowicz, A.Díaz Miranda.- Journal of Diff. Geometry. Vol. 9, Nº 1 (1974) 1-40.

E. Calabi.- Problems in Analysis. Princeton University Press. Princeton (1970) 1-26.

E. Cartan.- Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 25(1908) 57-194.

A. Díaz Miranda.- Symposia Mathematica Vol. 14 (1974) 153-171.

A. Díaz Miranda.- C.R. Acad. Sci. Paris t. 274 (1972) 989-992.

I.M. Gel'fand.- Actes Congrès intern. math. 1970, t.1, pp.95-111.

I.M. Gel'fand, D.B. Fuks.- Funct. Anal., vol. 4 (1970) 10-25.

A. Lichnerowicz.- J.Math. pures et appl. t.52,(1973) 473-508.

A. Lichnerowicz.- Ann. Inst. Four. T. 24 Fac. 3 (1974) 219-266.

A. Lichnerowicz.- J. Math. pures et appl. t. 53 (1974) 459-484.

T. Morimoto.- The Derivation Algebras of the Classical Infinite Lie Algebras(en prensa).

B. Rozenfeld.- Funk. Anal. i Priloz 4 (1970) 91-92.

F. Takens.- Comp. Math. 26(1973) 95-99.